Chapitre 5

Intégration des formes différentielles sur les sous-variétés

Soit $\omega = a(x)dx_1 \wedge dx_2 \wedge .... \wedge dx_p$ une p-forme différentielle sur un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ et A un sous-ensemble mesurable de V.
On définit l'intégrale de ω sur A par :

$$\int_A \omega = \int_A a(x)dx_1 \wedge dx_2 \wedge .... \wedge dx_p$$

pour vu que cette dernière intégrale ait un sens, c'est–dire que, si $a(x)$ est intégrable sur A.
Pour tout difféomorphisme φ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ sur V préservant l'orientation, on a

$$\int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^* \omega = \int_A \omega.$$

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^k$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ une aplication différentiable. Si B est un sous-ensemble mesurable de U et ω est une p-forme différentielle définie sur un voisinage de $\varphi(B)$, on peut définir

$$\int_B \varphi^* \omega$$

quand cela un sens.

5.0.1 Intégrale d'une 1-forme différentielle

Soit $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$ une 1-forme différentielle continue sur U et

$$\begin{array}{rcl} \gamma : I = [a,b] & \longrightarrow & U \\ t & \longmapsto & (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) \end{array}$$

une courbe (arc) paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 5.1 *On appelle intégrale de la forme différentielle ω suivant le chemin fini γ, le réel*

$$\begin{aligned} \int_\gamma \omega(x) = \int_I \gamma^* \omega &= \int_a^b \omega(\gamma(t))\gamma^{'} dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n \omega_i(\gamma(t)) x_i^{'}(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_a^b \omega_i(\gamma(t)) x_i^{'}(t) dt \end{aligned}$$

Proposition 5.1
Si $\omega = df$ est une forme exacte de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors pour tout arc

$$\gamma : [a,b] \to U$$

on a

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Proposition 5.2

1. *Si* ω_1 *et* ω_2 *sont deux formes différentielles continues sur* U *et* γ *un arc paramétré sur* U*, on a alors pour tout* α, β *on a*
$$\int_\gamma (\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) = \alpha \int_\gamma \omega_1 + \beta \int_\gamma \omega_2 : \qquad \textit{Linéarité}$$
2. *Si* $\gamma : [a,b] \to U$ *un chemin paramétré de calsse* $\mathcal{C}^1$*,* $c \in [a,b]$ *et* ω *une forme différentielle continue sur* U*, alors*
$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma|_{[a,c]}} \omega + \int_{\gamma|_{[c,b]}} \omega$$

5.0.2 Formule de Green-Riemann

Définition 5.2

1. *On dira qu'un ouvert borné* Ω *de* $\mathbb{R}^2$ *a un bord de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux, si sa frontière* $\partial\Omega$ *est union finie de supports de courbes* γ_i*,* $i = 1, 2, ..., n$ *fermées simples et* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux.*
2. *On dira que* $\partial\Omega$ *est orienté de sorte que* Ω *soit sa gauche, si pour tout* $i = 1, 2, ..., n$ *et lorsque* t *croit le point* $\gamma_i(t)$ *se déplace en laissant* Ω *sa gauche : cela signifie qu'en point* $\gamma_i(t)$*, la base* $(\nu, \gamma_i'(t))$ *est directe où* ν *est le vecteur normal sortant au point* $\gamma_i(t)$*.*

Remarque 5.1 *Si* U *est un ouvert contenant l'adhérence* $\overline{\Omega}$ *de* Ω *et* ω *est une 1-forme continue sur* U*, alors*
$$\int_{\partial\Omega} \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} \omega.$$

On considère maintenant un ouvert élémentaire Ω de $\mathbb{R}^2$
$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ a < x < b,\ \varphi_1 < y < \varphi_2\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ c < y < d,\ \psi_1 < x < \psi_2\right\} \end{aligned}$$
avec $a < b,\ c < d,\ \varphi_1$ et φ_2 sont $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a,b]$ même pour $\psi_1,\ \psi_2$ sont $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[c,d]$, et on a $\varphi_1 \leq \varphi_2$ et $\psi_1 \leq \psi_2$

