Chapitre 3

Matrices et déterminants

Dans ce chapitre $\mathbb{k}$ désigné un corps ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et m, n deux entiers naturels non nuls.

3.1 Les matrices

Définition 3.1.1 *Une matrice A à n lignes et m colonnes est un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbb{k}$. Les nombres du tableau sont appelés les coefficients de A. Le coefficient situé à la $i^{-éme}$ ligne et à la $j^{-éme}$ colonne est noté a_{ij}. L'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{k}$ est noté $M_{n,m}(\mathbb{k})$.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \text{ où } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}. \tag{3.1}$$

Exemple 3.1.2 $A = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{3} \\ \frac{-5}{2} & 5 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ *est une matrice de 3 lignes et 2 colonnes, $\frac{-5}{2}$ correspond au coefficient a_{21}.*

Matrices particulières

(i) Une matrice A dont tout les coefficients sont nuls est appelée matrice nulle

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

où simplement $A = 0$.

(ii) Si $n = m$ (même nombre de lignes que de colonnes), la matrice (3.1) est dite matrice carrée d'ordre n. On note $M_n(\mathbb{k})$ à la place de $M_{n,m}(\mathbb{k})$.

$(3i)$ Lorsque $n = 1$, la matrice (3.1) est dite matrice ligne ou vecteur ligne, on écrit

$$A = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} & \dots & a_{1m} \end{pmatrix}.$$

$(4i)$ Lorsque $m = 1$, la matrice (3.1) est dite matrice colonne ou vecteur colonne, on écrit

$$A = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}.$$

Définition 3.1.3 *Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{k})$, les nombres a_{11}, a_{22},.., a_{nn} forment la diagonale.*

Par exemple $A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ la diagonale de A est $\sqrt{5}, 1, \frac{3}{2}$.

Définition 3.1.4 (matrice diagonale) *Une matrice carré D est diagonale si tous ses* *les coefficients son nuls sauf ceux de la diagonale. On écrit*

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

.

Par exemple $D = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.

Remarque 3.1.5 *Si* $a_{11} = a_{22} = .. = a_{nn} = 1$, *on obtient la matrice* I_n *appelée la matrice identité.*

Par exemple

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.1.1 Opérations sur les matrices

Addition de matrices

Soient A et B deux matrices de $M_{n,m}(\mathbb{k})$. Leur somme $C = A + B$ est la matrice de $M_{n,m}(\mathbb{k})$ définie par $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Exemple 3.1.6 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, *donc* $A+B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
En d'autre part, si $B_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, *alors* $A + B_1$ *n'est pas définie.*

Produit par un scalaire

Définition 3.1.7 *Soient $A = (a_{ij})$ ume matrice de $M_{n,m}(\Bbbk)$ et $\lambda \in \Bbbk$.*
Le produit d'une matrice A par λ est la matrice (λa_{ij}) formée en multipliant chaque coefficient de A par λ. On la note λA.

Exemple 3.1.8 *Soient* $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\lambda = \frac{3}{2}$, *alors* $\frac{3}{2}A = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & -6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque 3.1.9 *La matrice $(-1)A$ est l'oppossée de A noté $-A$.*
La différence $A - B$ est définie par $A + (-B)$.

Exemple 3.1.10 $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, *on a*

$$\begin{aligned} A - B &= A + (-B) \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Définition 3.1.11 *Soient A, B deux matrices de $M_{n,m}(\Bbbk)$. On dit que $A = B$ si tous les coefficients de A sont égaux aux coefficients correspondants de B.*

Propriétés

Soient A, B, C trois matrices dans $M_{n,m}(\Bbbk)$ et λ, μ dans $\Bbbk$. Alors

$a)$ $A + B = B + A$, la somme est commutative.

$b)$ $A + (B + C) = (A + B) + C$, la somme est associative.

$c)$ $A + 0 = A$, la matrice nulle est l'élément neutre de l'addition.

$d)$ $A + (-A) = 0$

$e)$ $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$

$f)$ $\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$.

