Chapitre 4

Formes différentielles, différentielle extérieur

4.1 Formes p-linéaires

Soit E un espace vectoriel de dimention n sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$

Définition 4.1 *Soit l'application f, telle que*

$$\begin{array}{rcl} f : E \times E \times E .... \times E & \rightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, x_2, ..., x_p) & \mapsto & f(x_1, x_2, ..., x_p) \end{array}$$

f est dite p-linéaire si, f est linéaire par rapport chaque variable x_i.

Remarque 4.1

1. *Si $p = 1$, f est dite linéaire.*
2. *Si $p = 2$, f est dite bilinéaire.*
3. *L'ensemble de p-formes linéaires noté par $L_p(E, \mathbb{K})$.*

Exemple 4.1

$$\begin{array}{rcl} f_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f_1(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f_2(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{array}$$

f_1 et f_2 sont des formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

4.2 Formes p-linéaires alternées

Définition 4.2 *Soit*

$$\begin{array}{rcl} f : E \times E \times E .... \times E = E^p & \rightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, x_2, ..., x_p) & \mapsto & f(x_1, x_2, ..., x_p) \end{array}$$

est dite forme linéaire alternée si,

$$f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_p) = -f(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_p), \ \forall i, j = 1, p \ et \ i \neq j$$

Exemple 4.2 *Dans l'exemple précédent f_1 est une forme alternée, mais f_2 n'est pas.*

Remarque 4.2

1. *L'ensemble des p-formes linéaires alternées est noté par $A^p(E, \mathbb{K})$ ou $\Lambda^p(E, \mathbb{K})$*
2. *$\Lambda^p(E, \mathbb{K}) = A^p(E, \mathbb{K})$ est un sous-espace de $L_p(E, \mathbb{K})$*

Proposition 4.1 *Soit f telle que*

$$\begin{array}{rcl} f : E \times E \times E .... \times E = E^p & \rightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, x_2, ..., x_p) & \mapsto & f(x_1, x_2, ..., x_p) \end{array}$$

f est alternée ssi,

1. $f(x_1, x_2, ..., x_p) = 0$ *chaque fois qu'il existe un couple* $(i, j), x_i = x_j$ *et* $i \neq j$
2. *un p-uplets vecteurs liées* $x_i = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_j$

Remarque 4.3 *Si* $p > n$ *la seule forme p-linéaire alternée sur* E *c'est la forme* $f \equiv 0$

Définition 4.3

1. *Soit l'ensemble* $\{1, 2, ..., p\} \subset \mathbb{N}$.
   On dit qu'une permutation de $\{1, 2, ..., p\}$ *vers* $\{1, 2, ..., p\}$ *toute application bijective.*
   On note par $S(p)$ *l'ensemble de toute les permutation de* $\{1, 2, ..., p\}$ *vers* $\{1, 2, ..., p\}$
2. *Soit* $\sigma \in S(p)$.
   On dit que σ *est une trasposition ssi,*
   $$\exists i, j \in \overline{1, p} : \ \sigma(i) = j, \ \sigma(j) = i, \ et \ \sigma(k) = k, \ \forall k \neq i, k \neq j$$
3. *On définit l'application* ε *par*
   $$\begin{array}{rccc} \varepsilon : & S(p) & \longrightarrow & \{-1, +1\} \\ & \sigma & \longmapsto & \varepsilon(\sigma) = \begin{cases} +1, & \text{nombre du permutation est pair} \\ -1, & \text{nombre du permutation est impair} \end{cases} \end{array}$$
   On appelle la signature de σ*, la valeur de l'application* ε *au* σ *i.e.,* $\varepsilon(\sigma)$

Remarque 4.4

1. *Une transposition* σ *est une permutation qui permute deux éléments (nombres) distinctss et laisse les autres.*
2. $\sigma^2 = I$.

Proposition 4.2 *Soient* $f \in L_p(E, \mathbb{K})$ *et* $\sigma \in S(p)$*, On définit l'application* (σf) *par*

$$\begin{array}{ccc} (\sigma f) : E \times E \times E .... \times E = E^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, x_2, ..., x_p) & \longmapsto & f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(p)}) \end{array}$$

qui admet les propriétés suivantes :

1. $(\sigma f) = \varepsilon(\sigma) f$*, i.e.,* $f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, x_2, ..., x_p)$
2. $\varepsilon(\sigma_1 \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2)$
3. $\tau(\sigma f) = (\tau\sigma) f$