Lemme 5.1 *Soient* $P(x,y)dx$ *et* $Q(x,y)dy$ *deux 1-forme différentielle continues sur un ouvert* U *contenant* $\overline{\Omega}$*, alors on a*
$$\int_{\partial\Omega} P(x,y)dx = \int_a^b \left[P(t,\varphi_1(t)) - P(t,\varphi_2(t))\right] dt$$
et
$$\int_{\partial\Omega} Q(x,y)dy = \int_c^d \left[Q(t,\psi_1(t)) - Q(t,\psi_2(t))\right] dt$$

Théorème 5.1 *(de Green-Riemann)*
Soit Ω *un ouvert élémentaire de* $\mathbb{R}^2$ *et et* ω *est une 1-forme de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur un ouvert contenant* $\overline{\Omega}$*, alors on a*
$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega.$$
On rappelle que si on note $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$*, on a*
$$\int_\Omega d\omega = \int\int_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Remarques 5.1

1. *Ce résultat peut être étendus des ouverts plus généraux, par exemple des ouverts simples.*
2. *La formule de Green-Riemann est utile dans les deux sens.*
3. *Selon le problème considéré on peut vouloire ramener un calcul d'intégrale double au d'une calcul d'une intégrale curviligne ou l'inverse.*

Définition 5.3 *On appelle champ de vecteur sur* U*, toute application de* U *dans* $\mathbb{R}^n$ *:*
$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{F} : U & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ M & \longmapsto & \overrightarrow{F}(M) \end{array}$$
les éléments de U *sont considérés comme des points.*
Une application de U *dans* $\mathbb{R}$ *est par fois appelée champ de scalaire.*

5.0.3 Formule de Stokes

On vu au section précédente la formule de Green-Riemann qui est un analogue du théorème fondamental de l'analyse pour la dimension 2.
On appelle que dans tous les cas il s'agit d'exprimer une intégrale sur un domaine en fonction d'une intégrale sur le bord de ce domaine.

Théorème 5.2 *(de Stokes)*
Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ à bord compacte, orienté de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et de classe $\mathcal{C}^2$, on munit le bord $\partial\Omega$ de l'orientation induite par l'orientation de M.
Soit ω une forme différentielle de degré $p-1$ de classe $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage de M, alors on a

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_M d\omega.$$

5.0.4 Intégration d'une forme différentielle sur une p-courbe

De même qu'on a pu intégrer des 1-formes sur des courbes, on va maintenant définir d'une 2-forme sur une surface et plus généralement d'une p-forme sur une p-courbe.
• Pour les intégrales curvilignes l'idées était d'utiliser un paramétrage du chemin considéré pour se ramener une intégrale sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
• Pour une surface on va se ramener de la même façon une intégrale sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
• L'intégrale pour p-courbe sera obtenue en calculant une intégrale sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$

Définition 5.4 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$*
On appelle p-courbe de U une application injective $\gamma : V \to U$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $V \subset \mathbb{R}^p$ telle que $d_y\gamma$ est de rang p pour tout $y \in V$. L'image $\gamma(V)$ d'une p-courbe est appelé suport de cette courbe.

Remarques 5.2

1. *Une 0-courbe de $\mathbb{R}^n$ s'identifie un pointde $\mathbb{R}^n$.*
2. *Une 1-courbe est une courbe paramétrée.*
3. *Une 2-courbe est une nappe paramétrée.*

Définition 5.5 *Soient $V \subset \mathbb{R}^p$ et $U \subset \mathbb{R}^n$ des ouverts. $\gamma : V \to U$ une p-courbe et ω une p-forme différentielle continue sur U, alors on pose*

$$\int_\gamma \omega = \int_V \gamma^*\omega$$

Remarque 5.2 *Si ω est une 1-forme sur U et $\gamma : [a,b] \to U$ est une courbe paramétrée, on retrouve bien la définition*

