Chapitre 2

Equations différentielles

Dans ce chapitre, on désigne par I un intervalle de $\mathbb{R}$.

2.1 Généralités

Définition 2.1.1 *Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. On appelle équation différentielle d'ordre n toute équation du type $F\left(x, y, y^{'}, .., y^{(n)}\right) = 0$ avec F est une fonction de $(n+2)$ variables réelles, où l'inconnue de cette équation est la fonction $y : I \to \mathbb{R}$ qui est n fois dérivable et vérifie l'équation*

$$F\left(x, y, y^{'}, .., y^{(n)}\right) = 0.$$

Exemple 2.1.2 1) $y = \sin(x) + c$ *est une solution de l'équation* $y^{'} = \cos(x)$

2) $y = \lambda e^{-3x}$, *où* $\lambda \in \mathbb{R}$ *est une solution de l'équation* $y^{'} = -3y$.

En effet $y^{'} = -3y$ *d'où* $\left(\lambda e^{-3x}\right)^{'} = -3\lambda e^{-3x}$ *donc* $-3\lambda e^{-3x} = -3\lambda e^{-3x}$.

2.2 Equations différentielles du premier ordre

Une équation différentielle du premier ordre si elle sous la forme

$$F\left(x, y, y^{'}\right) = 0.$$

Par exemple $7xe^{x}-3y^{'}=y\sqrt{x}$ est une équation différentielle du premier ordre.

2.2.1 Equations différentielles à variables séparées

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues respectivement sur des intervalles I et J de $\mathbb{R}$. Une équation différentielle à variables séparées est une équation de la forme

$$f(y)\,y^{'}=g(x).$$

Méthode de résolution. Soient F et G deux primitives respectivement de f et g, on a

$$\begin{aligned} f(y)\,y^{'}=g(x) &\Leftrightarrow & f(y)\,\tfrac{dy}{dx}=g(x) \\ &\Leftrightarrow & \int f(y)\,dy=\int g(x)\,dx. \\ &\Leftrightarrow & F(y)=G(x)+c, \end{aligned}$$

où c est une constante réelle arbitraire.

Exemple 2.2.1 *Résoudre l'équation différentielles suivante* $y^{'}=y\sin(x)$.
Supposons que y *ne s'annulant pas, d'où* $\frac{y^{'}}{y}=\sin(x)$, *donc* $\int\frac{dy}{y}=\int\sin(x)\,dx$ *ainsi* $\ln|y|=-\cos(x)+c$ *où* $c\in\mathbb{R}$. *Alors* $y=\lambda e^{-\cos(x)}$, *où* $\lambda\in\mathbb{R}$.

2.2.2 Equations differentielles homogènes

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I de $\mathbb{R}$. On appelle équation différentielle homogène toute équation de la forme

$$y^{'}=f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.1}$$

Une telle équation se résout par un changement d'inconnue $y=tx$, par suit $y^{'}=t^{'}x+t$, on remlace y et $y^{'}$ dans (2.1), on obtient $t^{'}x+t=f(t)$ d'où $t^{'}x+t=f(t)$ ce qui implique $t^{'}=\frac{f(t)-t}{x}$ donc $\frac{t^{'}}{f(t)-t}=\frac{1}{x}$. D'où l'équation (2.1) devient est une équation différentielle à variables séparées comme suite

$$\frac{dt}{f(t)-t}=\frac{dx}{x}. \tag{2.2}$$

On en déduit les solutions de l'équation (2.2) sont donnée par :

$$\int\frac{dt}{f(t)-t}=\ln(x)+c,$$

où c est une constante arbitraire. Alors les solutions de l'équation (2.1) définie par les relations suivantes $y=tx$ et $x=\lambda e^{\int\frac{dt}{f(t)-t}}$.

