Chapitre 2

Variétés et Sous variétés

2.1 Sous variété de $\mathbb{R}^n$

Deux sous ensembles d'un espace de Banach E sont équivalents s'ils se déduisent l'un de l'autre par un difféomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
- Un sous espace vectoriel.
- Un ouvert de tel sous espace : un morceau de courbe ou de surface de l'espace vectoriel.

Par contre un cercle ou une sphère ne sont que localement homéomorphe une droite ou un plan.
Dans ce chapitre on définit un ouvert qui généralise la notion d'un espace vectoriel, c'est une sous-variété de dimension d.
Si $d = 0$, ce sont des points discrèts ou points isolés.
Si $d = 1$, la sous-variété est une courbe.
Si $d = 2$, la sous-variété est une surface.
Si $d \geq 3$, la sous-variété est une ultrasurface ou hypersurface.

2.1.1 Définitions d'une sous-variéte

Notation : Soit $n, d \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq d \leq n$

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} = \mathbb{R}^d \times \{0_{n-d}\}$$

Définition 2.1 *: Une partie M de $\mathbb{R}^n$ est appelée sous-variété de classe C^k et de dimension d, si pour tout point $m \in M$, il existe un ouvert U de m dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ de classe C^k, telle que*

$$\begin{aligned} \varphi(U \cap M) = &\ \varphi(U) \cap \{\{\mathbb{R}^d\} \times \{0_{n-d}\}\} \\ &= V \cap \{\mathbb{R}^d \times \{0\}\}. \end{aligned}$$

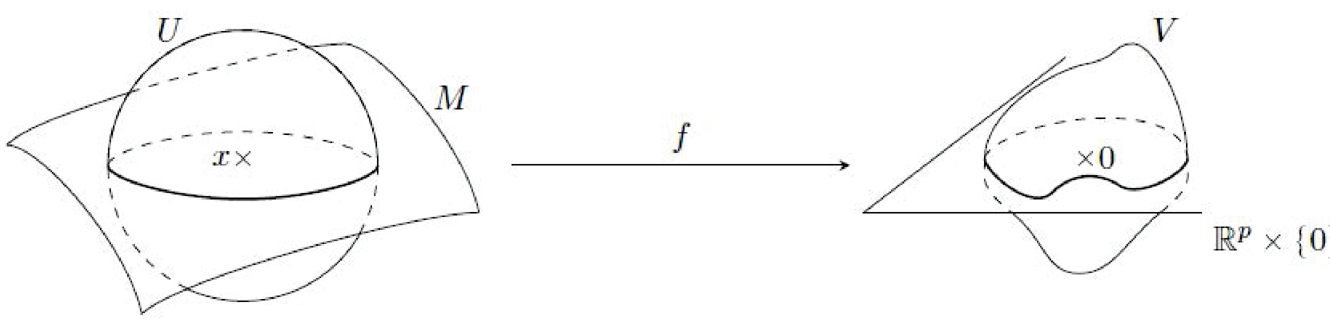

Figure 2.1 – Définition d'une sous-variété

Remarques 2.1 *:*

1. *$n - d$, est appelée la codimension de M*

2. *On a*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ x & \mapsto & \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_d(x), \varphi_{d+1}(x), \varphi_n(x)) \end{array}$$

Si $x \in U \cap M$, *alors*

$$\varphi(x) \in \varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^n \times \{0_{n-d}\}$$

c-à-d, si $x \in U \cap M$, *on a*

$$\varphi_{d+1}(x) = \varphi_{d+2}(x) = ... = \varphi_n(x) = 0$$

3. *Si* $n = d$, *alors* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d$ *et on a*

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^n = \varphi(U) \text{ et } M \subset U$$

les sous variétés de dimension maximale sont donc les ouverts de $\mathbb{R}^n$ *(et réciproquement).*

4. *Si* $d = 0$ *alors* $\mathbb{R}^d = \{0\}$, *et on a*

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^d = \{0\}$$

Alors $U \cap M$ *se réduit au point* $\varphi^{-1}(0) = m$, *les sous variétés de dimension nulles sont des parties discrètes de* $\mathbb{R}^n$ *(et réciproquement).*

5. *Puisque* φ *induit un homéomorphisme de* $U \cap M$ *sur l'ouvert* $\varphi(U) \cap \mathbb{R}^d$ *de* $\mathbb{R}^d$, *les sous-variétés de dimension d possèdent localement les mêmes propriétés topologiques que* $\mathbb{R}^d$.