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t))\gamma^{'}(t)dt$$

5.1 Sous-variétés orientées

Définition 5.6 *On appelle orientation d'un espace vectoriel de dimension fini E, une application ν de l'ensemble des bases de E vers $\{-1,+1\}$, telle que $\nu(B) = \nu(\widetilde{B})$ si et seulement si $det(B\widetilde{B}) > 0$ où $\widetilde{B}$ base duale.*

Définition 5.7 *Une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ est dite orientable s'il existe une application ν qui tout $a \in M$ associe une orientation $\nu(a)$ de l'espace tangent T_aM de sorte que $\nu(a)$ depende continuement de a.*

Remarque 5.3 *Si M est une sous-variété de dimension $d = 1$, choisir une orientation revient à choisir pour tout $a \in M$ un vecteur $\tau(a) \in T_aM\backslash\{0\}$ qui dépend continuement de a, le vecteur $\tau(a)$ montre le sens de parcours positifs*

5.2 Sous-variété à bords

C'est comme les sous-variétés mais on autorise un bord.

Définition 5.8 *Un ensemble M de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété à bord de dimension $d = p$, si pour tout $a \in M$ il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme φ entre le voisinage U de a et le voisinage Ω de 0 :zéro.*
- $\varphi(a) = 0$.
- *Soit* $\varphi(U \cap M) = \{(y_1, y_2, ..., y_n) \in \Omega;\ y_{p+1} = ... = y_n = 0\}$.
- *Soit* $\varphi(U \cap M) = \{(y_1, y_2, ..., y_n) \in \Omega;\ y_1 \leq 0 \text{ et } y_{p+1} = ... = y_n = 0\}$

Un tel difféomorphisme est une coordonnée rectifiant M en a

Remarques 5.3

1. *Le bord de M, noté ∂M est l'ensemble des points $a \in M$ vérifiant la deuxième condition.*
2. *Une sous-variété peut être vue comme une sous-variété à bord de bord vide.*
3. *Si M est une sous-variété à bord, alors $M \backslash \partial M$ est une sous-variété.*

Proposition 5.3
1. *Le bord d'une sous-variété bord de dimension p, est une sous-variété de dimension $p-1$*
2. *Si M est une sous-variété bord de $\mathbb{R}^n$ orientable, alors ∂M est une sous-variété orientable de $\mathbb{R}^n$*

Définition 5.9 *Si M est orienté par ν, $a \in M$ et φ est une coordonnée rectifiant M en a, alors l'orientation ν_∂ de ∂M est définie par*

$$\nu_\partial(a; (d_a\varphi)^{-1}(e_1), (d_a\varphi)^{-1}(e_2), ..., (d_a\varphi)^{-1}(e_p)) = \nu(a; (d_a\varphi)^{-1}(e_1), (d_a\varphi)^{-1}(e_2), ..., (d_a\varphi)^{-1}(e_p))$$

avec $(d_a\varphi)^{-1}(e_1)$: vecteur extérieur.

Théorème 5.3 *(du Rotationnel)*
Soit S une surface orienté à bord de $\mathbb{R}^3$
Soit $\overrightarrow{F}$ un champ de vecteur de classe $\mathcal{C}^1$ défini au voisinage de $S \cup \partial S$, alors ona

$$\iint_S \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\nu}\, dA = \oint_{\partial S} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\tau}\, ds$$

où $\overrightarrow{\nu}$: est la normale la surface S.
$\overrightarrow{\tau}$: est le vecteur tangent ∂M

Théorème 5.4 *(Formule d'Ostrograsdskii-théorème de flux-divergence)*
Soit $\overrightarrow{F}$ un champ de vecteur sur $\mathbb{R}^3$.
Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface lisse fermée dilimitant un ouvert Ω et orienté par le champ de vecteur $\overrightarrow{N}$ normal S et pointant vers l'extérieur de S, alors

$$\iiint_S div(\overrightarrow{F}) dV = \iint_S \overrightarrow{F}.\overrightarrow{\nu}\, dA$$

