Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'informatique
Département des Mathématiques

Module: **Probabilités,**
2 ième Année Licence LMD,
Année universitaire: 2021/2022

Série d'exercices N° : 1

Soit **E** un ensemble à **n** éléments.

***p*-listes**: On appelle p-liste de **E**, toute suite ordonnée (l'ordre est important) de p éléments pris parmi n élément de **E**.

• n^p : nombre de p-listes de **E**.

Arrangements: On appelle arrangement de p éléments, toute suite ordonnée (l'ordre est important) de p éléments distincts pris parmi n éléments de **E**.

• $\mathbf{A}_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$: nombre d'arrangements de p éléments parmi n éléments de **E**.

Permutations: Si $p = n$, les arrangements de n éléments parmi n éléments seront appelées permutations de n éléments.

$P_n = \mathbf{A}_n^n = n!$: nombre de permutations de n éleéments.

Combinaisons: Une combinaison est un sous ensemble à p éléments de n éléments de **E**. Ici, l'ordre n'a pas d'importance et la répétition des éléments est interdite.

• $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$: nombre de combinaisons de p éléments parmi n éléments de **E**.

Exercice 01 (Cours):

Soit **E** un ensemble à **n** éléments.

(1) Quelle est le nombre de parties de **E** à **p** éléments ? $(\mathbf{1} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{n})$.

(2) En déduire le cardinal de $\mathcal{P}(\mathbf{E})$.

(3) Soit $\mathbf{a} \in \mathbf{E}$. Déterminer le nombre de sous-ensembles de **E** de cardinal **p**:

- qui contiennent **a**.
- qui ne contiennent pas **a**.

En déduire que:

$$\mathbf{C}_n^p = \mathbf{C}_{n-1}^{p-1} + \mathbf{C}_{n-1}^p.$$

Exercice 02 (Cours):

Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω. Montrer que:

(1) $\varnothing \in \mathcal{F}$

(2) Soient $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathcal{F}$ alors $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \in \mathcal{F}$

(3) Soient $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathcal{F}$ alors $\mathbf{A} - \mathbf{B} \in \mathcal{F}$ et $\mathbf{A} \triangle \mathbf{B} \in \mathcal{F}$.

Exercice 03 (Cours):

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Montrer que:

(1) $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$, (2) $\mathbb{P}(\overline{\mathbf{A}}) = 1 - \mathbb{P}(\mathbf{A})$.

(3) $\forall \mathbf{A} \in \mathcal{F}$, $\forall \mathbf{B} \in \mathcal{F}$: $\mathbb{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbb{P}(\mathbf{A}) - \mathbb{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$.

(4) Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux événements de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ alors

$$\mathbb{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbb{P}(\mathbf{A}) + \mathbb{P}(\mathbf{B}) - \mathbb{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}).$$

(5) $\forall \mathbf{A} \in \mathcal{F}, \forall \mathbf{B} \in \mathcal{F} : \mathbf{A} \subset \mathbf{B} \Rightarrow \mathbb{P}(\mathbf{A}) \leq \mathbb{P}(\mathbf{B})$

Exercice 04:

Une urne **U** contient **6** *boules blanches,* **4** *boules rouges et* **5** *boules vertes.* On considère les trois méthodes suivantes:
Méthode 1: l'une après l'autre avec remise de la boule tirée.
Méthode 2: l'une après l'autre sans remise de la boule tirée.
Méthode 3: simultané.
Calculer avec ces méthodes la probabilité d'obtenir:
1) Trois boules rouges (Tirage de trois boules).
2) Deux boules blanches et deux vertes (Tirage de quatre boules).

Exercice 05:

On lance une pièce de monnaie **trois fois** de suite:
(1) Définir l'espace fondamental de cette expérience aléatoire.
(2) Caluculer **à l'aide d'un arbre de probabilité pondéré** les probabilités des événements suivants:
A : « *Le résultat ne comporte que des Piles* ».
B : « *Le résultat comporte au moins une Face* ».
C : « *Le résultat comporte : 2 Pile et 1 Face* ».