Multiplication de matrices

La multiplication de deux matrices A et B est défini si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Définition 3.1.12 *Soient $A = (a_{ij})$ une matrice de $M_{n,m}(\mathbb{k})$ et $B = (b_{ij})$ une matrice de $M_{m,p}(\mathbb{k})$. Alors le produit $C = AB$ est une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{k})$ dont les coefficients c_{ij} sont donnés par $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$, pour tous $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$.*

$$i.e., \; c_{ij} = a_{i1}b_{1kj} + a_{i2}b_{2j} + .. + a_{im}b_{mj}.$$

Exemple 3.1.13 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, *calculons le produit AB*

$$AB = \begin{pmatrix} 3\left(\frac{1}{2}\right) + 1(-1) & 1(0) + 1(5) \\ -2\left(\frac{1}{2}\right) + 0(-1) & -2(0) + 0(5) \\ 5\left(\frac{1}{2}\right) + 2(-1) & 5(0) + 2(5) \end{pmatrix}, \; AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 5 \\ -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 10 \end{pmatrix}.$$

Remarques importantes

1) Le produit matriciel n'est pas commutatif, en général.

Par exemple $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, on aura

$$AB = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit $AB \neq BA$.

2) $AB = 0$ n'implique pas (n'entraîne pas nécessairement) $A = 0$ ou $B = 0$.

Par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & -1 \end{pmatrix}$.

On remarque que $A \neq 0$ et $B \neq 0$ mais $AB = 0$.

3) Si $AB = AC$ n'implique pas $B = C$.

Par exemple

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&5\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&4\\-3&2\end{pmatrix}\text{ et }C=\begin{pmatrix}0&-3\\-3&2\end{pmatrix},$$

donc

$$AB=AC=\begin{pmatrix}-3&2\\-15&10\end{pmatrix}\text{ et }B\neq A.$$

Proposition 3.1.14 *Si A est une matrice de $M_n(\Bbbk)$, alors $I_nA=A$ et $AI_n=A$.*

Propriétés du multiplication de matrices

Soient A,B et C trois matrices. Alors

$i)$ $(AB)C=A(BC)$, la multiplication est associative.

$ii)$ $A(B+C)=AB+AC$ et $(B+C)A=BA+CA$, la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

$3i)$ $A.0=0$ et $0.A=0$.

$4i)$ Si $A\in M_n(\Bbbk)$, alors $A^p=\underbrace{A.A..A}_{p\text{ fois}}$, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$.

Définition 3.1.15 (matrices triangulaires) *Une matrice carée $A=(a_{ij})\in M_n(\Bbbk)$ est triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure) si $a_{ij}=0$ pour $i>j$ (resp. $a_{ij}=0$ pour $i<j$).*

Exemple 3.1.16 $A=\begin{pmatrix}3&-5&2\\0&4&1\\0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}$ *est une matrice triangulaire supérieure.*

$B=\begin{pmatrix}3&0&0\\\sqrt{5}&4&0\\1&\frac{7}{4}&-2\end{pmatrix}$ *est une matrice triangulaire inférieure.*

Définition 3.1.17 (matrice transposée) *Soient A ume matrice de $M_{n,m}(\mathbb{k})$. On appelle matrice transposée de A et on note A^t la matrice de $M_{n,m}(\mathbb{k})$ obtenue à partire de A en échangeant les lignes et les colonnes.*

Par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 4 & 1 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \ A^t = \begin{pmatrix} 3 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \\ -5 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Propriétés de matrice transposée

Soient A, B deux matrices dans $M_{n,m}(\mathbb{k})$. Alors

1) $(A^t)^t = A$

2) $(A+B)^t = A^t + {}^{\text{‘}}B^t$

3) $(AB)^t = B^t A^t$

4) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$ où $\lambda \in \mathbb{k}$.

Définition 3.1.18 *Soit $A \in M_n(\mathbb{k})$. On dit que A est une matrice symétrique si $A^t = A$.*

3.2 Déterminant d'une matrice

Dans ce paragraphe, On ne s'intéresse ici qu'aux matrices carrées.

Définition 3.2.1 *Soit $A \in M_n(\mathbb{k})$ une matrice carrée. Le déterminant de A noté* $\det(A)$ *est l'élément de $\mathbb{k}$ défini de la façon suivante :*

Si $n = 1$ alors $\det(A) = a_{11}$.

