Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'informatique
Département des Mathématiques

Module: **Probabilités,**
2 ième Année Licence LMD,
Année universitaire: 2021/2022

Série d'exercices N° : 2

Exercice 01 (Cours):

Soient $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ deux événements de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que si $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont indépendants, alors:
(1) $\boldsymbol{A}$ et $\overline{\boldsymbol{B}}$ sont aussi indépendants.
(2) $\overline{\boldsymbol{A}}$ et $\boldsymbol{B}$ sont aussi indépendants.
(3) $\overline{\boldsymbol{A}}$ et $\overline{\boldsymbol{B}}$ sont aussi indépendants.

Exercice 02 (Cours):

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On définit la probabilité conditionnelle de $\boldsymbol{A}$ sachant $\boldsymbol{B}$ comme suite:

$$\mathbb{P}_B(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \diagup \boldsymbol{B}) = \frac{\mathbb{P}(\cdot \cap \boldsymbol{B})}{\mathbb{P}(\boldsymbol{B})}.$$

(1) Montrer que $\mathbb{P}_B(.)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
(2) Montrer que: $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ deux événements indépendants $\Leftrightarrow \mathbb{P}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{A}) = \mathbb{P}(\boldsymbol{A}) \Leftrightarrow \mathbb{P}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{B}) = \mathbb{P}(\boldsymbol{B})$.

Exercice 03 (Cours):

On considère trois urnes $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$ et $\mathbf{U}_3$. La premiere $\mathbf{U}_1$ contient **9** boules blanches, **4** rouges et **2** noires. La deuxième contient **8** boules blanches, **5** rouges et **2** noires. La troisième contient **6** boules blanches , **4** rouges et **5** noires. On choisit l'une de trois urnes au hasard, puis on tire **3**-boules simultanément de cette urne.

(1) Calculer la probabilité d'être: "**1** *blanche et* **1** *rouge et* **1** *noire*".
(2) Supposons que les boules tirées sont **2** blanche et **1** rouge, calculer la probabilité qu'elles proviennent de l'urne $\mathbf{U}_1$.

On choisit cette fois-ci une boule de $\mathbf{U}_1$, une de boule de $\mathbf{U}_2$ et une boule de $\mathbf{U}_3$.
(3) Calculer la probabilité d'être: "**1** *blanche et* **1** *rouge et* **1** *noire*".

Exercice 04 (Cours):

Un sac contient **50** boules, dont: **20** boules rouges et **30** boules noires. Sur **15** boules rouges et **9** boules noires, on marque "**Gagné"** et dans le reste on marque **"Perdu".** On tire au hasard une boule. Caluculer **à l'aide d'un arbre de probabilité pondéré** les probabilités des événements suivants:
R : "*La boule tirée est rouge*". G : "*La boule tirée est marquée Gagné*".
$R \cap G$: "*La boule tirée est rouge et marquée Gagné*".
$\overline{R} \cap \overline{G}$: "*La boule tirée est noire et marquée Perdu*".

Enfin, quelle est la probabilité d'être une boule marquée Gagné.

Exercice 05:

Une urne $\mathbf{U}_1$ contient $\mathbf{a}_1$ boules rouges et $\mathbf{a}_2$ boules noires, une autre urne $\mathbf{U}_2$ contient $\mathbf{b}_1$ boules rouges et $\mathbf{b}_2$ boules noires. On tire une boule de $\mathbf{U}_1$ et on la met dans $\mathbf{U}_2$, on désigne par $\boldsymbol{E}$ l'événement "*la boule tirée de* $\mathbf{U}_1$ *est rouge*" et par $\boldsymbol{F}$ l'événement "*la boule tirée de* $\mathbf{U}_2$ *est rouge*" et par $\overline{\boldsymbol{E}}$ et $\overline{\boldsymbol{F}}$ les événements contraires.
(1) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(\boldsymbol{E}), \mathbb{P}(\overline{\boldsymbol{E}}), \mathbb{P}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}), \mathbb{P}(\boldsymbol{F}/\overline{\boldsymbol{E}})$.
(2) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(\boldsymbol{F}), \mathbb{P}(\boldsymbol{E}/\boldsymbol{F}), \mathbb{P}(\overline{\boldsymbol{E}}/\boldsymbol{F})$.