6. *Un point m à une sous-variété de dimension 1, alors un voisinage de* $M \setminus \{m\}$ *est formé de deux parties connexes disjoints.*

Exemple 2.1 *: Soit M*

$$M = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

$$\varphi(U \cap M) = V \cap \mathbb{R}^2$$

et un difféomorphisme

$$\varphi(x, y, z) = (arctg\ \frac{y}{x}, \sqrt{x^2 + y^2} - 1)$$

Alors M est une sous variété de dimension 1 et de classe C^∞ *de* $\mathbb{R}^2$.

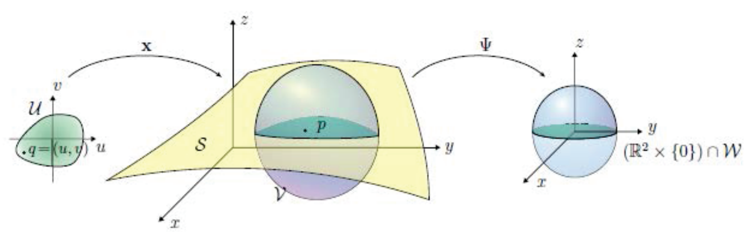

FIGURE 2.2 – Exemple d'une sous-variété

Exemple 2.2 *Soit* $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 0\}$.
- M n'est pas une partie discrète de $\mathbb{R}^2$, *donc M n'est pas une sous-variété de dimension* 0.
- M n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$, *car est un fermé.*
- Soit

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & g(x, y) = xy \end{array}$$

g est continue, $\{0\}$ *est fermé de* $\mathbb{R}$ *et* $g^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ xy = 0\}$ *est fermé.*
L'image d'un fermé par une application continue est fermé, donc M n'est pas une sous-variété de dimension 1, *car privée de l'origine, elle est formée de quatre composantes connexes.*

Définition 2.2 *:(Deuxième définition de s-v ; Point de vue Submersion)*
Soit M un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$.
M est une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$ *et de classe* C^k, *si et seulement si,*
$\forall m \in M$, *il existe un voisinage U de m dans* $\mathbb{R}^n$ *et une application* $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ *de classe* C^k, *telle que*

1. $\varphi^{-1}(\{0\}) = U \cap M$.
2. φ *est une submersion en* m ($d\varphi_m$ *est surjective*).

Définition 2.3 *:(Troisième définition de s-v : Point de vue paramétrage)*
Soit M *un sous ensemble de* $\mathbb{R}^n$.
M *est une sous-variété de dimension* d *et de classe* C^k, *si*
$\forall x \in M$, *il existe un voisinage* U *de* x *dans* $\mathbb{R}^n$, *un voisinage* Ω *de* 0 *dans* $\mathbb{R}^d$ *et une application* $g : \Omega \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *de classe* C^k, *telle que*

1. *g(0)=m.*
2. $g : \Omega \longrightarrow U \cap M$ *est un homéomorphisme.*
3. $dg_0 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est injective (rang* $dg_0 = d$*).*

Remarques 2.2

1. *Le couple* (Ω, g) *s'appelle paramétrisation ou représentation paramétrique.*
2. Ω *est un voisinage de* 0 *n'est pas obligatoire, on peut prendre* Ω *voisinage de* t_0 *avec* $t_0 \in \Omega$ *vérifier* $g(t_0) = m$
3. $g : \Omega \longrightarrow U \cap M$, $rangg^{'}(0) = n$, *la matrice* $\left(\frac{\partial g_i}{\partial t_j}(0, 0, ..., 0)\right)$ *est de rang* n *par raison de continuité, elle est de rang* n, $\forall t \in \Omega$
$$g^{'}(0) \text{ de rang } n \Leftrightarrow g^{'}(t) \text{ de rang } n, \ \forall t$$

