Chapitre 1

Calculs différentiels

1.1 Notions sur la différentiabilité - dérivabilité

Soient E, F deux espaces de Banach et $\mathcal{O}$ un ouvert E

Définition 1.1 *: Soit $f\ : \mathcal{O} \subset E \longrightarrow F$ une application $a \in \mathcal{O}$ un point.*
On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire continue $L : E \longrightarrow F$, telle que, $\forall\ h \in E,\ a + h \in \mathcal{O}$

$$f\,(a+h) = f\,(a) + L\,(h) + \|h\|\,\varepsilon(h)$$

et

$$lim_{\|h\|\to 0}\|\varepsilon(h)\| = 0$$

Proposition 1.1 *: L'application L est unique.*

Définition 1.2 *: L'application linéaire unique L est appelée la différentielle de f au point a ou l'application tangente de f en a, et on noté par : $df_{\,a},\ T_af$ ou $f^{'}(a)$*

Remarque 1.1 *: Si E et F sont de dimensions finies (par exemple $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q, \ldots etc$) toute application linéaire $L\ : E \to F$ est continue .*

Exemple 1.1 *: Soit l'application*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \end{array}$$

$$\forall a \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2\ : df_{\,a}\ = L,\ a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2, h \in \mathrm{E} \qquad h = (h_1, h_2)$$

$$\begin{aligned} f\,(a+h) - f\,(a) &= f\,(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f\,(a_1, a_2) \\ &= (a_1 + h_1)^2 + (a_2 + h_2)^2 - 1 - \left({a_1}^2 + {a_2}^2 - 1\right) \\ &= 2a_1h_1 + 2a_2h_2 + {h_1}^2 + {h_2}^2 \\ &= L\,(h) + \|h\|\,\varepsilon(h) \end{aligned} \tag{1.1}$$

avec $\varepsilon\,(h) = (\frac{{h_1}^2 + {h_2}^2}{\|h\|}),\ df_{\,a} = f^{'}\,(a) = L,$ donc

$$\begin{array}{rcl} L : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \binom{h_1}{h_2} & \longmapsto & 2a_1h_1 + 2a_2h_2 = (2a_1 \quad 2a_1)\binom{h_1}{h_2} \end{array}$$

Remarque 1.2

1. *(f est différentiable au point a) $\Longrightarrow$ (f est continue en a)*
2. *$f\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ si $n = p = 1$*
   f est différentiable au point $a \Longleftrightarrow f$ est dérivable en a.
   Et $df_{\,a}(h) = f^{'}(a)h = f^{'}(a).1$
3. *La définition précédente reste valable pour les espaces de Banach quelconque mais il faut ajouter la continuité de l'application df_a*

Proposition 1.2 *: (la composée)*
Soient $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et W un ouvert de $\mathbb{R}^p$.
Si $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable sur $\mathcal{O}$ et $g: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est différentiable sur W, telle que $f(\mathcal{O}) \subset W$. Alors $g \circ f$ est différentiable sur $\mathcal{O}$ et on a, pour tout $a \in \mathcal{O}$

$$d(g \circ f)_a = (dg)_{f(a)} \circ df_a$$

$$\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p \xrightarrow{g} \mathbb{R}^q$$

Définition 1.3 *On dit que f est différentiable sur $\mathcal{O}$, si f est différentiable en tout point de $\mathcal{O}$.*

1.2 Dérivées partielles du premier ordre et gradient

La dérivée partielle d'une fonction est la dérivée par rapport l'une de ses variables les autres étant constantes, la dérivée partielle par rapport la variable x est notée $\frac{\partial f}{\partial x}$ *ou* $\partial_x f$

$$f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$(x_1 \ldots\ldots x_n) \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1 \ldots\ldots x_n) \\ . \\ . \\ f_p(x_1 \ldots\ldots x_n) \end{pmatrix}$$

La dérivée première en $a \in \mathbb{R}^n$ par rapport à x_j si la limite suivante existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1\ , a_2, \ldots x_j + h, \ldots a_n) - f(a_1, a_2, \ldots\ldots a_n)}{h}$$

On note de cette limite par $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Le gradient de f en $(x_0, y_x 0)$ noté ∇f ou encore $gradf(x_0, y_0)$ est le vecteur dont les composantes sont les dérivées parteilles premières.