Exemple 2.2.2 *Intégrer l'équation suivante*

$$xy^{'}=y-x. \tag{2.3}$$

Pour $x\neq 0$, *l'équation* (2.3) *se réécrit* $\acute{y}=\frac{y}{x}-1=f\left(\frac{y}{x}\right)$. *posons le changement de variable* $y=tx$ *d'où* $y^{'}=t^{'}x+t$ *par suite* $t^{'}x+t=t-1$ *ainsi* $t^{'}x=-1$ *donc*

$$\int dt=-\int\frac{dx}{x}\Rightarrow t=\ln\frac{1}{|x|}+c=\ln\frac{1}{|x|}+\ln(\lambda),$$

ou encore $t=\ln\left(\frac{\lambda}{|x|}\right)$, *mais* $y=tx$, *ainsi on conclut*

$$y=x\ln\left(\frac{\lambda}{|x|}\right),\lambda\in\mathbb{R}_{+}^{*}.$$

2.3 Equations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 2.3.1 *Soient* $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ *et* $g:I\longrightarrow\mathbb{R}$ *deux fonctions définies et continues sur un intervalle ouvert* I *de* $\mathbb{R}$. *Une équation différentielle linéaire* ***(EDL)*** *du premier ordre est une équation du type*

$$y^{'}+f(x)y=g(x) \tag{2.4}$$

L'équation homogène associée de (2.4) *est*

$$y^{'}+f(x)y=0 \tag{2.5}$$

On dit qu'aussi de (2.5) l'équation sans second membre (SSM).

Méthode pour résoudre l'équation (2.4). On suit les deux étapes suivantes

1^{ere}**étape** : On commence par intégrer de l'équation homogène associée (SSM).

On remarque que $y = 0$ est une solution de (2.5).

Si $y \neq 0$. l'équation (2.5) est une équation à variables séparaées, donc

$$\begin{aligned} y' + f(x)y = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad y' = -f(x)y \\ &\Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int f(x)\,dx \\ &\Leftrightarrow \quad \ln y = -\int f(x)\,dx + \ln\lambda \\ &\Leftrightarrow \quad y = \lambda e^{-\int f(x)dx}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Alors la solution générale de l'équation (2.5) est donné par

$$y_h = \lambda e^{-\int f(x)dx},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

$2^{éme}$**étape : avec second membre**, ici on trouve deux méthodes

Première méthode : Recherche d'une solution particulière notée y_p alors la solution générale de l'équation (2.4) est $y = y_h + y_p$.

Deuxième méthode : Méthode de variation de la constante, on trouvra une nouvelle équation differentielle de la forme $\lambda' = c(x)$ (i.e., λ une fonction inconnue de x).

Exemple 2.3.2 *Résoudre l'équation différentielles suivante*

$$y' + 2y = x^2. \tag{2.6}$$

Si on pose $y' + 2y = 0$, *alors* $y' = -2y$ *par suite* $\int \frac{dy}{y} = -2\int dx$ *d'où* $\ln y = -2x + \ln\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *donc* $y_h = \lambda e^{-2x}, \lambda \in \mathbb{R}$. y_h *est la solution de l'équation homogène associée.*

On utilise la méthode recherchée d'une solution particulière y_p. *Le second membre étant polynomiale de degré* 2 *d'où* $y_p = ax^2 + bx + c$ *ainsi* $y_p' = 2ax + b$, *on remplace* y_p' *et* y_p *dans* (2.6), *on obtient*

$$(2ax + b) + 2\left(ax^2 + bx + c\right) = x^2,$$

donc

$$2ax^2 + (2a + 2b) + b + 2c = x^2$$

par identification on aura $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{4}$. *Alors*

$$y_p = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

donc la solution générale de (2.6) *est* $y = y_h + y_p$, *on en déduit*

$$y = \lambda e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque 2.3.3 *On utilise la méthode de variation de la constante. On a* $y = \lambda e^{-2x}$ *par suite* $y' = \lambda' e^{-2x} - 2\lambda e^{-2x}$, *on remplace* y' *et* y *dans* (2.6), *on obtient*

$$\lambda' e^{-2x} = x^2 \Rightarrow \lambda(x) = \int x^2 e^{2x} dx,$$

par intégration par parties, on aura $\lambda(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) e^{2x} + c$, *la solution générale de l'équation* (2.6)*est*

$$\begin{aligned} y &= e^{-2x}\left[\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) e^{2x} + c\right] \\ &= ce^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

où $c \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.3.4 (de Cauchy-Lipschitz) *Pour* $x_0 \in I$ *et* $y_0 \in \mathbb{R}$. *Alors l'équation* (2.6) *admet une unique solution de la classe* C^1*sur* I *telle que* $y(x_0) = y_0$.