Exemple 2.3

1. *Soit l'ensemble* M *donné par la paramétrisation*
$$M = \{(t, t^2) : \ t \in \mathbb{R}\}$$
Posons
$$\begin{array}{lcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \quad t & \mapsto & g(t) = (t, t^2) \end{array}$$
de classe $\mathcal{C}^\infty$.
W *un voisinage de* (x_0, y_0), *on a* $g(t_0) = (x_0, y_0)$ *et* $g^{'}(0) = (1, 2t) \Rightarrow g^{'}(0) = (1, 0)$ *est de rang* 1.
Donc $g^{'}(0)$ *est injective et par conséquence* $g^{'}(t_0)$ *est injective.*
$g : \Omega \longrightarrow U \cap M$ *est un homéomorphisme ? (g continue, bijective et* $g^{-1} = Pr/M$ *est continue)*
2. $M = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
$$\forall x \in M, \ x = (x_0, y_0, z_0) \ \ \exists U, x \in U$$
Posons $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$
φ *est de classe* C^∞, $M \subset \mathbb{R}^3$
$$\varphi^{-1}(0) = U \cap M = \mathbb{R}^3 \cap M = M$$
φ *Est submersion ?*
$$\forall (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$$
$$d\varphi_{(x_0,y_0,z_0)} = (2x_0 \quad 2y_0 \quad 2z_0)$$
$$rang \ d\varphi = \begin{cases} 1 & x_0 = y_0 = z_0 \neq 0 \\ 0 & x_0 = y_0 = z_0 = 0 \end{cases}$$
$$(0, 0, 0) \notin S^2$$
$$d\varphi : \ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$\forall x \in M$, *rang* $d\varphi = 1 = \dim \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \varphi$ *est submersion.*
Alors $S^2 = M$ *est une sous-variété de dimension* $d = n - p = 2$ *et de classe* C^∞.
3. *Soit* $H = \{(\mathrm{x, y, z}) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 - y^2 - z^2 = \mathrm{c}\}$, H *est une sous-variété ?.*
Posons $g(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2 - c$
$$dg_{(\mathrm{x,y,z})} = (2x \ \ -2y \ \ -2z) \qquad \forall (\mathrm{x, y, z}) \in \mathbb{R}^3$$
$$rang \ dg_{(\mathrm{x,y,z})} = \begin{cases} 0 & x = y = z = 0 \\ 1 & x = y = z \neq 0 \end{cases}$$
$$(0, 0, 0) \in H \quad si \ c = 0$$
$$(0, 0, 0) \notin H \quad si \ c \neq 0$$

(a) *Si* $c \neq 0$

$$g^{-1}(0) = U \cap H = H$$

$$H = \{x \in \mathbb{R}^3 \quad g(x) = 0\}$$

$$g^{-1}(0) = x \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad H \subset \mathbb{R}^3$$

$$= H \cap \mathbb{R}^3 = H$$

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

rang $dg = 1 = \dim \mathbb{R}$ g *est submersion, donc* H *est une sous-variété de dimension* $d = n - p = 2$ *et de classe* C^∞

(b) *Si* $c = 0$, *rang* $dg_x = 0 \quad \Longrightarrow g$ *n'est pas une submersion en* $(0,0,0)$, *on ne peut dire rien.*

Définition 2.4 *: (valeur-régulière)*
Soit g *une application différentiable d'un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^p$.
Supposons que $b \in \mathbb{R}^p$ *soit une valeur régulière et que* $g^{-1}(b)$ *ne soit pas vide, alors* $g^{-1}(b)$ *est une sous-variété de* $\mathbb{R}^n$ *de dimension* p.