Définition 1.4 *:(fonction de classe $\mathcal{C}^{\mathbf{k}}$)*
$f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe C^1si elle admet des dérivées partielles premières par rapport toutes les variables en chaque point $a \in \mathcal{O}$ et sont continues $a \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(a),\ j = \overline{1, n}$ sont continues.
De même $f$est de classe C^2 ssi f admet des dérivées partielles par rapport toute les variables et si les applications $a \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(a),\ j = \overline{1, n}$ sont toutes de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathcal{O}$

Remarque 1.3 *:*
Une fonction est dite de classe $C^0 = C$ si elle est continue, est dite de classe $C^k(k \geq 1$ un entier $)$ si ses dérivées partielles j'usqua l'ordre k existant et sont continues et dite de C^∞ (infiniment différentiable) si elle est de classe C^k pour tout $k : k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Conclusion : $f \in C^1 \Longrightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \in C^0$.

1.3 Matrice Jacobienne

$$f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$(x_1 \ldots\ldots x_n) \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1 \ldots\ldots x_n) \\ . \\ . \\ f_p(x_1 \ldots\ldots x_n) \end{pmatrix}$$

Les dérivées partielles de ces fonctions en point a si elles existent peuvent être rangées dans une matrice $df_a = f'(a) = J_f(a) = Jf_a$, telle que

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots\cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ . \\ . \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} \cdots\cdots \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Remarque 1.4 *:*

1. *La matrice Jacobienne est la matrice des dérivées partielles du premier ordre d'une fonction différentiable.*
2. *La matrice Jacobienne de f au point a, c'est la matrice d'application linéaire df_a dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.*
3. *Si $n = p$, la matrice Jacobienne est une matrice carrée, alors le déterminant $\det(Jf_a)$ est appelé déterminant Jacobien ou Jacobien.*

Exemple 1.2 *:*

1. *Soit f, telle que*

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x_1 x_2, x_3) & \longmapsto & (x_1, 5x_3, 4{x_2}^2 - 2x_3, x_3 \sin x_1 \ ) \end{array}$$

2. *Soit g, telle que*

$$\begin{array}{ccc} g : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) & \longmapsto & (r\cos\theta \ , r \ \sin\theta \ ) \end{array}$$

Question : déterminer $Jf_{(x_1,x_2,x_3)}$, $\det(J_{g(r,\theta)})$

$$J_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 8x_2 & -2 \\ x_3 \cos x_1 & 0 & \sin x_1 \end{pmatrix}$$

$$J_g = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r \ \sin\theta \\ \sin\theta & -r \ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Alors $\det(J_g) = r\cos^2 x + r\sin^2 x = r$

Corollaire 1.1 *: La composée $g \circ f$ des fonctions différentielles sa matrice Jacobienne est :*

$$J(g \circ f)_a = J(g)_{f(a)} . Jf_a$$

i.e.,

$$J_{(g\circ f)(a)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(f_1(a)) \cdots\cdots \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(f_1(a)) \\ . \\ . \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1}(f_p(a)) \cdots\cdots \frac{\partial g_p}{\partial x_n}(f_p(a)) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots\cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ . \\ . \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} \cdots\cdots \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Définition 1.5 *:(dérivée directionnelle- au sen Gâteaux) Soit f une application d'un ouvert U de E à valeurs dans F, v un élément de E et $a \in U$. On dit que f admet une dérivée en a suivant le vecteur v si la limite suivante existe*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

On dit que f est Gâteaux différentiable en a, si les dérivées directionnelles $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ sont définies pour tout $v \in E$ et si de plus l'application $v \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(a)$ est linéaire.

Proposition 1.3 *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en a. Alors on la formule*

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$$

Définition 1.6 *: (dérivée au sen Fréchet) Soit E, F deux espaces normé.*
Soit f une application de E à valeurs dans F. On dit que f est dérivable au sen de fréchet en un point $a \in E$, s'il existe une application linéaire continue $L : E \to F$ vérifiant $f(x + h) - f(x) = L.h + \epsilon(x, h)$ tel que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|\epsilon(x, h)\|}{\|h\|} = 0 \ lorsque \ \|h\| \to 0.$$

Remarque 1.5
1- Si une fonction f est différentiable au sen de Fréchet alors elle est dérivable au sens Gâteaux suivant toute direction.
2- La réciproque n'est pas cependant pas vraie.

Définition 1.7 *: Soient E, F deux espaces de Banach, $\mathcal{O}$ un ouvert de E et V un ouvert de F. Une application $f : \mathcal{O} \longrightarrow V$ est dite difféomorphisme si :*

1. *f est bijective.*
2. *f est différentiable sur $\mathcal{O}$.*
3. *$f^{-1} : V \to \mathcal{O}$ est différentiable sur V.*

Définition 1.8 *: Une application $f : \mathcal{O} \longrightarrow V$ est dite C^k-difféomorphisme si :*

1. *f est bijective.*
2. *f est C^k-différentiable.*
3. *$f^{-1} : V \to \mathcal{O}$ est C^k-différentiable.*

Si k=0 l'application f est appelée homéomorphisme.