Exercice 06:

Une boite **A** contient **01** *boule blanche et* **03** *boules rouges*. Une autre boite **B** contient **05** *boules blanches et* **03** *boules rouges*. On tire au hasard et indépendamment une boule de la boite **A** et une boule de **B** et on les change de boites. Calculer la probabilité qu'après l'échange :

(1) **A** ne contient que des boules rouges.
(2) Les deux compositions restent inchangées.

Exercice 07:

Deux joueurs **A** et **B** jouent avec deux dés. Le joueur **A** gagnera s'il obtient un total de **7**, **B** gagnera s'il obtient un total de **6**.
Les deux joueurs jettent alternativement les deux dés, en commençant par le joueur **A**, jusqu'à ce que l'un des deux gagne. Quelles sont leurs probabilités de gagner ?.

Exercice 08:

Un voyageur arrive à un carrefour, il sait qu'à cet endroit il va trouver deux routes, une bonne et l'autre non. A ce carrefour, il y a trois frères $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ et $\mathbf{F}_3$. Le frère $\mathbf{F}_1$ dit la vérité une fois sur dix, $\mathbf{F}_2$ cinq fois sur dix et $\mathbf{F}_3$ neuf fois sur dix. Le voyageur s'adresse à un et un seul des trois frères, il demande son chemin et s'aperçoit par la suite que cette route est bonne. Quelle est la probabilité qu'il se soit adressé à

1) $\mathbf{F}_1$, 2) $\mathbf{F}_2$, 3) $\mathbf{F}_3$?.

Exercice 09:

Des études statistiques sur une population constituée de **60**% de femmes et **40**% d'hommes permettent de considérer qu'il y a **50**% d'hommes et **30**% de femmes qui fument. On choisit au hasard un individu de la population et on constate qu'il fume. Quelle est la probabilité pour qu'il soit un homme ?

Exercice 10:

Trois usines $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$ produisent respectivement **50**%, **30**% et **20**% des moteurs de voitures. Parmi la production de chacune des ces trois usines **5**%, **3**% et **2**% sont défectueux. Calculer la probabilité pour qu'un moteur défectueux provient de l'usine $\boldsymbol{A}$.

.

Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'informatique
Département des Mathématiques

Module: **Probabilité,**
2 ième Année Licence LMD,
Année universitaire: 2017/2018

Solutions de la série N° : 2

Solutions de l'exercice 01:

Soient A, B deux événements de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que si A et B sont indépendants, alors:
(1) On remarque que $A = A \cap \left(\overline{B} \cup B\right)$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(A \cap \left(\overline{B} \cup B\right)\right) = \mathbb{P}\left(\left(A \cap \overline{B}\right) \cup (A \cap B)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) + \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}\left(\underbrace{A \cap \overline{B} \cap A \cap B}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) + \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)
\end{aligned}$$

Alors,

$$\mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\,(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}\left(\overline{B}\right).$$

(2) Même méthode.
(3)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) &= \mathbb{P}\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) \\
&= 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \\
&= \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) - \mathbb{P}(B)\,(1 - \mathbb{P}(A)) \\
&= \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) - \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\mathbb{P}\left(\overline{B}\right).
\end{aligned}$$

Solutions de l'exercice 02:

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On définit la probabilité conditionnelle de A sachant B comme suite:

$$\mathbb{P}_B(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \diagup \boldsymbol{B}) = \frac{\mathbb{P}(\cdot \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

(1) - $\mathbb{P}_B(\Omega) = \dfrac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$

- $\mathbb{P}_B(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = \dfrac{\mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_n \cap B))}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\mathbb{P}(A_n \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_B(A_n)$.