Exercice 06:

On lance un dé jusqu'à la première apparition du (**6**) Six. Notons:

$$\mathbf{A}_i = \{\text{Le } i\text{-ème lancer affiche le chiffre } \mathbf{6}\},\ i \in \mathbb{N}^*.$$

(1) Définir avec des expressions chacun des événements suivants:
- $\mathbf{E}_1 = \overline{\mathbf{A}}_1 \cap \overline{\mathbf{A}}_2 \cap \mathbf{A}_3,$
- $\mathbf{E}_2 = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{\mathbf{A}}_i.$

(2) Ecrire à l'aide des événements $\mathbf{A}_i$ et $\overline{\mathbf{A}}_i$ les événements:
- $\mathbf{E}_1 = \{$La première apparition du **6** a lieu dans le sixième lancer$\}$.
- $\mathbf{E}_2 = \{$**6** n'apparaît pas au cours des **3** premiers lancers$\}$?
- $\mathbf{E}_3 = \{$On obtient au moins une fois **6** dans les **10** premiers lancers$\}$.

Exercice 07:

Une urne contient **2** boules blanches et **3** boules noires. On tire successivement deux boules sans remise. Calculer et comparer les probabilités des deux événements suivants:
A : « *Tirer deux boules de même couleur*».
B : « *Tirer deux boules de couleurs différentes*».

Exercice 08:

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.
(1) Si $(\mathbf{A}_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante d'événements telle que $\mathbf{A} = \cup_{n\geq 1} \mathbf{A}_n$. Montrer que

$$\mathbb{P}(\mathbf{A}) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathbf{A}_n).$$

(2) Si $(\mathbf{A}_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante d'événements telle que $\mathbf{B} = \cap_{n\geq 1} \mathbf{A}_n$. Montrer que

$$\mathbb{P}(\mathbf{B}) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathbf{A}_n).$$

Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'informatique
Département des Mathématiques

Module: **Probabilités,**
2 ième Année Licence LMD,
Année universitaire: 2021/2022

Solutions: série d'exercices N° : 1

Solution de l'exercice 01:

(1) Le nombre de parties de E à p éléments est une combinaison d'ordre p de E,

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

(2) L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ contient tous les sous ensembles de E, c'est à dire:

$$Card\left(\mathcal{P}(E)\right) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \times 1^p \times 1^{n-p} = (1+1)^n = 2^n.$$

(3) Le nombre de parties de E à p éléments:

- qui contiennent a $\left(= C_{n-1}^{p-1} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}\right)$.
- qui ne contiennent pas a $\left(= C_{n-1}^{p} = \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!}\right)$.
- On a

$$\begin{aligned} C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2:

1) D'après la deuxième condition on a $\overline{\Omega} = \varnothing \in \mathcal{F}$.

2) $\begin{cases} A \in \mathcal{F} \\ B \in \mathcal{F} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{A} \in \mathcal{F} \\ \overline{B} \in \mathcal{F} \end{cases} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{(\overline{A} \cup \overline{B})} \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

3) $A - B = A \cap \overline{B} \in \mathcal{F}$.

Solution de l'exercice 3:

(1) On a $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \cup \varnothing) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\varnothing)$. Alors nous avons $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

(2) On sait que $\Omega = A \cup \overline{A}$, donc

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}),$$

enfin nous avons

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

(3) $A = (A-B) \cup A \cap B \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left((A-B) \cup A \cap B\right) = \mathbb{P}\left(A-B\right) + \mathbb{P}\left(A \cap B\right) \Rightarrow \mathbb{P}\left(A-B\right) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
(4) $A \cup B = (A-B) \cup (B-A) \cup (A \cap B) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}\left((A-B) \cup (B-A) \cup (A \cap B)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(A-B\right) + \mathbb{P}\left(B-A\right) + \mathbb{P}\left(A \cap B\right) \\
&= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}\left(A \cap B\right) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).
\end{aligned}$$

(5) $B = A \cup (B-A) \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(A\right) + \mathbb{P}(B-A) \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B-A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Solution de l'exercice 4:

On pose l'événement suivant: A : "*Tirer trois boules rouges*".
1) ***Méthode 1 (*** Avec remise ***):*** *On doit calculer*

$$\mathbb{P}\left(A\right) = \frac{\text{Cas favorables}}{\text{Cas possibles}} = \frac{4^3}{15^3} = \left(\frac{4}{15}\right)^3.$$