Exercice 2.3.5 *On considère l'équation différentielle suivante :*

$$y' + y = \cos(x) + \sin(x) \tag{2.7}$$

1) *Résoudre l'équation différentielle* (2.7).

2) *Trouver la solution vérifiant* $y(0) = 1$.

Solution 2.3.6 1) *On a*

$$\begin{aligned} y^{'}+y=0 &\Leftrightarrow & \tfrac{dy}{dx}=-y \\ &\Leftrightarrow & \int\tfrac{dy}{y}=-dx \\ &\Leftrightarrow & \ln y=-x+e^{c} \\ &\Leftrightarrow & y=\lambda e^{-x}, \text{ où } \lambda=e^{c}. \end{aligned}$$

Ainsi que $y^{'}=\lambda^{'}e^{-x}-\lambda e^{-x}$ *on remplace* $y^{'}$ *et* y *dans* (2.7) *on obtient* $\lambda^{'}e^{-x}-\lambda e^{-x}+\lambda e^{-x}=\cos(x)+\sin(x)$ *par suite* $\lambda^{'}=(\cos(x)+\sin(x))\,e^{x}$ *d'où*

$$\begin{aligned} \lambda &= \int(\cos(x)+\sin(x))\,e^{x}dx \\ &= \int\cos(x)\,e^{x}dx+\int\sin(x)\,e^{x}dx \\ &= I+J, \end{aligned}$$

où $I=\int\cos(x)\,e^{x}dx$ *et* $J=\int\sin(x)\,e^{x}dx$. *Pour calculer* I, *on utilise intégration par parties. En posant* $u=e^{x}$ *et* $v^{'}=\cos(x)$ *donc* $I=\sin(x)\,e^{x}-J+c$, *on trouve*

$$I+J=\sin(x)\,e^{x}+c,$$

ainsi

$$y=(\sin(x)\,e^{x}+c)\,e^{-x}=\sin(x)+ce^{-x}.$$

Donc la solution générale de (2.7) *sur* $\mathbb{R}$ *est*

$$y=\sin(x)+ce^{-x},$$

avec $c\in\mathbb{R}$.

2) *puisque* $y(0)=1$ *alors, on en déduit* $c=1$.

Par conséquent la solution particulière de (2.7) *est*

$$y=\sin(x)+e^{-x}.$$

2.3.1 Equations différentielles de Bernoulli

Définition 2.3.7 *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies et continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et α une constante réelle différente de 0 et 1.*
On appelle équation différentielle de Bernoulli toute équation de la forme

$$y' + f(x)\,y = y^{\alpha} g(x) \tag{2.8}$$

Remarque 2.3.8 1) *Si $y = 0$, la solution de* (2.8) *est évidente.*
2) *Si $\alpha = 1$, l'équation* (2.8) *est une (EDL) du 1^{er} ordre homogène.*
3) *Si $\alpha = 0$, l'équation* (2.8) *est une (EDL) du 1^{er} ordre avec second membre.*

Méthode de résolution de l'équation de Bernoulli

Si $y \neq 0, \alpha \neq 1$ et $\alpha \neq 0$, on divise les deux membre de l'équation (2.8) par y^{α} on aura

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + f(x)\,\frac{1}{y^{\alpha-1}} = g(x)\,. \tag{2.9}$$