4.3 Produit extérieur

Définition 4.4 *Soit* $f \in A^p(E, \mathbb{K})$*,* $g \in A^q(E, \mathbb{K})$ *et soit* ϕ *une application bilinéaire définie par* $\phi : F \times G \longrightarrow H$ *où* F, G *et* H *sont des espaces vectoriels.*
On définit l'application $f \wedge_\phi g$ *par*

$$\begin{array}{ccc} f \wedge_\phi g : E^{p+q} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, x_2, ..., x_p, x_{p+1}..., x_{p+q}) & \longmapsto & f \wedge_\phi g \end{array}$$

où

$$f \wedge_\phi g = \varepsilon(\sigma) \sum_{\sigma \in S(p+q)} \phi \left[f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(p)}), g(x_{\sigma(p+1)}, x_{\sigma(p+2)}, ..., x_{\sigma(p+q)}) \right]$$

Définition 4.5 *On appelle l'application* $f \wedge_\phi g$ *produit extérieur de* f *et* g *par rapport* ϕ.
On note par $f \wedge g$ *le produit extérieur de* f *et* g *au lieu de* $f \wedge_\phi g$.

Exemple 4.3 *Soit* $f, g \in A^1(E, \mathbb{K})$*,* $\phi : F \times F \longrightarrow \mathbb{K}$

$$\begin{array}{ccc} f \wedge_\phi g : E \times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & f \wedge_\phi g \end{array}$$

$$f \wedge_\phi g = \sum_{\sigma \in S(2)} \phi \left[f(x_{\sigma(1)}), g(x_{\sigma(2)}) \right] = \phi \left[f(x_1), g(x_2) \right] - \phi \left[f(x_2), g(x_1) \right]$$

pour

$$\begin{array}{ccc} \phi : E \times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 . x_2 \end{array}$$

donc, on a

$$f \wedge_\phi g = f \wedge g = f(x_1).g(x_2) - f(x_2).g(x_1)$$

Définition 4.6 *Soit $f_1, f_2, ..., f_p$ p-forme linéaire sur E.*
On appelle produit extérieur de p-forme linéaire $(f_i),\ i \in \{1, 2, ..., p\}$ l'application pour

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, x_2, ..., x_p) & \longmapsto & f_1 \wedge f_2 \wedge .... \wedge f_p(x_1, x_2, ..., x_p) \end{array}$$

telle que $f_1 \wedge f_2 \wedge .... \wedge f_p(x_1, x_2, ..., x_p) = det\left[f_i(x_j)\right], 1 \leq i, j \leq p$

Propriétés
1- Soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ base canonique de E et soit $(e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*)$ base duale de E, alors

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} +1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{array} \right.$$

2- $f_p(x_1, x_2, ..., x_p) = det[x_i] f_p(e_1, e_2, ..., e_n) = det[x_{ij}],\ 1 \leq i, j \leq n.$
3- Soit (e_1, e_2) base de E, $x = x_1e_1 + x_2e_2,\ y = y_1e_1 + y_2e_2$, alors

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2) = x_1 f(e_1, y_1e_1 + y_2e_2) + x_2 f(e_2, y_1e_1 + y_2e_2) \\ &= x_1y_1 f(e_1, e_1) + x_1y_2 f(e_1, e_2) + x_2y_1 f(e_2, e_1) + x_2y_2 f(e_2, e_2) \\ &= x_1y_2 f(e_1, e_2) + x_2y_1 f(e_2, e_1) \\ &= x_1y_2 f(e_1, e_2) - x_2y_1 f(e_1, e_2) = det[x_i] f(e_1, e_2) \end{aligned} \tag{4.1}$$

avec $f(e_1, e_2) = 1, f(e_2, e_1) = -1, f(e_1, e_1) = f(e_2, e_2) = 0$

Proposition 4.3 *Soit f, g et h trois formes p-linéaire, alors on a les propriétés suivantes :*

1. *$(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$, le produit extérieur est associatif*
2. *$(f \wedge (g + h)) = (f \wedge g) + (f \wedge h)$, le produit extérieur est distributif*
3. *$f \wedge g = -g \wedge f$*
4. *Soient $f \in A^p$ et $g \in A^q$, alors $f \wedge g = (-1)^{pq} g \wedge f$*

4.4 Formes différentielles sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$

Définition 4.7 *On appelle forme différentielle de degré p sur l'ouvert $U \subset E$, toute application ω de la forme*

$$\begin{array}{ccc} \omega : U \subset E & \longrightarrow & A^p(U, \mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & \omega(x) = \displaystyle\sum_{1 \leq i_1, i_2, ..., i_p \leq n} a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_p} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p} \end{array}$$

où $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_p}$ sont des fonctions continues.
L'ensemble des formes différentielles de degré p sur l'ouvert $U \subset E$ et de classe $\mathcal{C}^k$ est noté par : $\Omega^p_{\mathcal{C}^k}(U, \mathbb{K})$

