Chapitre 3

Espace et fibré tangent

3.1 Espace tangent d'une sous-variété

Définition 3.1 *:*
Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d et de classe C^k, un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est dit vecteur tangent en m à M s'il est le vecteur de vitesse en m d'une courbe tracée sur M et d'origine m, c-à-d, s'il existe un intervalle $I =]-\delta, +\delta[$ contenant "0" et une application différentiable

$$C \ : \ ]-\delta, +\delta[\ \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in I, \ C(t) \in M$$

$$C\left(0\right) = m, \quad C^{'}\left(0\right) = \left(\frac{dC}{dt} C(t)\right)(0) = v$$

Exemple 3.1

1. $S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\right\}$

$$\begin{array}{rcl} C :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}$$

$$\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \ C\left(t\right) \in S^1 = M$$

$$C\left(0\right) = (1, 0) = m$$

$$C^{'}\left(t\right) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \ C^{'}\left(0\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v$$

2. $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{rcl} C :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t, 0) \end{array}$$

$$C\left(0\right) = (1, 0, 0)\,, \ C^{'}\left(t\right) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{'}\left(0\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v$$

Remarque 3.1 *: L'ensemble de vecteurs tangents en m à M s'appelle l'espace tangent m à M et le note $T_m M$.*

Proposition 3.1 *: $T_m M$ est un espace vectoriel de même dimension que M.*

Lemme 3.1 *:*
Soient U un ouvert de E et $f : U \subset E \longrightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Si V est une sous-variété de E contenu dans U et W est une sous-variété de F, telles que $f(V) \subset W$.
Soit $x \in V$ et $y = f(x) \in W$. Si $z = v$ un vecteur tangent à V en x, alors $f^{'}.v$ est vecteur tangent en $y = f(x)$ à W i.e., $z \in T_x V \Longrightarrow df_x.z \in T_y W \Longrightarrow f^{'}.z \in T_y W$

Lemme 3.2 *:*
Soit V une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Posons $\widetilde{V} = V \cap U$, alors

$$z \in T_x \widetilde{V} \Longleftrightarrow z \in T_x V$$

3.1.1 Méthode de calcul T_mM

Théorème 3.1 *: Soit M une sous-variété de dimension -d- de $\mathbb{R}^n$ de classe C^k et $m \in M$*

1. *Si dans un voisinage ouvert U de m, $M \cap U = f^{-1}(0)$, ou f est une submersion alors :*

$$T_mM = \ker df_m = \ker f^{'}(m)$$

2. *Si dans un voisinage ouvert U de m et un C^k-diffeomorphisme φ de U dans un voisinage V de "0" telles que*

$$\varphi(U \cap M) = V \cap \left\{\mathbb{R}^d \times \{0\}\right\}$$

donc

$$T_mM = \left(\varphi^{'}(m)\right)^{-1}(\mathbb{R}^d)$$

3. *Si (Ω, g) une paramétrisation de $U \cap M$, ou U est un voisinage de m, alors*

$$T_mM = \left(g^{'}(0)\right)(\mathbb{R}^d) = Img\left(g^{'}(0)\right)$$

Exemple 3.2 *:*

1. *Soit $S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$*
$m = (0,0,1)$, Calculer $T_{(0,0,1)}S^2$?.
Solution :

$$\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} & & \\ \quad (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 \end{array}$$

$f^{-1}(0) = U \cap M = M$, $M = S^2$
f <u>est submersion</u> ?.
$\forall x \in \mathbb{R}$ df_x *Surjective*

$$d_{(x,y,z)}f = (2x \quad 2y \quad 2z)$$

$$rang\ \left(d_{(x,y,z)}f\right) = 1 = \dim \mathbb{R}$$

$\Longrightarrow$ df_x *est surjective*
$\Longrightarrow$ f *est submersion*
Alors :$T_{(0,0,1)}S^2 = \ker(f^{'}(0,0,1))$

$$f^{'} = d_{(0,0,1)}f \ : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \longmapsto (0\ 0\ 2)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

$$df_{(0,0,1)}H = 2h_3$$

$$T_{(0,0,1)}S^2 = \left\{(h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3 :\ f^{'}(0,0,1)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0\right\}$$

$$= \{(h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3\ ,\ 2h_3 = 0\} = m + < h_1, h_2 >$$