Si $n \geq 2$ alors

$$\det(A) = a_{k1}A_{k1} + .. + a_{ki}A_{ki} + .. + a_{1n}A_{kn}, \text{ où } A_{ki} = (-1)^{k+i}\Delta_{ki}.$$

Le terme A_{ki} est appelé cofacteur de a_{ki} et Δ_{ki} est de déterminant de la matrice de $M_{n-1}(\mathbb{k})$ obtenue par suppression dans $\det(A)$ *de la ligne k et la colonne i.*

Cas particuliers

1) Pour $n = 2$, on a $A = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{pmatrix}$, le déterminant de A est définie par

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{12}a_{22} - a_{22}a_{12}.$$

Par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ donc

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 1 \times (-5) - 3 \times 2 = -11.$$

2) Pour $n = 3$, on a

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de A est définie par

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

avec

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \; A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\det(A) = \begin{vmatrix} (+) & (-) & (+) \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix},$$

donc

$$\det(A) = 2\Delta_{11} - 3\Delta_{12} + (-1)\Delta_{13}$$

où

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0, \Delta_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4, \Delta_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

alors $\det(A) = 12$.

Inverse d'une matrice

Définition 3.2.2 (Matrice inversible) *Soit A une matrice de.$M_n(\Bbbk)$ On dit que A est inversible s'il existe une matrice carrée de $M_n(\Bbbk)$, note A^{-1} est appelée matrice invers de A telle que $A^{-1}A = I_n$ et $AA^{-1} = I_n$.*

Théorème 3.2.3 *Soit A une matrice de $M_n(\Bbbk)$, alors*
A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Proposition 3.2.4 *Si A est inversible, alors :*
1) *Son inverse A^{-1} est unique.*
2) *Son inverse A^{-1} est aussi inversible, de plus on a $(A^{-1})^{-1} = A$.*

Matrice inverse

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $M_n(\Bbbk)$. On désigne par A_{kj} le cofacteur du coefficient a_{kj} dans $\det(A)$. La comatrice de A est la matrice dont les coefficients son les cofacteurs A_{kj} et on note $com(A) = (A_{kj})$.

Si A est inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (com(A))^t.$$

Inverse d'un produit

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{k})$. Alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Exemple 3.2.5 *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est inversible, puis calculer la matrice inverse A^{-1}.

On a

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

D'où $\det(A) \neq 0$, *par conséquent A est inversible. Calculons maintenant A^{-1}.*

On a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (com(A))^t$$

avec

$$com\,(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \\ +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

on aura

$$(com\,(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.3 Matrice associée à une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur un même corps $\Bbbk$. On désigne par $\mathcal{B} = \{e_1, .., e_n\}$ une base de E et $\mathcal{B}' = \{f_1, .., f_m\}$ une base de F. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire de E dans F.

Définition 3.3.1 *On appelle matrice associée à l'application f par rapport aux bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ dont les colonnes représentent les vecteurs $f(e_1), .., f(e_n)$ exprimés dans la base $\mathcal{B}'$. On écrit*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_n) \end{array} \\ M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{array} \end{array}$$

Exemple 3.3.2 *Soit f une application linéaire définie par :*

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = (3x-4y, 4x-4y, -3x+2y) \end{array}$$

Soit $\mathcal{B} = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$
et $\mathcal{B}' = \{f_1 = (1,0,0), f_2 = (0,1,0), f_3 = (0,0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminera la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, on a

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f((1,0)) = (3,4,-3) = (3,0,0) + (0,4,0) + (0,0,-3) = 3f_1 + 4f_2 - 3f_3 \\ f(e_2) &= f((0,1)) = (3,4,-3) = (3,0,0) + (0,4,0) + (0,0,-3) = -4f_1 - 4f_2 + 2f_3 \end{aligned}$$

On en déduit

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Définition 3.3.3 (Rang de matrice) *Le rang d'une matrice $A \in M_{n,m}(\mathbb{k})$, noté $rg(A)$ est le rang de l'application linéaire f associée à une matrice A. On écrit $rg(A) = rg(f)$.*

3.4 Changement de base (matrice de passage)

Matrice de passage d'une base à une autre Soient $\mathcal{B} = \{e_1, .., e_n\}$, $\mathcal{B}' = \{f_1, .., f_n\}$ deux bases d'un même espace vectoriel E de dimension n.