1. *f est bijective.*
2. *f est continue.*
3. *f^{-1} est continue.*

Notation :$\mathrm{Isom}(E, F) = \{\ f : E \to F$ linéaire +bijective$\}$

Remarques 1.1

1. *Toute application C^k-difféomorphisme est homéomorphisme, la réciproque est fausse.*
2. *Un homéomorphisme conserve les propriétés topologiques (ouvert,fermé, compact, convexe,...etc).*
3. *Un difféomorphisme conserve les propriétés topologiques et géométriques.*

1.4 Théorème d'inversion locale-globale

Définition 1.9 *: Soient E, F deux espaces vectoriels et $\varphi : E \longrightarrow F$ une application linéaire.*
Le rang de l'application φ noté : rang φ ou $rg\varphi$ est $r = \dim(Im\varphi)$, On a :

1. *$r \leq \dim(E)$, $r \leq \dim(F)$.*
2. *$r = \dim(E) \Longleftrightarrow \varphi$ est injective.*
3. *$r = \dim(F) \Longleftrightarrow \varphi$ est surjective.*

Définition 1.10

1. *Soit $\varphi : \mathcal{O} \subset E \longrightarrow F$ de classe C^k et $x \in \mathcal{O}$ on dit que φ est une immersion en x, si $d\varphi_x$ est injective.*
2. *On dit que φ est une submersion en x, si $d\varphi_x$ est surjective.*
3. *Si $\varphi : \mathcal{O} \longrightarrow F$ est à la fois submersion en x et immersion en x, on dit que φ est étale.*

Définition 1.11 *:Une application f de classe C^k $(k \geq 1)$ de $\mathcal{O}$ dans V est dite étale en x, si*

$$df_x \in Isom(E, F)$$

Proposition 1.4 *:Soit $\varphi : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe C^k, alors :*

1. *φ immersion sur $\mathcal{O} \Longleftrightarrow$ rang $d\varphi_x = n$, $\forall\ x \in \mathcal{O}$.*
2. *φ submersion sur $\mathcal{O} \Longleftrightarrow$ rang $d\varphi_x = p$, $\forall\ x \in \mathcal{O}$.*

Remarque 1.6 *:*

1. *φ est C^k-difféomorphisme $\Longrightarrow$ φ est étale*
2. *φ est étale $\Longrightarrow$ φ est C^k-difféomorphisme (locale)*
3. *φ étale +bijective $\Longrightarrow$ φ est C^k-difféomorphisme (globale)*

Exemple 1.3 *:*

$$f : \mathbb{R}^*\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(r,\theta) \longmapsto (r\ \cos\theta\ ,r\ \sin\theta)$$

f est étale ?

$$df_{(r,\theta)} = Jf_{(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\left|Jf_{(r,\theta)}\right| = r \neq 0$$

$df_{(r,\theta)}$ linéaire + bijective,i.e., $df_{(r,\theta)} \in Isom(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$,donc f est étale.
f est difféomorphisme ?
$f\,(r,\theta) = f\,(r,\theta+2\pi) \quad \Longrightarrow f$ n'est pas injective $(\theta \neq\ \theta+2\pi)$
$\Longrightarrow f$ n'est pas un difféomorphisme global.

Théorème 1.1 *:(d'inversion locale)*
Soient U, W deux ouverts de E et F (resp) et soit $f \in C^k(U,W)$ une application étale en $x \in U$, alors il existe un ouvert V de U contenant x tel que $f|_V :\ V \longrightarrow f(V) \subset F$ soit un C^k-difféomorphisme de V dans $f(V)$. De plus en notant f^{-1} le difféomorphisme réciproque, on a

$$\forall y \in fV,\ df^{-1}(y) = [df(f^{-1}(y))]^{-1}.$$

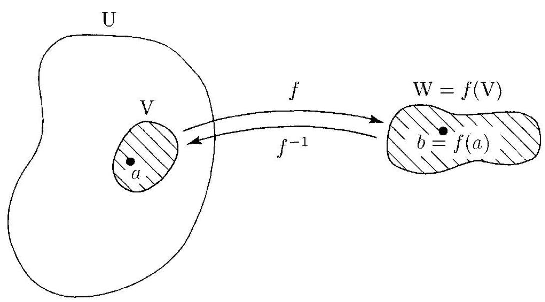

FIGURE 1.1 – inversion locale

Théorème 1.2 *:(d'inversion globale)*
Soient U un ouvert de E et φ une application de U dans E. On suppose que

1. *φ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.*
2. *φ est bijective de U sur $\varphi(U)$.*
3. *Pour tout $x \in U$, $d\varphi_x$ est inversible.*
   Alors $\varphi(U)$ est un ouvert et φ est un C^k-difféomorphisme de U sur $\varphi(U)$.