$T_{(0,0,1)}S^2$ *est le plan.*

$$f : X \longrightarrow Y \qquad \ker f\ = \{x \in X\ : f(x) = 0\}$$

2. *Soit $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = \varphi(x,y)\right\}$.*
où $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$, U voisinage de 0 et $\varphi(0,0) = 0$.
Question : Calculer T_mM.
Soient $m = (x_0, y_0, \varphi(x_0,y_0))$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, telle que

$$dg_{(0,0)} = g^{'}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0) \\ 0 & 1 & \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Img^{'}(0,0) = g^{'}(\mathbb{R}^2) &= \{g^{'}(h_1\ h_2);\ (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix};\ (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2\right\} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} T_mM &= \left\{ \left(h_1, h_2, \frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0)h_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0)h_2 \right);\ (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ (h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3;\ h_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0)h_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0)h_2 \right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0) \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

3.1.2 Applications différentiables

Définition 3.2
Soient M_1 une sous-variété de $\mathbb{R}^{n_1}$, M_2 une sous-variété de $\mathbb{R}^{n_2}$ et $f : M_1 \longrightarrow M_2$ une application. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ en $m \in M_1$, s'il existe un voisinage U de m et une application g de classe $\mathcal{C}^k$ $g : U \longrightarrow g(U)$ telle que

$$g_{|_{U\cap M}} = f_{|_{U\cap M}}.$$

Remarques 3.1 *- Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ en chaque point de M, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$.*
- Si M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on peut prendre $g = f$ et l'ontrouve la définition usuelle.

Définition 3.3 *(Application tangente)*
Soient une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ et une application $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$.
On appelle application tangente de f à M en $a \in M$, la restriction de $df_{(a)}$ à T_aM, on la noté par T_af

$$\begin{array}{rcl} T_af : T_aM & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x & \longmapsto & d_af(x) \end{array}$$

Définition 3.4 *Soient M, N deux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ et une application $f : M \longrightarrow N$ de classe $\mathcal{C}^1$, alors l'application tangente T_mf*

$$T_mf : T_mM \longrightarrow T_{f(m)}N$$

est définie par : $v \in T_mM,\ v = \gamma^{'}(0) = C^{'}(0)$

$$T_mf(v) = (f \circ C)^{'}(0) \in T_{f(m)}N$$

Exemple 3.3 *Si M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors T_mf n'est rien d'autre que df_m considéré comme application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans le sous espace $df_m\mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^n$.*

Définition 3.5 *(Plongement)*
Soient M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^p$ un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de M sur $f(M)$.
On dit que f est un plongement si, $f(M)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^p$.

Théorème 3.2 *(Composition)*
Si $f : M_1 \to M_2$ et $g : M_2 \to M_3$ sont deux applications de classe $\mathcal{C}^k$ de sous-variétés de classe $\mathcal{C}^k$, alors $g \circ f : M_1 \to M_3$ est une application de classe $\mathcal{C}^k$ et

$$T_m(g \circ f) = T_{f(m)}g \circ T_mf.$$

Définition 3.6

1. *On dit que $f : M_1 \to M_2$ est un difféomorphisme de la sous-variété M_1 sur la sous-variété M_2, si f est bijective et si f et f^{-1} sont différentiables.*
2. *On dit que f est un difféomorphisme local en $m \in M_1$, s'il existe un voisinage ouvert U_{M_1} de m sur M_1 (pour la topologie induite par $\mathbb{R}^{n_1}$) et un voisinage ouvert V_{M_2} de $f(m)$ sur M_2 (pour la topologie induite par $\mathbb{R}^{n_2}$) telle que la restriction de f a U soit un difféomorphisme de U_{M_1} sur U_{M_2}.*

Théorème 3.3 *(D'inversion local pour les sous-variétés)*
Avec les notions précédentes.
Si T_mf est bijectif, f est un difféomorphisme local.

3.1.3 Théorèmes de Sard et Morse

Théorème 3.4 *(de Sard)*
Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ est une immersion en x de classe $\mathcal{C}^k$, alors il existe un voisinage $\widetilde{U}$ de x telle que $f(\widetilde{U})$ est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.7 *(de Morse)*
Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0 à valeurs réelles, telle que 0 est un point critique $T_0 f = 0$, 0 est un point critique non dégénéré. L'application T_f est transverse la sous-variété $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ en 0, $T_f : x \to (x, T_x f)$

Définition 3.8 *(fonction de Morse)*
M est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^2$, f est une fonction de Morse si tous ses points critiques sont non dégénérés

Théorème 3.5 *(de Morse)*
Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, on suppose que 0 est un point critique non dégénéré, alors il existe un difféomorphisme local φ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$. Alors $T_0\varphi = Id$ et

$$f(x) = f(0) + q(\varphi(x))$$

avec q une forme quadratique non dégénéré.