Remarque 2.1
M *est une sous-variété si elle est différentiable en chaque* b : $U \cap M = g^{-1}(b)$, $b \in \mathbb{R}^{n-d}$ *avec* dg_b *est surjective.*

Définition 2.5 *: (Sous-variété définie par équation : Point de vue équation)*
Soit

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \ : f(x) = 0\}$$

où f *est une fonction donnée de classe* $\mathcal{C}^k$, *alors si* $\forall m \in M$: $df_m = f'(m) \neq 0$ M *est une sous-variété, par contre s'il existe un point* $m \in M$ *tel que* $df_m = f'(m) = 0$ *cela ne prouve pas que* M *n'est pas une sous-variété.*

Exemple 2.4 *:*

1. *Soit*

$$M = S^n = \left\{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad : \ x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1\right\}$$

On prend $f = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n+1}^2 - 1$, *et* $df = (2x_1 \ 2x_2 \ ... \ 2x_{n+1})$
$f^{-1}(1) = S^{n+1}$ *et* $+1$ *une valeur régulière de* f, df *ne peut s'annuler sur* S^{n+1}.
d'où la sujectivité, alors M *est une sous-variété.*

2. *Soit*

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \ x^3 - y^3 = 0\right\}$$

On prend $f(x, y) = x^3 - y^3$
$f \in C^\infty(\mathbb{R})$ *leur différentielle est* $df_{(x,y)} = (3x^2, -3y^2)$

$$\forall m = (x, y) \in M, \ m = (0, 0) \in M$$

$$df_{(0,0)} = (0, 0) \ \Longrightarrow rang df_{(0,0)} = 0$$

On ne peut rien dire.
Donc, $x^3 - y^3 = (x - y)(\ x^2 + y^2 + xy)$

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : x - y = 0\right\}$$

$\forall x, y \in M$, $df_{(x,y)} = (1 \quad -1) \neq 0$. *Alors* M *est une sous-variété de dimension d =1 de classe* C^∞.

Graphe d'une application
Soit U un ouvert de E *et soit* $f : U \subset E \longrightarrow F$ une application.
Le graphe de f est l'ensemble

$$Gr(f) = \left\{(x, f(x)); x \in U\right\} \subset E \times F.$$

Définition 2.6 *:(Cinquième définition de s-v : Point de vue graphe)*
Une partie $M \subset \mathbb{R}^n$ *soit une sous-variété de dimension d il faut et il suffit que :* $\forall x = (\overline{x}, \overline{\overline{x}}) \in M \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$, *il existe un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^d$ *contenant* x, *un autre ouvert* V *de* $\mathbb{R}^d$ *contenant* $\overline{x}$ *et une application* $h : V \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ *de classe* $\mathcal{C}^k$ *tels que (après une permutation éventuelle des coordonnées de* x*)* $M \cap U$ *soit le graphe de l'application* h

$$U \cap M = \{(\overline{x}, h(\overline{x}) : \overline{x} \in V\}$$

Exemple 2.5 *: Le cercle* $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$

$$U_1 = \{|x| < 1, y > 0\}$$

$$U_1 \cap S^1 : g : x \longmapsto g(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$U_2 = \{|x| < 1, y < 0\}$$

$$U_2 \cap S^1 : g : x \longmapsto g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$$

$$U_3 = \{x > 0, |y| < 1\}$$

$$U_3 \cap S^1 : g : y \longmapsto g(y) = \sqrt{1 - y^2}$$

$$U_4 = \{x < 0, |y| < 1\}$$

$$U_4 \cap S^1 : g : y \longmapsto g(y) = -\sqrt{1 - y^2}$$

Remarque 2.2 *Une courbe de* $\mathbb{R}^n$*, c-à-d, une application différentiable* f *d'un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}^n$*, n'a pas nécessairement pour image une sous-variété, même si* f *est un homéomorphisme de* I *dans* $f(I)$*.*

Exemple 2.6 *Soit la fonction paramétrée suivante*

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t^2, t^3) \end{array}$$

cause du point de rebroussement.