(2) A, B deux événements indépendants $\Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \Leftrightarrow \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \Leftrightarrow \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.

Solutions de l'exercice 03:

(1) C :" *tirer* 1 *blanche et* 1 *rouge et* 1 *noire*". Alors, par la formule des probabilités totales on a:

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C/A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(C/A_2)\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(C/A_3)\mathbb{P}(A_3).$$

(2) C :" *tirer* 2 *blanche et* 1 *rouge*".
A_1 : " *tirer les boules l'urne* $\mathbf{U}_1$". Alors

$$\mathbb{P}(A_1/C) \overset{\text{Par Bayes}}{=} \frac{\mathbb{P}(C/A_1)\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(C/A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(C/A_2)\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(C/A_3)\mathbb{P}(A_3)}$$

On choisit cette fois-ci une boule de $\mathbf{U}_1$, une de boule de $\mathbf{U}_2$ et une boule de $\mathbf{U}_3$.
(3) On pose:
B_i : " *tirer une boule blanche de l'urne* $\mathbf{U}_i$"
R_i : " *tirer une boule rouge de l'urne* $\mathbf{U}_i$"
N_i : " *tirer une boule noire de l'urne* $\mathbf{U}_i$"
Les événement B_i, R_i, N_i sont indépendants.
La probabilité souhaitée est:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(B_1 \cap R_2 \cap N_3) + \mathbb{P}(B_1 \cap R_3 \cap N_2) + \mathbb{P}(B_2 \cap R_1 \cap N_3)\\ &+\mathbb{P}(B_2 \cap R_3 \cap N_1) + \mathbb{P}(B_3 \cap R_1 \cap N_2) + \mathbb{P}(B_3 \cap R_2 \cap N_1)\end{aligned}$$

Solutions de l'exercice 04:

Arbre de probabilité pondéré.

Solutions de l'exercice 05:

(1) $\mathbb{P}(\boldsymbol{E}) = \frac{a_1}{a_1+a_2}$,
$\mathbb{P}(\overline{\boldsymbol{E}}) = 1 - \frac{a_1}{a_1+a_2} = \frac{a_2}{a_1+a_2}$,
$\mathbb{P}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E}) = \frac{(b_1+1)}{(b_1+b_2+1)}$,
$\mathbb{P}(\boldsymbol{F}/\overline{\boldsymbol{E}}) = \frac{b_1}{(b_1+b_2+1)}$.
(2) $\mathbb{P}(\boldsymbol{F}) = \mathbb{P}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E})\mathbb{P}(\boldsymbol{E}) + \mathbb{P}(\boldsymbol{F}/\overline{\boldsymbol{E}})\mathbb{P}(\overline{\boldsymbol{E}}) = \frac{a_1(b_1+1)+a_2b_1}{(a_1+a_2)(b_1+b_2+1)}$,
$\mathbb{P}(\boldsymbol{E}/\boldsymbol{F}) \overset{\text{Par Bayes}}{=} \frac{\mathbb{P}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E})\mathbb{P}(\boldsymbol{E})}{\mathbb{P}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E})\mathbb{P}(\boldsymbol{E})+\mathbb{P}(\boldsymbol{F}/\overline{\boldsymbol{E}})\mathbb{P}(\overline{\boldsymbol{E}})} = \frac{a_1(b_1+1)}{a_1(b_1+1)+a_2b_1}$,
$\mathbb{P}(\overline{\boldsymbol{E}}/\boldsymbol{F}) \overset{\text{Par Bayes}}{=} \frac{\mathbb{P}(\boldsymbol{F}/\overline{\boldsymbol{E}})\mathbb{P}(\overline{\boldsymbol{E}})}{\mathbb{P}(\boldsymbol{F}/\boldsymbol{E})\mathbb{P}(\boldsymbol{E})+\mathbb{P}(\boldsymbol{F}/\overline{\boldsymbol{E}})\mathbb{P}(\overline{\boldsymbol{E}})}$.