Théorème 3.6
Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de classe $\mathcal{C}^\infty$, pour presque toute forme linéaire $l \in \mathbb{R}^{n^*}$, la restriction $l_{|_M}$ est une fonction de Morse sur M.

3.2 Espace tangent d'une variété

Définition 3.9 *:(Vecteur tangent)*
Soit M une variété différentielle, x un point de M, γ_1, γ_2 deux courbes paramétrées par $]-1, 1[$ telles que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x$.
On dit que γ_1, γ_2 sont tangentes en x, si qu'elle que soit la carte (U, φ) telle que $x \in U$, on ait

$$\frac{d}{dt}(\varphi(\gamma_1(t)))_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi(\gamma_2(t)))_{t=0}.$$

Remarques 3.2

1. *Si cette égalité est vérifiée pour une carte, elle l'est pour toutes.*
2. *On note parfois $J^1\gamma_1(0) = J^2\gamma_2(0)$ l'ensemble des classes d'équivalences de telles courbes pour cette relations d'équivalence est appelé espace tangent en x de M, on le note par : $T_x M$.*
3. *L'un des inconvénients de cette définition est que la structure d'espace vectoriel de $T_x M$ n'est pas évidente. De même il n'est pas tout fait claire ce qu'est une famaille continue (ou de classe $\mathcal{C}^k$) de champs de vecteurs.*
4. *Notons par contre une naturalité de cette définition, si $f : M \longrightarrow N$ est une application différentiable entre variétés. On définit*
$$\begin{array}{cccc} df : & T_x M & \longrightarrow & T_{f(x)}N \\ & \gamma & \mapsto & [f \circ \gamma] \end{array}$$

Définition 3.10 *:*
Soit M une variété différentielle de $\dim = n$ et $m \in M$. Un vecteur tangent en m à M est une classe de : $C : I \longrightarrow M$ pour la relation d'équivalence suivante

$$C\mathfrak{R}\gamma \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C(0) = \gamma(0) = m \\ \text{dans la carte } (U, \varphi) \text{ de } M \text{ en } m, \text{ on a} \\ (\varphi \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ C)'(0) \end{array} \right\}$$

Remarques 3.3
1. *On sait ce que soit les courbes $C : I \longrightarrow M$ mais on sait pas la définie de vecteur $C'(0)$.*
2. *Cette définition est indépendante du choix de la carte.*
3. *On connait $(\varphi \circ C)'(0)$ mais ne connait pas $C'(0)$.*

Définition 3.11 *:*
L'ensemble des vecteurs tangent en m M est noté par $T_m M$.

Proposition 3.2
L'espace T_mM est un espace vectoriel de dimension $\dim = n$.

Définition 3.12 *:*
Soient M et N deux variétés de dimension n et p (resp) et $f : M \longrightarrow N$ de classe $\mathcal{C}^k$.
L'application T_mf de T_mM dans $T_{f(m)}N$ est appelée l'application tangente.

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n & \underset{\psi^{-1}\circ f\circ\varphi}{\longrightarrow} & \psi(V) \subset \mathbb{R}^n \end{array}$$

Théorème 3.7 *: Soient M et N deux variétés et $f : M \longrightarrow N$ de classe $\mathcal{C}^k$.*
L'application T_mf est linéaire de T_mM dans $T_{f(m)}N$. Si P une troisième variété et g une application $g : N \longrightarrow P$ de classe $\mathcal{C}^k$, alors

$$T_m(g \circ f) = T_{f(m)}g \circ T_{f(m)}f.$$

3.2.1 Application différentiables

Définition 3.13 *: Soit M une variété différentielle de dimension* $\dim = n$ *et $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une application, f est dite différentiable en $m \in M$ si :*

1. *(U, φ) une carte sur M en m.*
2. *$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est différentiable en $\varphi(m)$ sur l'ouvert $\varphi(U)$ de $\mathbb{R}^n$.*