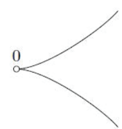

Figure 2.3 – Point de rebroussement

Théorème 2.1 *:*
Soit V *une sous-variété de* $\mathbb{R}^n$ *de dimension* d *et de classe* C^k *et* W *une sous variété de* $\mathbb{R}^m$ *de dimension* e *de classe* C^k*, alors* $V \times W$ *est une sous variété de* $\mathbb{R}^{n+m}$ *de dimension* $(d + e)$ *et de classe* C^k*.*

Preuve.
On utilise ■

2.2 Variétés abstraites

2.2.1 Carte, Atlas

Soient S un ensemble et n un entier positif.

Définition 2.7 *: Une carte sur S est une bijection $\varphi : U \longrightarrow V$ d'une partie U de S sur l'ouvert V de $\mathbb{R}^n$, on note la carte par (U, φ, V) ou par fois par (U, φ)*
Un $\mathcal{C}^k$-Atlas sur S est une famille de carte (U_i, φ_i, V_i) avec $\varphi_i : U_i \longrightarrow V_i$ un homéomorphisme, $i \in I$ telle que

1. *$S = \bigcup_{i\in I} U_i$ (un recouvrement)*
2. *Compatibilité : Soient deux carte $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ telles que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ où*

$$\varphi_{ji} : (\ U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(\ U_i \cap U_j).$$

Est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme

Définition 2.8 *: Un atlas $\mathcal{A}$ de dimension n de M est un ensemble $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de cartes de dimension nn tel que :*

1. *Les ouvertes U_α recouvrent M,*
2. *Tous les cartes de $\mathcal{A}$ sont compatible deux à deux.*

Définition 2.9 *: Soit M un espace topologique séparé, un système de cartes de classe C^k de dimension n sur M est la donnée*

1. *Un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de M*
2. *Une famille de homomorphisme $\varphi_i : U_i \longrightarrow W_i$ ou W_i sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$.*
   L'homéomorphisme $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ soit un C^k-difféomorphisme de $\varphi_i (U_i \cap U_j)$ dans $\varphi_j (U_i \cap U_j)$.

Définition 2.10 *: Deux systèmes de cartes $U = \{(U_i,\ \varphi_i)\}_{i\in I}$ et $V = \{(V_j, \psi_j)\}_{j\in I}$ sont dits équivalents si leurs réunions est encore un système de carte, i.e.,*

$$U = \{(U_1,\ \varphi_1), (U_2,\ \varphi_2), (U_3,\ \varphi_3)\}$$

$$V = \{(V_1, \psi_1), (V_2, \psi_2), (V_3, \psi_3)\}$$

$$U \cup V = \Big\{ (U_1,\ \varphi_1), (U_2,\ \varphi_2), (U_3,\ \varphi_3), (V_1, \psi_1), (V_2, \psi_2), (V_3, \psi_3) \Big\}$$

Ceci équivalent $\forall i, j\ :\ \psi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est un C^k-difféomorphisme de

$$\varphi_i (U_i \cap V_j) \quad dans\ \psi_j (U_i \cap V_j)$$

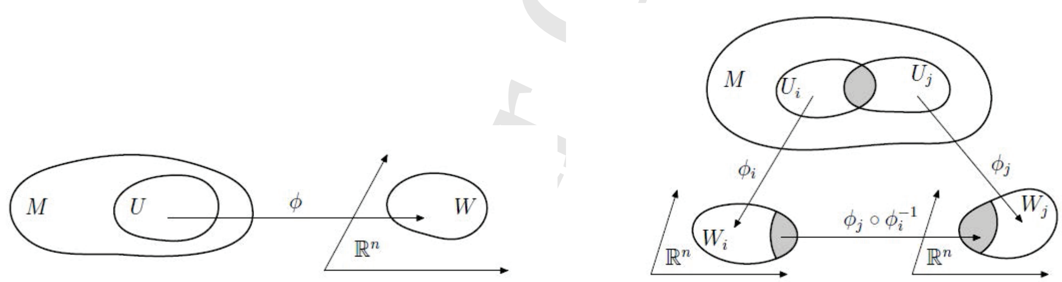

FIGURE 2.4 – Carte et changement de cartes

Exemple 2.7 *:*

1. *Tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ admet un Atlas qui consiste en une seule carte (U, Id) d'où variété.*
2. *$S^n = \{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1\}$ un Atlas sur S^n formé par deux cartes (U_N, φ_N) et (U_S, φ_S)*
   (a) *$S^n = U_n \cup U_S$ (recouverement).*
   (b) *$\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}$ est un difféomorphisme (même pour $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}$), avec (φ_N, φ_S) sont les projections stéréographiques.*