Corollaire 1.2 *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k telle que f' ne s'annule pas sur I. Alors $f(I)$ est un intervalle ouvert et f est un C^k-difféomorphisme de I sur $f(I)$.*

1.5 Les fonctions implicites

Théorème 1.3 *: (de Fonctions implicites)*
Soit f une application de classe C^1 sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ a valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et (a,b) un point de U tel que :

1. *$f(a,b) = 0$.*
2. *$J_f^y(a,b)$ est inversible.*

Alors il existe un ouvert V de$\mathbb{R}^n$, un ouvert W de $\mathbb{R}^p$ et une application g de classe C^1 définie sur V à valeur dans W tq :

1. *$(a,b) \in V \times W \subset U$*
2. *Pour tout couple $(x,y) \in V \times W$ on a $f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow y = g(x)$*
3. *Pour tout couple $(x,y) \in V \times W$ la matrice $J_f^y(x,y)$ est inversible et la matrice Jacobienne de g est donnée par*

$$J_g\,(u) = -\left[J_f^y\,(u,g\,(u))\right]^{-1}.[J_f^x\,(u,g\,(u))].$$

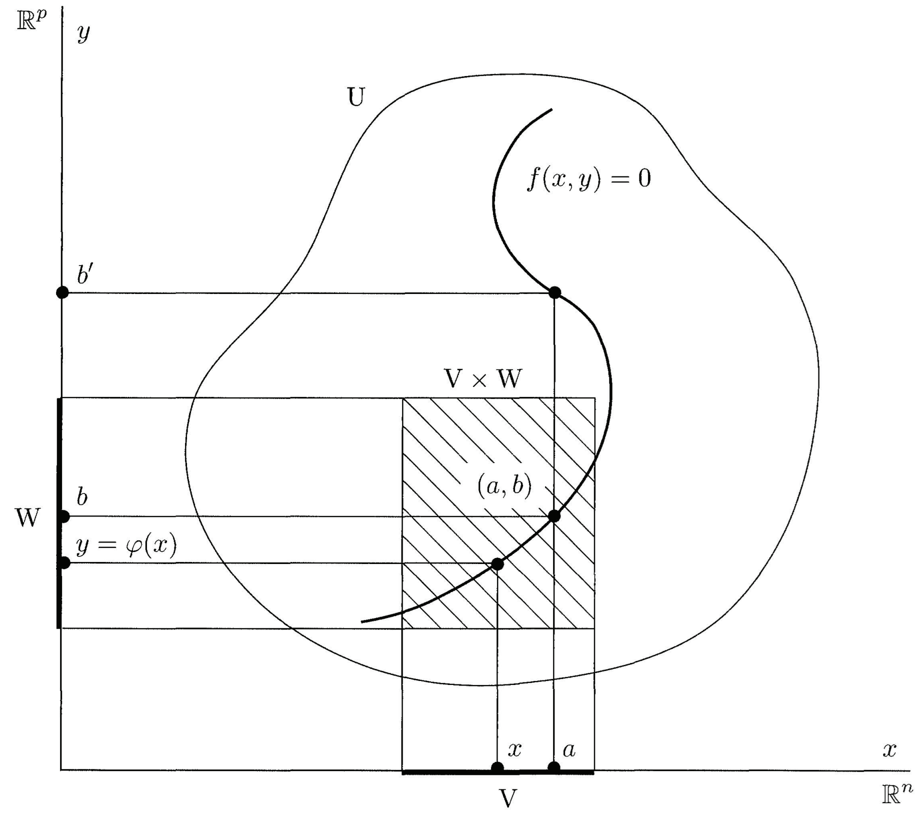

FIGURE 1.2 – fonctions implicites

Exemple 1.4 *:*

$$\begin{array}{ccc} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+y^2-1 \end{array}$$