Remarque 3.2 *: Cette définition est indépendante du choix de la carte en m.*

Définition 3.14 *:*
Soient M et N deux variétés différentielles de classe $\mathcal{C}^p$ et de dimension n et m (respectivement) et $f : M \longrightarrow N$ une application continue.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^r$ $(r \leq p)$ en $m \in M$, si pour toute carte (U, φ) en m est pour toute carte (V, ψ) en $f(m)$ l'application : $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^r$ en $\varphi(m)$ de l'ouvert $\varphi\left(U \cap f^{-1}(V)\right)$ dans $\varphi(V)$, i.e.,

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi \ : \varphi\left(U \cap f^{-1}(V)\right) \longrightarrow \psi(V)$$

est de classe $\mathcal{C}^r$ en $\varphi(m)$

Remarques 3.4 *:*

1. *On considère non pas U, mais $U \cap f^{-1}(V)$ pour que les compositions d'applications soient bien définies. Il est important de supposer que f est continue pour être sur que $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ est définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n(\dim M = n)$.*
   U ouvert de $M, f^{-1}(V)$ ouvert de $M \Rightarrow \varphi\left(U \cap f^{-1}(V)\right)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
2. *Cette définition est indépendante des cartes choisies en m et en $f(m)$.*

Exemple 3.4 *: Soit l'application f telle que $f : N \longrightarrow \mathbb{R}$ de variété N dans $\mathbb{R}$.*
f est de classe $\mathcal{C}^r$ sur N, si $f \circ \varphi^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^r$ sur $\mathbb{R}$.
Alors (U, φ) est une carte sur N.

Remarque 3.3 *Soit l'application $f : M \longrightarrow N$ de variété M dans la variété N, est dite de classe $\mathcal{C}^k$ si f est de classe $\mathcal{C}^k$ en tout les points de M, on écrit $f \in \mathcal{C}^k(M, N)$.*

Proposition 3.3 *Soient M et N deux variétés différentielles de dimension m et n (respectivement) et de classe $\mathcal{C}^k$, on a l'équivalence :*

1. *$f \in \mathcal{C}^k(M, N)$*
2. *$\forall x \in M$, il existe une carte (U, φ) de M en x et une carte (V, ψ) dans N en $f(x)$, telles que*

$$f(U) \subset V, \ \psi^{-1} \circ f \circ \varphi \in \mathcal{C}^k\left(\varphi(U \cup f^{-1}(V)), \psi(V)\right)$$

Proposition 3.4
Soient M, N et P trois variétés différentielles de dimension m, n et p (respectivement), si $f \in \mathcal{C}^k(M, N)$ et $g \in \mathcal{C}^k(N, P)$ alors $g \circ f \in \mathcal{C}^k(M, P)$

Définition 3.15 *: Soient M, N deux variétés différentielles et $f : M \longrightarrow N$ une application.*
On dit que f est $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme si,

1. f *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *(i.e.,* $f \in \mathcal{C}^k(M,N)$*).*
2. f *est bijective.*
3. f^{-1} *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *(i.e.,* $f^{-1} \in \mathcal{C}^k(N,M)$*).*

Remarque 3.4 *On note par*

$$Diff^p(M,N) = \left\{ l'ensemble\ de\ \mathcal{C}^k - diffomorphisme\ de\ M\ dans\ N \right\}.$$

Proposition 3.5
$(Diff^p(M,N), \bullet)$ *admet une sructure d'un groupe.*

3.3 Fibré tangent

Soit M une variété différentielle. A chaque point $m \in M$ on peut associer son vectoriel tangent T_mM, puis considérer la réunion ensembliste TM de tous ces espaces tangents.

Définition 3.16 *:*
Soit M *une variété de dimension* n *et de classe* $\mathcal{C}^k$*. On note par*

$$TM = \underset{m\in M}{\cup} T_mM = \underset{m\in M}{\cup} \{m\} \times T_mM$$

l'ensemble de tous les vecteurs tangents en tout point de M*. On appelle* TM *le fibré tangent.*

Remarque 3.5
$T^*M = \underset{m\in M}{\cup} T^*_mM$ *s'appelle le fibré cotangent.*
T^*_mM *est le dual algébrique de* T_mM*.*

Théorème 3.8 *: Soit* M *une variété de dimension* n *et de classe* $\mathcal{C}^k$*.*
Le fibré tangent peut être muni d'une structure de variété différentielle de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ *et de dimension* $2n$ *(ici* $k \geq 2$ *est la régularité de* M*).*