Exemple 4.4
1- $f : U \subset E \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^k$, alors $f \in \Omega^0_{\mathcal{C}^k}(U, \mathbb{K})$
2- $f \in \mathcal{C}^1$, alors $df : E \to A^1(E, \mathbb{K}) \Rightarrow df \in \Omega^1_{\mathcal{C}^0}(U, \mathbb{K})$

Remarque 4.5 $\omega \in \Omega^1(U, \mathbb{K})$, *donc*

$$\begin{array}{ccc} \omega : U \subset E & \longrightarrow & A^p(U, \mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & \omega(x) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \omega(x) : E = \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) & \longmapsto & \omega(x)(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = \omega(x, \xi) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \omega(x, \xi) &= \omega\left(x; \sum_{i=1}^n \xi_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \omega(x; \xi_i) e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i(\xi) = \left(\sum_{i=1}^n \omega_i dx_i\right)(\xi) \end{aligned} \tag{4.2}$$

alors

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$$

s'appelle la forme canonique de ω

Produit extérieur de deux formes différentielles
Soient ω_1 et ω_2 deux formes différentielles de degrés p et q (respectivement), on définit le produit extérieur $\omega_1 \wedge \omega_2$ par :

$$\begin{array}{rcl} \omega_1 \wedge \omega_2 : \Omega^p \times \Omega^q & \longrightarrow & \Omega^{p+q}(U, \mathbb{K}) \\ (\omega_1, \omega_2) & \longmapsto & (\omega_1 \wedge \omega_2)(x) = \omega_1(x) \wedge \omega_2(x) \end{array}$$

Exemple 4.5
Soit ω_1 est un 1-forme sur $\mathbb{R}^3$ définie par $\omega_1(x) = xdy - ydx - dz$.
Soit ω_2 est un 2-forme sur $\mathbb{R}^3$ définie par $\omega_2(x) = (x+y)dx \wedge dy - zdz \wedge dx$, alors

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega^3(U \subset \mathbb{R}^3, \mathbb{K})$$

$$\begin{array}{rcl} (\omega_1 \wedge \omega_2)(x) & = & (xdy - ydx - dz) \wedge ((x+y)dx \wedge dy - zdz \wedge dx) \\ & = & x(x+y)dy \wedge dx \wedge dy - xzdy \wedge dz \wedge dx - y(x+y)dx \wedge dx \wedge dy \\ & + & yzdx \wedge dz \wedge dx - (x+y)dz \wedge dx \wedge dy + zdz \wedge dz \wedge dx \\ & = & -xzdy \wedge dz \wedge dx - (x+y)dz \wedge dx \wedge dy \\ & = & -xzdy \wedge dz \wedge dx - (x+y)dx \wedge dz \wedge dy \\ & = & xzdy \wedge dx \wedge dz - (x+y)dx \wedge dy \wedge dz \\ & = & -xzdx \wedge dy \wedge dz + (x+y)dx \wedge dy \wedge dz \\ & = & -(xz + (x+y))dx \wedge dy \wedge dz \end{array}$$

4.5 Différentielle extérieur

Définition 4.8 *L'application α définie par*

$$\alpha(x)(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^i d\omega(x, \xi_i)(\xi_1, \xi_2, ..., \widehat{\xi_i}, ..., \xi_p)$$

tel que le vecteur $(\xi_1, \xi_2, ..., \widehat{\xi_i}, ..., \xi_p)$ est le vecteur $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_p)$ ommit la composante ξ_i.
On appelle α la différentielle extérieur de ω est noté $d\omega$.
Alors $d\omega \in \Omega^{p+1}_{\mathcal{C}^{k-1}}(U, \mathbb{K})$, où

$$d\omega(x; \xi_1, \xi_2, ..., \xi_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^i d\omega(x, \xi_i) \overrightarrow{\xi_i}$$

avec

$$\overrightarrow{\xi_i} = (\xi_1, \xi_2, ..., \widehat{\xi_i}, ..., \xi_p)$$

Définition 4.9 *Soit $\omega \in \Omega^p_{\mathcal{C}^k}$ tel que $\omega = \sum_{1 \le i_1, i_2, ..., i_p \le n} a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_p} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$, on définit $d\omega$ par*

$$d\omega = \sum_{1 \le i_1, i_2, ..., i_p \le n} d(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_p}) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$$

avec

$$d(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_p}) = \sum_{1 \le i_1, i_2, ..., i_p \le n} \partial(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_p}) dx_i$$

Définition 4.10 *On définit aussi pour tout k la différentielle d par les propriétés suivantes :*