On pose

$$z = \frac{1}{y^{\alpha-1}} = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha)\,y^{-\alpha}y',$$

ou encore $y' = \frac{1}{1-\alpha}y^{\alpha}z'$. d'où, l'équation (2.9) équivaut à

$$\frac{\frac{1}{\alpha-1}y^{\alpha}z'}{y^{\alpha}} + f(x)\,z = g(x)\,.$$

Alors

$$z' + (1-\alpha)\,f(x)\,z = (1-\alpha)\,g(x)\,.$$

On en déduit la résolution de l'équation différentielle de Bernoulli par

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Exemple 2.3.9 *Intégrer l'équation suivante :*

$$3y'\cos(x) - y\sin(x) = y^{4}. \tag{2.10}$$

Supposons que y ne s'annulant pas d'où l'équation (2.10) *devient est une équation*

$$\frac{3y^{'}\cos(x)}{y^4} - \frac{1}{y^3}\sin(x) = 1,$$

posons $z = \frac{1}{y^3}$ *d'où* $z^{'} = -3y^{'}y^{-4}$ *donc*

$$z^{'}\cos(x) + z\sin(x) = -1 \tag{2.11}$$

est une ***(EDL)*** *du* 1^{er} *ordre.*

$$\begin{aligned} z^{'}\cos(x) + z\sin(x) = 0 &\Leftrightarrow \quad z^{'} = (-\tan(x))\, z \\ &\Leftrightarrow \quad \textstyle\int \frac{dz}{z} = \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}dx \\ &\Leftrightarrow \quad \ln z = \ln(\cos(x)) + \ln(\lambda) \\ &\Leftrightarrow \quad z = \lambda\cos(x), \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On utilise la méthode de variation de la constante. On a $z = \lambda\cos(x)$ *par suite,* $z^{'} = \lambda^{'}\cos(x) - \lambda\sin(x)$ *on remplace* $z^{'}$ *et* z *dans* (2.11), *on obtient*

$$\left(\lambda^{'}\cos(x) - \lambda\sin(x)\right)\cos(x) + \lambda\cos(x)\sin(x) = -1,$$

d'où $\lambda^{'}\cos^2(x) = -1$ *donc*

$$\lambda(x) = \int \frac{-1}{\cos^2(x)}dx = -\tan(x) + c,$$

par conséquent la solution générale de l'équation (2.11) *est*

$$y = \cos(x)\left(-\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + c\right) = -\sin(x) + c\cos(x).$$

Puisque $z = \frac{1}{y^3}$ *d'où* $y = \frac{1}{\sqrt[3]{z}}$ *alors la solution générale de l'équation* (2.10) *est*

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{-\sin(x) + c\cos(x)}}, c \in \mathbb{R}.$$

2.4 Equations différentielles du second ordre

Définition 2.4.1 *On appelle équation différentielle du seconde ordre toute relation de la forme* $F\left(x, y, y^{'}, y^{''}\right) = 0$ *entre la variable* x, *la fonction inconnue* y, *et ses deux dérivées premiéres.*

Exemple 2.4.2 $y^{''} + 4y = 0$ *est une équations differentielles du* $2^{éme}$ *ordre. La solution de cette équation sous la forme*

$$y(x) = \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x),$$

où λ *et* μ *sont des constantes réelles.*

2.4.1 Equations differentielles ne contenant pas de y

Soit l'équations differentielles de la forme $F\left(x, y^{'}, y^{''}\right) = 0$, Posons le changement de variable $y^{'} = z$, d'où

$$F\left(x, y^{'}, y^{''}\right) = 0 \Leftrightarrow F(x, z, \acute{z}) = 0.$$

Exemple 2.4.3 $xy^{''} + 2y^{'} = 0$

Si on pose $z = y^{'} \Rightarrow z^{'} = y^{''}$, *d'où* $xz^{'} + 2z = 0$, *est une équations differentielle linéaire du* 1^{er} *ordre (SSM), on aura*

$$\int \frac{dz}{z} d = -2 \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln z = \ln \frac{1}{x^2} + \ln \lambda,$$

ce qui donne $z = \frac{\lambda}{x^2}$, *par suite* $y^{'} = \frac{\lambda}{x^2}$ *on conclut* $y = \frac{-\lambda}{x} + c$, *où* λ, c *étant des constantes.*

2.4.2 Equations différentielles linéaires du seconde ordre à coefficients constants

Soit g une fonction continue sur un intervalle ouvert I. Une équation différentielle linéaire du seconde ordre à coefficients constants est une équations de la forme

$$ay^{''} + by^{'} + cy = g(x). \tag{2.12}$$

Où a, b et c sont des constantes réelles avec $a \neq 0$.
L'équation homogène associée de (2.12) est

$$ay^{''} + by^{'} + cy = 0. \tag{2.13}$$

On dira aussi que (2.13) est une équation sans second membre (SSM).