3.4 Série d'exercices pour les chapitres II et III

Université Mohamed Boudiaf - M'sila
Faculté de MI — 3 ième année Maths LMD 2015/2016
Département de Mathématiques — Module : Géométrie différentielle

<u>Série de TD $N^0 = 02$</u>
<u>sur les sous-variétés et les variétés</u>

<u>Exercice 01</u> :
Les ensembles suivants sont-ils des sous-variétés :
1- $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 1\right\}$
2- $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\ et\ x^2 + y^2 - x = 0\right\}$(fenêtre de Viviani)
3- $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x = 0\ ou\ y = 0\right\}$
4- $M = \left\{(t,t^2),\ t \in \mathbb{R}_-\right\} \cup \left\{(t,-t^2),\ t \in \mathbb{R}_+\right\}$
5(*)- $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 = y^2\right\}$
6- $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1\right\}$ (la cubique)

<u>Exercice 02</u> :

1. Soit M la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = |x|\right\}$$

- Montrer que M est fermée dans $\mathbb{R}^2$
- Montrer que M n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.

2. Soit S^3 la partie de $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$S^3 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 :\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\right\}$$

- Montrer que S^3 est une sous-variété de $\mathbb{R}^4$. Qu'elle est sa dimension ?.
- Déterminer $T_{(a,b,c,d)}S^3$ l'espace tangent S^3 au point $(a,b,c,d) \in S^3$

Exercice 03 :
Soit $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x^2 + y^2\right\}$
- Calculer $T_{(1,0,1)}M$, par deux méthodes.

Exercice 04 :
1- Soit
$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1 \ et \ 0 < z < 1\right\}$$
-Donner un système de carte compatible avec la structure de variété.
2- Soit
$$S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$
Donner un système de carte (Atlas) sur S^2, utiliser les projections stéréographique Nord et Sud.

Exercice 05 :
Soit $M_a = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = x \ et \ x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \ a > 0\right\}$
- Déterminer a pour que M_a soit une sous-variété.
- Donner une interprétation géométrique.
-Déterminer l'espace tangent $T_{(0,0,3)}M_3$.

Exercice 06 :
1- Montrer que tout ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension n.
2- La réciproque est elle vraie ?.
2- Qu'elles sont les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ de dimension 0 ?.

Exercice 07 :
Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ et $M = \{(x, f(x)), \ x \in I\}$
1- Est ce que M est une sous-variété ?.
2- Qu'elle est sa dimension ?.

Exercice 08 :
Monter que l'image d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ par un difféomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (φ est de classe $\mathcal{C}^k$) est une sous-variété de même dimension.

Exercice 09 :
soit
$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (\varphi, \theta) & \mapsto & (cos\theta, sin\theta, cos\varphi, sin\varphi) \end{array}$$
et soit $\pi^2 = Img$.
1- Posons $\mathbb{R}^2/_{2\pi\mathbb{Z}^2} = \mathbb{R}^2/_{\mathbb{R}}$ où $(x_1, y_1) \ et \ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$
$(x_1, y_1)\mathfrak{R}(x_2, y_2) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 - x_1 \in 2\pi\mathbb{Z} \\ y_2 - y_1 \in 2\pi\mathbb{Z} \end{array} \right.$
1- Disinier $\mathbb{R}^2/_{2\pi\mathbb{Z}^2}$.
2- Montrer que $\mathbb{R}^2/_{2\pi\mathbb{Z}^2}$ est homéomorphe avec π^2.
3- Déduire que π^2 est une sous-variété.

Exercice 10 :
1- Soit $GL_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \ M \ inversible\}$
- GL_n est un ouvert, sous variété.
- Dans le cas affirmatif qu'elle est sa dimension.
2- Soit $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \ det(A) = 1\}$
- Montrer aue $SL_n(\mathbb{R})$ est une variété de dimension $n^2 - 1$.
3- Soit $O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \ A^t A = I\}$
- Montrer aue $O_n(\mathbb{R})$ est une variété, qu'elle est sa dimension.
avec :

1. GL_n : groupe linéaire (l'ensemble des matrices inversibles)
2. SL_n : groupe spécial linéaire (l'ensemble des matrices spéciales unitaires).
3. $O(n)$: groupe orthogonal (l'ensemble des matrices unitaires).