Solution de l'exercice 06:

(1) Dans ce cas, il faut tirer la boule blanche de la boite **A** et une boule rouge de **B**, d'où la probabilité recherchée est :

$$p = \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{32}.$$

(2) Dans ce cas, les deux boules tirées des boites **A** et **B** doivent être de la même couleur, d'où la probabilité recherchée est :

$$p = \frac{1}{4} \times \frac{5}{8} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{8} = \frac{29}{32}.$$

Solution de l'exercice 07:

Le joueur **A** obtient un total de 7 dans les cas suivants: $(1,6),(2,5),(3,4),(6,1),(5,2),(4,3)$. La probabilité de cet événement est :

$$p_7 = \frac{1}{6}.$$

Le joueur **B** obtient un total de 6 dans les cas suivants: $(1,5),(2,4),(3,3),(5,1),(4,2)$. La probabilité de cet événement est :

$$p_6 = \frac{5}{36}.$$

Soit $p_{7,k}$ (resp. $p_{6,k}$) la probabilité pour que le joueur **A** (le joueur **B**) gagne à son *kième* essai. Alors :

$$p_{7,k} = \left(\frac{31}{36}\right)^{k-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)$$

et:

$$p_{6,k} = \left(\frac{31}{36}\right)^{k-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{36}\right)$$

Si l'on désigne par P_7 (resp. P_6) la probabilité pour que le joueur **A** (le joueur **B**) gagne, alors :

$$P_7 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} p_{7,k} = \frac{36}{61}.$$

et

$$P_6 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} p_{6,k} = \frac{25}{61}.$$

Solution de l'exercice 08:

Considérons les événements :

B : "la route est bonne"

F_i : "le voyageur s'adresse à F_i", $1 \le i \le 3$

On a : $P[F_1] = P[F_2] = P[F_3] = \frac{1}{3}$

$P[B|F_1] = \frac{1}{10}$; $P[B|F_2] = \frac{5}{10}$; $P[B|F_3] = \frac{9}{10}$. D'après la formule des probabilités totales on a :

$$P[B] = \sum_{1}^{3} P[F_i]P[B|F_i] = \frac{1}{2}$$

et d'après la formule de Bayes, on a :

$$P[F_i|B] = \frac{P[F_i]P[B|F_i]}{\displaystyle\sum_{1}^{3} P[F_i]P[B|F_i]}$$

d'où :

$$P[F_1|B] = \frac{1}{15}, P[F_2|B] = \frac{5}{15}, P[F_3|B] = \frac{9}{15}.$$

Solution de l'exercice 09:

On considère les trois événements:
A : "*l'individu est fume*"
B : "*l'individu est un homme*". Alors, $\mathbb{P}(B) = 0.4$ et $\mathbb{P}\left(\overline{B}\right) = 0.6$
La probabilité souhaitée est

$$\mathbb{P}(B/A) \overset{\text{Par Bayes}}{=} \frac{\mathbb{P}(A\diagup B)\,\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A\diagup B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}\left(A\diagup\overline{B}\right)\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)} = \frac{0.5 \times 0.4}{0.5 \times 0.4 + 0.3 \times 0.6} = \frac{0.24}{0.42} = 0.57$$

Solution de l'exercice 10:

On considère les trois événements:
A : "le produit provient de l'usine $\boldsymbol{A}$". Alors, $\mathbb{P}(A) = 0.5$
B : "le produit provient de l'usine $\boldsymbol{B}$". Alors, $\mathbb{P}(B) = 0.3$
C : "le produit provient de l'usine $\boldsymbol{C}$". Alors, $\mathbb{P}(C) = 0.2$
F : "le produit est défectueux".
La probabilité souhaitée est

$$\mathbb{P}(A/F) \overset{\text{Par Bayes}}{=} \frac{\mathbb{P}(F\diagup A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(F\diagup A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(F\diagup B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(F\diagup C)\,\mathbb{P}(C)} = \text{ Accomplir les calculs.}$$