2.4.3 Résolutions d'équation sans second membre (SSM)

Cherchons des solutions d'équation (SSM) (2.13) sous la forme $y = e^{rx}$ où $r \in \mathbb{C}$ devient $y^{'} = re^{rx}$ et $y^{''} = re^{rx}$. Alors $ay^{''} + by^{'} + cy = 0$ entraîne que

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{2.14}$$

L'équation (2.14) est appelé équation caractéristique associée à (2.13), ses racines r_1, r_2 sont appellée les valeurs caractéristique. On distingue trois cas selon le signe de Discriminant $\triangle = b^2 - 4ac$.

1. Si $\triangle > 0$, l'équation caractéristique (2.14) admet deux racines réelles distinctes r_1, r_2, et les solutions générales de l'équation homogène (2.13) sont :

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \text{ où } c_1, c_2 \text{ deux constantes réelles.}$$

2. Si $\triangle = 0$, l'équation caractéristique (2.14) admet une racine double $r_1 = r_2 = r$, et les solutions générale de l'équation homogène (2.13) sont :

$$y = (c_1 x + c_2)\, e^{rx} \text{ où } c_1, c_2 \text{ deux constantes réelles.}$$

3. Si $\triangle < 0$, l'équation caractéristique (2.14) admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + \beta i$, $r_2 = \alpha - \beta i$, et la solution générale de l'équation homogène (2.13) sont :

$$y = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)\right) \text{ où } c_1, c_2 \text{ deux constantes réelles.}$$

Exemple 2.4.4 1) $2y^{''}+y^{'}-3y=0$. *L'équation caractéristique associée est* $2r^2+r-3=0$ *admet deux racines réelles distinctes* $r_1=1$ *et* $r_2=\frac{-3}{2}$, *donc*

$$y=c_1e^x+c_2e^{\frac{-3}{2}x},$$

avec $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.
2) $y^{''}+2y^{'}+y=0$. *L'équation caractéristique associée est* $r^2+2r+1=0$ *possède une racine double* $r_1=r_2=-1$, *donc*

$$y=(c_1x+c_2)\,e^{-x},$$

avec $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.
3) $y^{''}+1=0$. *Son équation caractéristique associée est* $r^2+1=0$ *avec deux racines complexes conjuguées* $r_1=i$ *et* $r_2=-i$, *alors*

$$y=c_1\cos(x)+c_2\sin(x)\,,$$

où $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

2.4.4 Résolutions d'équation avec second membre

Proposition 2.4.5 *La solution générale de* (2.12) *est la somme de la solution générale de* (2.13) *et d'une solution particulière de* (2.12) *(i.e.,* $y=y_h+y_p$*).*

Théorème 2.4.6 (de Cauchy-Lipschitz) *Pour* $(y_0,y_1)\in\mathbb{R}^2$ *et* $x_0\in I$, *alors l'équation* (2.12) *admet une unique solution* y *sur* I *qui satisfait aux conditions initiales* $y(x_0)=y_0$ *et* $y^{'}(x_0)=y_1$.

Recherche d'une solution particulière y_p

On considère ici deux cas particuliers importants
1) **Second membre du type** $e^{\alpha x}P_n(x)$

Si $g(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et P_n est un polynôme de degré n, alors on cherche une solution particulière sous la forme $y_p = x^m e^{\alpha x} Q_n(x)$ où Q_n est un polynôme de même degré que P_n, on donne trois cas selon les racines de l'équation caractéristique

i- Si α n'est pas une racine de (2.14), alors il existe y_p de la forme $y_p = e^{\alpha x} Q_n(x)$.

ii- Si α est une racine simple de (2.14), alors il existe y_p de la forme $y_p = x e^{\alpha x} Q_n(x)$.

iii- Si α est une racine double de (2.14), alors il existe y_p de la forme $y_p = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x)$.

