Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'informatique
Département des Mathématiques

Module: **Probabilité,**
2 ième Année Licence LMD,
Année universitaire: 2021/2022

Série d'exercices N° : 3

Exercice 01 (Cours):

Soit X une variable aléatoire discrète qui prend des valeurs entières comprises entre 1 et 9 avec les probabilités:

$$p_k = \mathbb{P}(X = k) = a(10 - k).$$

(1) Déduire la valeur de a ?.

(2) Calculer $E(X), E(X^2)$ et déduire $Var(X)$.

Exercice 02 (Cours):

Une boite contient **5** jetons portant le numéro **1, 5** jetons portant le numéro **2** et **5** jetons portant le numéro **3**. On tire au hasard un jeton dans la boite et on note X le numéro du jeton tiré.

(1) Détérminer la loi de probabilité de X et sa fonction de répartition.
(2) Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.

(3) Calculer $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 2)$.

Exercice 03:

Soient X un variable aléatoire discrète et F_X sa fonction de répartition, montrer que
1) **(Cours)** F_X est croissante sur $\mathbb{R}$,

2) **(Cours)** F_X est continue à droite et admet une limite à gauche en tout point.

3) **(Cours)** $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.

4) **(Cours)** $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

5) **(Cours)** Les deux fonctions de répartitions $F_X = F_Y$ si et seulement si les variables aléatoires X et Y ont même loi.
6) $\mathbb{P}(X > a) = 1 - \mathbb{P}(X \leq a) = 1 - F_X(a)$.

7) $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Exercice 04:

On lance un dé bien équilibré deux fois. Soit X une variable aléatoire définie par "*le nombre maximal de deux numéros obtenus*".

(1) Détérminer la loi de probabilité de X et sa fonction de répartition.

(2) Calculer $E(X), E(X^2)$ et déduire $Var(X)$.

(3) Calculer $\mathbb{P}(X \leq 4), \mathbb{P}(X > 3), \mathbb{P}(2 < X \leq 5)$.

Exercice 05:

On considère le jeu suivant: le joueur lance d'abord un dé non truqué. S'il obtient $1, 2$ ou 3, il gagne l'équivalent en DZ (c'est-à-dire 1 DZ s'il obtient 1, par exemple). Sinon, il perd 2 DZ. On note X la variable aléatoire correspondant au gain de joueur (négatif en cas de perte).

(1) Donner la loi de X et sa fonction de répartition F_X.

(2) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 06 (Cours):

Peut-on considérer les expressions suivantes comme des densités de probabilité de variables aléatoires :

(1) $f_1(x) = \frac{1}{b-a}$ si $a \leq x \leq b$ et $f_1(x) = 0$ ailleurs.

(2) $f_2(x) = \frac{|x|}{a^2}$ si $-a \leq x \leq a$ et $f_2(x) = 0$ ailleurs.

Exercice 07 :

Déterminer a, b et c pour que les fonctions suivantes soient des densités de probabilité:

(1) $f_1(x) = \frac{a}{x}$ si $1 \leq x \leq e$ et $f_1(x) = 0$ ailleurs.

(2) $f_2(x) = \frac{1}{2}e^{-bx}$ si $x \geq 0$ et $f_2(x) = 0$ ailleurs.

(3) $f_3(x) = \frac{c}{4}x$ si $0 \leq x \leq c$ et $f_3(x) = 0$ ailleurs

Exercice 08 :

Soient X une variable aléatoire continue et F_X sa fonction de répartition. Montrer les relations suivantes:

(1) $\mathbb{P}(X = a) = 0$.

(2) $\mathbb{P}(X \geq a) = 1 - F_X(a)$.

(3) $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a < X < b)$.

Exercice 09:

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x(4-x) & \text{si } x \in [0,4] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,4] \end{cases}$$

(1) Calculer la constante α.

(2) Déterminer la fonction de répartition de X.

(3) Déterminer la probabilité des événements :$[1 \leq X \leq 2]$, $[X > 3]$.

(4) Calculer $E(X)$.

Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'informatique
Département des Mathématiques

Module: **Probabilité,**
2 ième Année Licence LMD,
Année universitaire: 2021/2022

Solutions de la série N° : 3

Solutions de l'exercice 1:

Rappel: formules des sommes:

$$\begin{aligned}
1+2+...+n &= \frac{n(n+1)}{2} \\
1^2+2^2+...+n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
1^3+2^3+...+n^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

(1) On doit vérifier $\sum \mathbb{P}(X=k)=1$. C'est à dire

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{9}\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=1}^{9}a(10-k)=a(10\sum_{k=1}^{9}1-\sum_{k=1}^{9}k) \\
&= a(90-\frac{9(9+1)}{2})=45a=1\Rightarrow a=\frac{1}{45}.
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{9}k\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=1}^{9}ak(10-k) \\
&= \frac{1}{45}(10\sum_{k=1}^{9}k-\sum_{k=1}^{9}k^2) \\
&= \frac{1}{45}(10\frac{9(9+1)}{2}-\frac{9(9+1)(2\times 9+1)}{6}) \\
&= \frac{165}{45}=\frac{35}{9}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=1}^{9}k^2\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=1}^{9}ak^2(10-k) \\
&= a(10\sum_{k=1}^{9}k^2-\sum_{k=1}^{9}k^3)=a(10\times 285-(\frac{9(9+1)}{2})^2) \\
&= a(2850-2025)=\frac{825}{165}=5.
\end{aligned}$$

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = 25 - \frac{35}{9} = \frac{190}{9}.$$

Solution de l'exercice 2:

La variable X prend les valeurs suivantes:

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$$

(1) La loi de probabilité de X est donnée par

Valeurs de X	x_k	1	2	3
Probabilité de chaque valeur	p_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

La fonction de répartition

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{3} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{3} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

(2) On a

$$E(X) = \sum_{k=1}^{3} x_k p_k = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3} = 2$$

et

$$E\left(X^2\right) = \sum_{k=1}^{3} x_k^2 p_k = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{9}{3} = \frac{14}{3},$$

et on déduit

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left(X^2\right) - E(X)^2 \\ &= \frac{14}{3} - 4 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

(3) On a

$$\mathbb{P}(1 \leq X \leq 2) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = \frac{2}{3}.$$

Solution de l'exercice 3:

6) Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > a) &= \mathbb{P}(\{w \in \Omega : X(w) > a\}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\{w \in \Omega : X(w) \leq a\}) \\ &= 1 - F_X(a). \end{aligned}$$

7) Pour simplifier les formules; on pose $A = \{w \in \Omega : a < X(w)\}$ et $B = \{w \in \Omega : X(w) \leq b\}$. Remarquons que

$$A \cup B = \Omega.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(a < X \leq b) &= \mathbb{P}(\{w \in \Omega : a < X(w) \leq b\}) \\
&= \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) + F_X(b) - 1 \\
&= F_X(b) - F_X(a).
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4:

La variable X prend les valeurs suivants:

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(1) La loi de probabilité de X est donnée par

Valeurs de X	x_k	1	2	3	4	5	6
Probabilité de chaque valeur	p_k	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

La fonction de répartition

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{36} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{4}{36} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ \frac{9}{36} & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ \frac{16}{36} & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ \frac{25}{36} & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ 1 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

(2) On a

$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} x_k p_k = \frac{161}{36}$$

et

$$E\left(X^2\right) = \sum_{k=1}^{6} x_k^2 p_k = \frac{791}{36}$$

et on déduit

$$\begin{aligned}
Var(X) &= E\left(X^2\right) - E(X)^2 \\
&= \frac{791}{36} - \frac{25921}{1296} \\
&= \frac{2555}{1296}.
\end{aligned}$$

(3) On a

$$\mathbb{P}(X \leq 4) = F_X(4) = \frac{16}{36}.$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X>3) &= 1-\mathbb{P}(X\leq 3)\\ &= 1-F_X(3)=1-\frac{9}{36}=\frac{27}{36}\end{aligned}$$

et encore

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(2<X\leq 5) &= \mathbb{P}(X=3)+\mathbb{P}(X=4)+\mathbb{P}(X=5)\\ &= \frac{5+7+9}{36}=\frac{21}{36}.\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5:

La variable X prend les valeurs suivants:

$$X(\Omega)=\{-2,1,2,3\}$$

(1) La loi de probabilité de X est donnée par

Valeurs de X	x_k	-2	1	2	3
Probabilité de chaque valeur	p_k	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