1. *Pour $f \in \Omega^0_{\mathcal{C}^k}$, $df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i$.*
2. *Pour $\omega_1 \in \Omega^k_{\mathcal{C}^k}$ et $\omega_2 \in \Omega^l_{\mathcal{C}^k}$, on $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge \omega_2$.*
3. *$d^2 = 0$.*

Remarque 4.6 *On définit l'application d par*

$$\begin{array}{rcl} d : \Omega^p_{\mathcal{C}^k} & \longrightarrow & \Omega^{p+1}_{\mathcal{C}^{k-1}}(U, \mathbb{K}) \\ \omega & \longmapsto & d\omega \end{array}$$

L'application d est linéaire, i.e.,

$$d(\lambda \omega_1 + \mu \omega_2) = \lambda d\omega_1 + \mu d\omega_2$$

Exemple 4.6 *Soit ω une 1-forme différentielle, telle que*

$$w = P(x,y)dx + Q(x,y)dy + R(x,y)dz \in \Omega^1_{\mathcal{C}^1}(U,\mathbb{K})$$

et P, Q et $R \in \mathcal{C}^1$, alors

$$\begin{aligned} d\omega(x) &= (\frac{\partial P}{\partial x}dx\wedge dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\wedge dx + \frac{\partial P}{\partial z}dz\wedge dx) \\ &+ (\frac{\partial Q}{\partial x}dx\wedge dy + \frac{\partial P}{\partial y}dy\wedge dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\wedge dy) \\ &+ (\frac{\partial R}{\partial x}dx\wedge dz + \frac{\partial R}{\partial y}dy\wedge dz + \frac{\partial R}{\partial z}dz\wedge dz) \end{aligned}$$

alors

$$d\omega(x) = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dy\wedge dz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dz\wedge dx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dx\wedge dy$$

Remarque 4.7

1. *Le vecteur associe est, s'appelle le vecteur rotationel*

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$$

2. *Soit $w = a_1dy\wedge dz + a_2dz\wedge dx + a_3dx\wedge dy \in \Omega^1_{\mathcal{C}^1}(U,\mathbb{K})$, alors le vecteur de la divergence de $\overrightarrow{A} = (a_1, a_2, a_3)$ noté $div(\overrightarrow{A})$ défini par :*

$$div(\overrightarrow{A}) = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial a_i}{\partial x_i}$$

3. *Si $n = 2$ la composante z de la quantité $\frac{\partial a_3}{\partial z}$ est ignoré.*

Définition 4.11 *Soit $\omega \in \Omega^p_{\mathcal{C}^k}$, $p \geq 1$*
1- On dit que w est fermé sur U si $dw = 0$.
2- On dit que w est exacte sur U, s'il existe un $\alpha \in \Omega^p_{\mathcal{C}^k}$ tel que $\omega = d\alpha$, on dit alors α est une primitive de ω

Remarque 4.8

1. *$w = P(x,y)dx + Q(x,y)dy + R(x,y)dz \in \Omega^1_{\mathcal{C}^1}(U,\mathbb{K})$ est fermé $\Leftrightarrow \overrightarrow{rot}(P,Q,R) = 0_{vect}$*
2. *Soit $w = a_1dy\wedge dz + a_2dz\wedge dx + a_3dx\wedge dy$ est fermé $div(\overrightarrow{A}) = \frac{\partial a_1}{\partial x} - \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} = 0$*
3. *$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$, alors $\forall i \in 1,2,...,n$: $\omega_i = \frac{\partial\alpha}{\partial x_i}$, donc pour déterminer α revient donc à résoudre un système d'équation aux dérivées partielles.*
4. *Si $\omega = d\alpha$ est une forme exacte de classe $\mathcal{C}^1$, alors grâce au théorème de Schawrtz, alors pour $i \neq j$ $i, j \in 1,2,...,n$ on a*

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2\alpha}{\partial x_i\partial x_j} = \frac{\partial\omega_j}{\partial x_i}$$

5. *$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$ une forme différentielle fermé, si $i \neq j$*

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial\omega_j}{\partial x_i}$$

Définition 4.12 *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*
On dit que l'ouvert U est étoilé s'il existe un point $a \in U$ tel que pour tout point m de U le segment $[am]$ est inclu dans U.

Exemple 4.7
1- $\mathbb{R}^2$ est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$.
2- Une partie convexe de $\mathbb{R}^2$ est étoilée.
3- L'ouvert $\mathbb{R}^2\backslash_{\{0,0\}}$ n'est pas étoilé.

Théorème 4.1 *(de Poincaré)*
Si U est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$, alors toute forme diférentielle sur U qui est fermé est exacte.