On veut résoudre l'équation $f\,(a,b)=0$ pour une valeur voisin de a, c'est–dire si l'on peut trouver une fonction g définie au voisinage de a pour x voisin de a $\;f\,(x,g\,(x))=0$

$$\exists g=?,\ f\,(a,b)=0$$

$$(x,y)\in V\times W\quad f\,(x,y)=0\Longleftrightarrow y=g(x)$$

$$V=g\,(x)=\sqrt{1-x^2}$$

1.6 Série d'exercices pour chapitre I

<u>**Exercice** 01</u>
1- Soient $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ et $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ définies par :

$$f(x,y)=(e^{2x+y},3y-cosx,x^2+y+2)\ et\ g(x,y,z)=(3x+2y+z^2,x^2-z+1).$$

Si $F=f\circ g\ et\ G=g\circ f$, déterminer $d_{(0,0,0)}F\ et\ d_{(0,0)}G$.
2- Soient $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ différentiables et soit F définie par :

$$F(x,y)=f(x,y,g(x,y)).$$

a- Déterminer $d_{(x_0,y_0)}F$ en fonction des dérivées partielles de f et g.
b- Si $F(x,y)=0$ pour tout $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, déterminer $\partial_x g\ et\ \partial_y g$ en fonction des dérivées partielles de f.
<u>**Exercice** 02</u>
Soient les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y)=\ln(x^2+y^2+1)$$

$$g(x,y)=\begin{cases} yx^2\sin(\frac{1}{x}) & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$$

1- Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2- La fonction g est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$
(considérer la suite $u_n = \left(\frac{1}{2\pi n}, y_0\right),\ avec\ y_0 \neq 0,\ n \leq 1$).

Exercice 03

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

et l'application

$$\begin{array}{rcl} F:\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \mapsto & (rcos\theta, rsin\theta) \end{array}$$

1- Montrer que $H = f \circ F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$, si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.
2- Calculer $\frac{\partial H}{\partial r}(r,\theta)$ et $\frac{\partial H}{\partial \theta}(r,\theta)$.

Exercice 04

1- Soit l'application

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = x^3 \end{array}$$

a- L'application f est-elle homéomorphisme ?.
b- L'application f est-elle difféomorphisme ?.
2- Soit l'application

$$\begin{array}{rcl} g:\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \mapsto & (rcos\theta, rsin\theta) \end{array}$$

a- Est ce que g est $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
b- L'application g est-elle étale ?.

Exercice 05

1- Soit

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (e^x cosx, e^x siny) \end{array}$$

- Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
- Calculer la matrice $f'(x,y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
- Montrer que f est un difféomorphisme local.
- f est - elle un difféomorphisme global.

2- Même question pour l'application g, telle que :

$$\begin{array}{rcl} g:\mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x^2 - y^2, 2xy) \end{array}$$

3- Montrer que

$$\begin{array}{rcl} \varphi:\mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y) \end{array}$$

est un difféomorphisme sur son image que l'on déterminera.

Exercice 06

Soit la fonction

$$\begin{array}{rcl} \varphi:\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^y - y^x \end{array}$$

1- Montrer qu'il existe deux intervalles ouverts I_1 et I_2 contenant 1 tels que l'ensemble (non vide)

$$E = \{(x,y) \in I_1 \times I_2 :\ \varphi(x,y) = 0\}.$$

soit le graphe d'une fonction ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I_1 et valeur dans I_2 et vérifiant $\phi(1) = 1$, i.e., $E = \{(x, \phi(x)),\ x \in I_1\}$
2- Donner le developpement limité l'ordre 1 de ϕ au voisinage de 1.

Exercice 07

1- Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de point $(0,0,1)$ dans $\mathbb{R}^3$ tel que l'ensemble

$$\{(x,y,z) \in U^3;\ x^2 + y^2 + z^2 - \cos(xyz) = 0\}$$

soit le graphe d'une fonction numérique ϕ définie sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$.
2- Monter que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et calculer ses dérivées partielles en point $(0,0)$.

Exercice 08

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit (la norme d'une application linéaire)

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

1- Soit $\{M_n\}$ une suite des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que si $\sum_n \|M_n\| < +\infty$ alors $\sum_n M_n < +\infty$.
2- Montrer que si $\|A\| < 1$, alors $\sum_n A^n < +\infty$.
3- Montrer que si $\|A\| < 1$, alors $(I - A)$ est inversible.
4- Soit $GL_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ M\ inversible\}$.

- (i) Montrer que GL_n est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- (ii) Montrer que l'application $f : GL_n \to GL_n$ définie par $f(A) = A^{-1}$ est différentiable en I et calculer sa différentielle df_I.
- (iii) Calculer df_A pour $A \in GL_n(\mathbb{R})$.