La fonction de répartition

$$F_X(x)=P(X\leq x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<-2\\ \frac{3}{6} & \text{si } -2\leq x<1\\ \frac{4}{6} & \text{si } 1\leq x<2\\ \frac{5}{6} & \text{si } 2\leq x<3\\ 1 & \text{si } x\geq 3\end{cases}$$

(2) On a

$$E(X)=\sum_{k=1}^{4}x_kp_k=\frac{-6+6}{36}=0$$

et

$$E\left(X^2\right)=\sum_{k=1}^{6}x_k^2p_k=\frac{18}{6}=3$$

On déduit

$$\begin{aligned}Var(X) &= E\left(X^2\right)-E(X)^2\\ &= \frac{18}{6}=3.\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 07:

Déterminer a, b et c pour que les fonctions suivantes soient des densités de probabilité:
(1) $f_1(x)=\frac{a}{x}$ si $1\leq x\leq e$ et $f_1(x)=0$ ailleurs. Nous avons

$$\int_1^e \frac{a}{x}dx=a\ln(x)\,|_1^e=1$$

Donc on trouve $a = 1$.

(2) $f_2(x) = \frac{1}{2}e^{-bx}$ si $x \geq 0$ et $f_2(x) = 0$ ailleurs.

- $b = 0$, la fonction $f_2(x) = \frac{1}{2}$ si $x \geq 0$ et $f_2(x) = 0$ ailleurs, ne sera jamais une fonction de densité.
- $b \neq 0$: Nous avons

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-bx}dx = -\frac{1}{2b}e^{-bx} \mid_0^{+\infty} = 1$$

Donc on trouve $b = \frac{1}{2}$.

(3) $f_3(x) = \frac{c}{4}x$ si $0 \leq x \leq c$ et $f_3(x) = 0$ ailleurs. Nous avons

$$\int_0^{c} \frac{c}{4}xdx = \frac{c}{8}x^2 \mid_0^c = \frac{c^3}{8} = 1.$$

Donc on trouve $c = \pm 2$.

Solution de l'exercice 08:

(1) $\mathbb{P}(X = a) = 0$. Nous avons

$$\mathbb{P}(X = a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

(2) $\mathbb{P}(X \geq a) = 1 - F_X(a)$. Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq a) &= \mathbb{P}(\{w \in \Omega : X(w) = a\} \cup \{w \in \Omega : X(w) > a\}) \\ &= \mathbb{P}(X = a) + \mathbb{P}(\{w \in \Omega : X(w) > a\}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\{w \in \Omega : X(w) \leq a\}) = 1 - F_X(a). \end{aligned}$$

(3) On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a \leq X \leq b) &= \mathbb{P}(X = b) + \mathbb{P}(a \leq X < b) \\ &= \mathbb{P}(a \leq X < b). \end{aligned}$$

Même arguement pour le reste.

Solution de l'exercice 09:

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x(4 - x) & \text{si } x \in [0, 4] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 4] \end{cases}$$

(1) Calculer la constante α. Nous avons

$$\int_0^4 \alpha x(4 - x)\,dx = 2\alpha x^2 - \frac{\alpha}{3}x^3 \mid_0^4 = \frac{32}{3}\alpha = 1$$

Donc on trouve $\alpha = \frac{3}{32}$.

(2) Déterminer la fonction de répartition de X. Nous avons

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{3}{32} t(4-t)\,dt = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \int_0^x \frac{3}{32} t(4-t)\,dt = x^2\left(\frac{3}{16} - \frac{x}{32}\right) \text{ si } 0 < x < 4 \\ 1 \text{ si } x \geq 4 \end{cases}$$

(3) Déterminer la probabilité des événements :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[1 &\leq X \leq 2] = F_X(2) - F_X(1) \\ &= 4\left(\frac{3}{16} - \frac{1}{16}\right) - \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{32}\right) \\ &= \frac{11}{32}. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X &> 3] = 1 - F_X(3) = 1 - 9\left(\frac{3}{16} - \frac{3}{32}\right) \\ &= \frac{5}{32} \end{aligned}$$

(4) Calculer $E(X)$. On a

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^4 x f(x)\,dx = \int_0^4 \frac{3}{32} x^2 (4-x)\,dx \\ &= 2. \end{aligned}$$