Méthode 2 (Sans remise**)**: On doit calculer

$$\mathbb{P}\left(A\right) = \frac{\text{Cas favorables}}{\text{Cas possibles}} = \frac{A_4^3}{A_{15}^4} = \frac{24}{15 \times 14 \times 13 \times 12}$$

Méthode 3 : Le tirage est une combinaisons, c'est à dire on a

$$\mathbb{P}\left(A\right) = \frac{\text{Cas favorables}}{\text{Cas possibles}} = \frac{C_4^3}{C_{15}^4} = \frac{24 \times 4}{15 \times 14 \times 13 \times 12}$$

2) On pose l'événement suivant: B : "*Tirer deux boules blanches et deux vertes*".
Méthode 1 (Tirage avec remise ***):*** *On doit calculer*

$$\mathbb{P}\left(B\right) = \frac{\text{Cas favorables}}{\text{Cas possibles}} = \frac{6^2 \times 5^2 \times \frac{4!}{2! \times 2!}}{15^4}.$$

Méthode 2 (Tirage sans remise**)**: On doit calculer

$$\mathbb{P}\left(B\right) = \frac{\text{Cas favorables}}{\text{Cas possibles}} = \frac{A_6^2 \times A_5^2 \times \frac{4!}{2! \times 2!}}{A_{15}^4}$$

Méthode 3 : Le tirage est une combinaisons, c'est à dire on a

$$\mathbb{P}\left(B\right) = \frac{\text{Cas favorables}}{\text{Cas possibles}} = \frac{C_6^2 \times C_5^2}{C_{15}^4}$$

Solution de l'exercice 5:

(1) $\Omega = \{FFF, PPP, FFP, PPF, PFP, FPF, PFF, FPP\}$, $|\Omega| = 8$.
(2) $\mathbf{A} = \{PPP\}$

$\mathbf{B} = \{FFF, FFP, PPF, PFP, FPF, PFF, FPP\}$
$\mathbf{C} = \{PPF, PFP, FPP\}$
$\mathbb{P}(\mathbf{A}) = \frac{1}{8}$,
$\mathbb{P}(\mathbf{B}) = \frac{7}{8}$.
$\mathbb{P}(\mathbf{C}) = \frac{3}{8}$

Solution de l'exercice 6:

- $E_1 = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3$: "Obtenir 6 pour la première fois dans le troisième lancer".
- $E_2 = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}$: "ne jamais obtenir le 6".
- $E_1 = \bigcap_{i=1}^{5} \overline{A_i} \cap A_6$.
- $E_2 = \bigcap_{i=1}^{3} \overline{A_i}$
- $E_3 = \bigcup_{i=1}^{10} A_i$.

Solution de l'exercice 7:

- Les cas possibles: $A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$.
Les cas favorables de $\mathbf{A}$: $A_2^2 + A_3^2 = 2 + 6 = 8$. Donc, $\mathbb{P}(\mathbf{A}) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.
Les cas favorables de $\mathbf{B}$: $A_2^1 \times A_3^1 \times \frac{2!}{1! \times 1!} = 2 \times 3 \times 2 = 12$. Donc, $\mathbb{P}(\mathbf{B}) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.
La probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes est plus grande que celle de tirer deux boules de même couleur.

Solution de l'exercice 8:

(1) $\mathbf{A} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbf{B}_i$ où

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{B}_0 & = & \varnothing, \\ \mathbf{B}_1 & = & \mathbf{A}_1, \\ \mathbf{B}_2 & = & \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1 \\ & & \dots \\ \mathbf{B}_n & = & \mathbf{A}_n - \mathbf{A}_{n-1} \end{array}$$

La famille $(\mathbf{B}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont disjoints 2 à 2. D'autre part, on peut facilement voir que $\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(\mathbf{B}_i) = \mathbb{P}(\mathbf{A}_n)$, d'où

$$\mathbb{P}(\mathbf{A}) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbf{B}_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(\mathbf{B}_i) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(\mathbf{B}_i) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\mathbf{A}_n)$$

(2) Même idée.