Exemple 2.4.7 *Résoudre l'équation suivante*

$$y'' + 2y' + y = e^x (x+1). \tag{2.15}$$

1^{ere} ***étape : (SSM)***

$$y'' + 2y' + y = 0. \tag{2.16}$$

L'équation caratéristique $r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = -1$ *est une racine double, les solution de l'équation* (2.16) *est*

$$y_h = (c_1 x + c_2) e^{-x}$$

$2^{éme}$ ***étape : avec second membre***

On a $g(x) = e^x (x+1)$ *est de type* $e^{\alpha x} P_n(x)$ *où* $\alpha = 1, n = 1$, *puisque* $\alpha = 1$ *n'est pas une racine de l'équation caractéristique, alors* $y_p = e^x (ax + b)$ *d'où* $y_p' = e^x (ax + a + b)$, $y_p'' = e^x (ax + 2a + b)$. *On remplace* y_p, y_p', y_p'' *dans* (2.15) *on obtient* $4ax + 4a + 4b = x + 1$, *par identification, on aura* $a = \frac{1}{4}$ *et* $b = 0$, *donc* $y_p = \frac{1}{4} x e^x$. *Alors*

$$y = y_h + y_p = (c_1 x + c_2) e^{-x} + \frac{1}{4} x e^x.$$

2) Second membre du type $e^{\alpha x} (P_1(x) \cos(\beta x) + P_2(x) \sin(\beta x))$

Si $g(x) = e^{\alpha x} (P_1(x) \cos(\beta x) + P_2(x) \sin(\beta x))$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et P_1, P_2 deux polynômes, on donne ici deux cas selon les racines de l'équation caractéristique

i- Si $\alpha + i\beta$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique, ont cherché y_p de la forme

$$y_p = e^{\alpha x} (Q_1(x) \cos(\beta x) + Q_2(x) \sin(\beta x)).$$

ii- Si $\alpha + \beta i$ est une racine de l'équation caractéristique, ont cherché y_p de la forme

$$y_p = xe^{\alpha x} \left(Q_1 (x) \cos (\beta x) + Q_2 (x) \sin (\beta x) \right).$$

Où Q_1, Q_2 sont deux polynômes de degré $m = \max \{\deg (P_1), \deg (P_2)\}$.

Principe de superpostion

Si le second membre g s'écrie sous la forme d'une somme de fonctions $g_1 (x) + g_2 (x)$. Alors l'équation $ay'' + by' + cy = g_1 (x) + g_2 (x)$ admet une solution particulière sous la forme $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ telle que y_{p_1} : est la solution particulier de l'équation $ay'' + by' + cy = g_1 (x)$. y_{p_2} : est la solution particulier de l'équation $ay'' + by' + cy = g_2 (x)$.

Exemple 2.4.8

$$y'' + 4y = \sin (x) + \cos (2x) \tag{2.17}$$

1^{ere} ***étape*** *:* $y'' + 4y = 0$,*l'équation caractéristique est* $r^2 + 4 = 0$ *ses racine ssont* $r_1 = 2i$ *et* $r_2 = -2i$, *les solution de l'équation* (2.17) *est*

$$y_h = c_1 \cos (2x) + c_2 \sin (2x),$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