Définition 3.4.1 *On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ et on note $P = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_E)$ et on écrit*

$$\begin{aligned} id_E(e_1) &= e_1 = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \cdots + a_{n1}f_n \\ id_E(e_2) &= e_2 = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \cdots + a_{n2}f_n \\ &\vdots \\ id_E(e_n) &= e_n = a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \cdots + a_{nn}f_n \end{aligned}$$

ce qui donne

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array}$$

Exemple 3.4.2 *Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Choisissons les vecteurs de la base $\mathcal{B}' = \left\{e_1^{'}, e_2^{'}, e_3^{'}\right\}$ définie par*

$$\begin{cases} e_1^{'} = e_1 + e_2 + 0e_3 \\ e_2^{'} = 0e_1 + e_2 + e_3 \\ e_3^{'} = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$est la matrice dans $M_3(\mathbb{k})$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice P^{-1} sera la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, obtenue en explicitant les vecteurs de base de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$

$$\begin{cases} e_1 = -e_2^{'} + e_3^{'} \\ e_2 = e_1^{'} + e_2^{'} - e_3^{'} \\ e_3 = -e_1^{'} + e_3^{'} \end{cases} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonalisation d'une matrice On dit que matrice carrée A est diagonable dans $\mathbb{R}$, s'il existe une matrice $D \in M_n(\mathbb{k})$ diagonale et un matrice P inversible telle que : $A = PDP^{-1}$. Ainsi que on a $D = P^{-1}AP$.

valeurs propres et vecteurs propres

Définition 3.4.3 *On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de la matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{k})$ s'il existe un vecteur Y non nul $(Y \neq 0)$ telle que $AY = \lambda Y$.*
Dans ce cas, on dite que Y est un vecteur propre de A.

Remarque 3.4.4 *Les valeur propres $(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$ sont des éléments de la diagonale de*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Définition 3.4.5 (Polynôme caractéristique) *On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme*

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = |A - \lambda I_n|.$$

Exercice 3.4.6 *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que A est inversible.*
2. *Calcules les valeurs propres et vecteurs propres de A.*
3. *La matrice A est-elle diagonalisable.*
4. *Donner la matrice diagonale D et matrice de passage P tels que $A = PDP^{-1}$.*

Solution 3.4.7 1. *Montrons que A est inversible*

$$\det(A) = -4\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} - (-6)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -10,$$

$\det(A) \neq 0,$ *ce qui donne A est inversible.*

2. *Calculont les valeurs propres*

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -6 & 0 \\ 3 & 5-\lambda & 0 \\ 3 & 6 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-4-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 \\ 6 & 5-\lambda \end{vmatrix} - (-6)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 5-\lambda \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\
&= -(4+\lambda)(5-\lambda)^2 + 6(3(5-\lambda)) \\
&= (5-\lambda)\left[-(4+\lambda)(5-\lambda) + 18\right] \\
P(\lambda) &= 0 \Rightarrow (5-\lambda) = 0 \ ou \ \left[-(4+\lambda)(5-\lambda)+18\right] = 0 \\
&\Rightarrow \lambda = 5 \ ou \ \lambda^2 - \lambda - 2 = 0.
\end{aligned}$$

Les valeurs propres $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1,$ *et* $\lambda_3 = 2,$ *sont des racines simples.*

Les vecteurs propres pour $\lambda_1 = -1$

$$\begin{aligned}
(A + I_3)Y &= 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \begin{pmatrix} -9 & -6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{cases} -3x - 6y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \\ 3x + 6y + 6z = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{\lambda=5} &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x,y,z) = (-2y, y, 0)\right\}, v_1 = (-2,1,0) \\
&= \{y(-2,1,0), y \in \mathbb{R}\} \\
&\Rightarrow \dim E_{\lambda=-1} = 1.
\end{aligned}$$

Les vecteurs propres pour $\lambda_2 = 2$

$$(A - 5I_3)\,Y = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6x - 6y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \\ 3x + 6y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E_{\lambda=5} &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z) = (x, -x, x)\right\}, v_2 = (1, -1, 1) \\ &= \{x\,(1, -1, 1)\,, x \in \mathbb{R}\} \\ &\Rightarrow \dim E_{\lambda=2} = 1. \end{aligned}$$

Les vecteurs propres pour $\lambda_3 = 5$

$$(A - 5I_3)\,Y = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -9x - 6y + = 0 \\ 3x = 0 \\ 3x + 6y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E_{\lambda=5} &= \{z\,(0, 0, 1)\,, z \in \mathbb{R}\} \\ &\Rightarrow \dim E_{\lambda=5} = 1 \end{aligned}$$

3. *Puisque les vecteurs propres sont racines simples, alors* A *est diagonalisable.*
4. *La matrice diagonale est*

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

et la matrice de passage de $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$*vers la base* $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ *est*

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$