2.2.2 Variété topologique, variété différentielle

Définition 2.11 *:(Variété topologique)*
On dit que M est une variété topologique si :

1. *M un espace topologique séparé.*
2. *Pour tout $m \in M$, il existe un ouvert U de M contenant m est un homéomorphisme*

$$\varphi : U \longrightarrow W \subset \mathbb{R}^n$$

   ou W un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.12 *: Une structure différentielle de dimension n sur M est une classe d'équivalence d'atlas de dimension n sur M*

Définition 2.13 *: :(Variété différentielle)*
On appelle variété différentielle de dimension n et de classe C^k, la donnée de l'espace topologique sépare M et d'un système de carte de classe C^k et de dimension n.

Définition 2.14 *: Une structure de variété différentielle de dimension n et de classe $\mathcal{C}^k$ sur M est la donnée d'une classe d'équivalence de système de carte de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimension n.*

Exemple 2.8 *:*

1. *Toute sous-variété M de dimension n et de classe C^k est une variété différentielle de $\dim = n$ et de classe C^k.*
   Soit M une sous variété.
   M est un espace topologique sépare :
   On sait que : $\forall x \in M,\ \exists U$ voisinage de x de $\mathbb{R}^n$ et Ω vosinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$, tels que :

$$g(0) = x\ ,\ g^{'}(0) : est\ injective\ \ (immersion)\ ,\ g : \Omega \longrightarrow U \cap M :\ est\ homomorphisme$$

   $\{U_x \cap M\}_{x \in M}$: est un recouvrement de M.
   On prend

$$\varphi_i : g_x^{-1} : U \cap M \longrightarrow \Omega$$

   et

$$\varphi_i \circ\ \varphi_j^{-1} = g_x^{-1} \circ g_x$$

   est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme

2. *L'inverse est faux : le carré n'est pas une sous-variété, par contre le carré est une variété différentille.*
3. *Le cercle $S^1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$ est une variété différentielle car est une sous-variété.*
   - *(a) $\exists (Ui)_{i \in I}$ recouvrememt de S^1.*
   - *(b) $\varphi : \Omega \longrightarrow U \cap M$ homéomorphisme.*
   - *(c) $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cup U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cup U_j)$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.*

Proposition 2.1 *:*
Soit M une variété différentielle de dimension n est de classe $\mathcal{C}^p$ et $\{(U_i,\ \varphi_i)\}$ un atlas sur M .
Soit N une variété différentielle de dimension m est de classe $\mathcal{C}^q$ et $\{(V_j,\ x_j)\}$ un atlas sur N .
Alors $M \times N$ est une variété différentielle de dimension $(n+m)$ et de classe $\mathcal{C}^{\inf(p,q)}$

Exemple 2.9 *: $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ : x^2 + y^2 = 1,\ \ 0 < z < 1\right\}$, M est le cylindre.*

$$M = S^1 \times]0,1[$$

$]0,1[$ *est une variété avec* $(]0,1[\,, id)$ *est un atlas.*
S^1 *est une variété car est une sous-variété.*
$M = S^1 \times]0,1[$ *est une variété*

$$\dim(M)\ = \dim(\ S^1) + \dim(M_1)$$

Théorème 2.2 *: Une variété différentielle M est un espace localement compact et localement connexe.*

Remarques 2.3 *:*

1. *Si on remplace dans toutes définitions $\mathbb{R}^n$ par $\mathbb{C}^n$ et $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme par biholomorphe, i.e., (holomorphe +bijective +l'inverse est holomorphe), on obtient la notion : variété analytique complexe.*
2. *Une variété complexe de dimension 1 s'appelle surface de Riemann.*