$2^{éme}$ ***étape*** *: On a*

$$y'' + 4y = \sin (x). \tag{2.18}$$

Puisque $g_1 (x) = \sin (x)$ *est de type* $e^{\alpha x} \left(P_1 (x) \cos (\beta x) + P_2 (x) \sin (\beta x) \right)$ *avec* $\alpha = 0, \beta = 1$,*alors ont cherché* y_p *est de la forme*

$$y_{p_1} = a \cos (x) + b \sin (x),$$

$$y'_{p_1} = -a \sin (x) + b \cos (x),$$

$$y''_{p_1} = -a \cos (x) - b \sin (x),$$

on remplace y_{p_1} *et* y''_{p_1} *dans* (2.18), *on obtient*

$$3a\cos(x) + 3b\sin(x) = \sin(x),$$

par identification, on aura $a = 0$ *et* $b = \frac{1}{3}$ *c'est -à-dire* $y_{p_1} = \frac{1}{3}\sin(x)$

$$y'' + 4y = \cos(2x) \tag{2.19}$$

puisque $g_2(x) = \cos(2x)$ *est de type* $e^{\alpha x}(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x))$, *alors ont cherché*

$$y_{p_2} = x(a\cos(2x) + b\sin(2x))$$

$$y'_{p_2} = a\cos(2x) - 2a\sin(2x) + b\sin(2x) + 2bx\cos(2x),$$

$$y''_{p_2} = (-4ax + 4b)\cos(2x) - (4bx + 4a)\sin(2x),$$

on remplace y_{p_2} *et* y''_{p_2} *dans* (2.19) *on obtient*

$$4b\cos(2x) - 4a\sin(2x) = \cos(2x),$$

par identification, on aura $a = 0$ *et* $b = \frac{1}{4}$ *c'est -à-dire* $y_{p_2} = \frac{1}{4}x\sin(2x)$, *ainsi*

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}.$$

On en déduit les solutions de l'équation (2.17) *sont donnée par* $y = y_{p_1} + y_{p_2} + y_h$. *Alors*

$$y = \frac{1}{3}\sin(x) + \frac{1}{4}x\sin(2x) + c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x).$$

Méthode de variation des constantes

Si y_1, y_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène (2.13), on cherche une solution particulière de (2.12) sous la forme $y = c_1y_{1+}c_2y_2$ sachant que c_1 et c_2 sont deux fonctions qui vérifient

$$\begin{cases} c'_1y_{1+}c'_2y_2 = 0 \\ c'_1y'_{1+}c'_2y'_2 = \frac{g(x)}{a} \end{cases}$$

Exemple 2.4.9 *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$y^{''} + y^{'} - 2y = 2x^2 - 3x + 1. \tag{2.20}$$

(1) *Pour* $y^{''} + y^{'} - 2y = 0$, *l'équation caractéristique associée est* $r^2 + r - 2 = 0$ *d'où* $r_1 = 1$ *et* $r_2 = -2$ *donc les solutions de l'équation homogène sont*

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}.$$

(2) *On cherche une solution particulière de* (2.20) *sous la forme* $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$ *avec* c_1 *et* c_2 *sont deux fonctions qui vérifient*

$$\begin{cases} c_1^{'} e^x + c_2^{'} e^{-2x} = 0 \\ c_1^{'} e^x - 2c_2^{'} e^{-2x} = 2x^2 - 3x + 1 \end{cases}$$

En multipliant la première ligne par (-1) *et en somme deux lignes, on obtient*

$$-3c_2^{'} e^{-2x} = 2x^2 - 3x + 1,$$

par suite

$$c_2^{'} = -\frac{1}{3} e^{2x} \left(2x^2 - 3x + 1\right),$$

d'où

$$c_2 = \int -\frac{1}{3} e^{2x} \left(2x^2 - 3x+\right) dx,$$

on utilise intégration par parties deux fois on déduit

$$c_2 = -\frac{1}{6} e^{2x} \left(2x^2 - 5x + \frac{7}{2}\right) + \lambda.$$

En d'audre part en multipliant la première ligne par 2 *et en somme les deux lignes, on obtient*

$$c_1^{'} = \int \frac{1}{3} e^{-x} \left(2x^2 - 3x + 1\right) dx,$$

donc $c_1 = -\frac{1}{3} e^{-x} \left(2x^2 + x + 2\right) + \mu$, *par conséquent les solutions générales de l'équation* (2.20) *sont*

$$y = \lambda e^{-2x} + \mu e^x - x^2 + \frac{1}{2} x - \frac{5}{4},$$

où λ *et* μ *sont des constantes réelles.*