5.3 Formules d'analyse vectorielle

Soient f, g des champs scalaires et $\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}$ des champs vectoriels de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les formules suivantes :
- $div(\overrightarrow{F} + \lambda\overrightarrow{G}) = div(\overrightarrow{F}) + \lambda div(\overrightarrow{G})$
- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{F} + \lambda\overrightarrow{G}) = \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{F}) + \lambda\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{G})$.
- $div(f\overrightarrow{F}) = f.div(\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{grad}(f)(\overrightarrow{F})$.
- $\overrightarrow{rot}(f\overrightarrow{F}) = f.\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{grad}(f) \wedge (\overrightarrow{F})$.
- $\overrightarrow{F}$ admet un potentiel scalaire, alors $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel f, i.e.,

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{grad}(f), \quad \int_\Gamma \overrightarrow{F}(M)\overrightarrow{dM} = f(B) - f(A)$$

5.4 Série d'exercices pour chapitre VI

Université Mohamed Boudiaf - M'sila
Faculté de MI — 3 ième année Maths LMD 2015/2016
Département de Mathématiques — Module : Géométrie différentielle

Série de TD $N^0 = 03$
sur les formes différentielles

Exercice 01 :
Déterminer si les applications suivantes de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sont bilinéaires
1. $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3x_1y_1$
2. $f((x_1, x_2), (y_1; y_2)) = x_1x_2$
3. $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1$

II- Dans chacun des cas ci-dessous, dire si l'application ϕ de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, est multilinéaire.
1. $\phi(x, y, z) = x_1 + y_2 + z_3$
2. $\phi(x, y, z) = x_1y_3 + y_2z_1 + z_3x_2$
3. $\phi(x, y, z) = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2$

Exercice 02 :
Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, on considère les applications ω et α suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \omega : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) & \mapsto & x_1y_2 - x_2y_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \alpha : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & x_3 \end{array}$$

1- Montrer que ω est antisymétrique et bilinéaire.
2- A l'aide de ω et α, on définit une nouvelle application, notée $\omega \wedge \alpha$, de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} \omega \wedge \alpha : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (X, Y, Z) & \mapsto & \omega(X, Y)\alpha(Z) + \omega(Y, Z)\alpha(X) + \omega(Z, X)\alpha(Y) \end{array}$$

a- Montrer que $\omega \wedge \alpha$ est alternée.
b- Montrer que $\omega \wedge \alpha$ est bilinéaire.
c- Calculer $\omega \wedge \alpha(e_1, e_2, e_3)$.
d- Déduire que $\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^3 :\ \omega \wedge \alpha(X, Y, Z) = \det(X, Y, Z)$.

Exercice 03 :
1- Simplifier $dx \wedge dz \wedge dy + 3dz \wedge dy \wedge dx - dy \wedge dz \wedge dx + 5dx \wedge dx \wedge dx - 7dz \wedge dz \wedge dy$.
2- Les formes différentielles suivantes sont-elles fermées ? sont-elles exactes ? Préciser une primitive le cas échéant.
(i) $xdy - ydx$, (ii) $(x^2 + 3y)dx - y^3dy$, (iii) $\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$, (vi) $e^x(y + x)dx + (e^x + 3e^y)dy$

Exercice 04 :
Soit la forme différentielle

$$\omega = (x^2 + y^2 - 1)dx - 2ydy$$

1- Montrer que ω n'est pas exacte.
2- Déterminer la fonction φ (une variable) telle que la forme différentielle $\omega_1 = \varphi(x)\omega$ soit fermée.
3- Montrer aue ω_1 est alors exacte et détermine une primitive.

Exercice 05 :
Soit $dx_1, ..., dx_p$ une base dans l'espace des formes dfférentielles $\Omega^1(U \subset \mathbb{R}^p)$.
1- Le produit extérieur a pour propriété $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$ pour $\alpha, \beta \in \Omega^1(U \subset \mathbb{R}^p)$. En déduire que $dx_i \wedge dx_i = 0,\ \forall i \in [1, p]$.
2- Existe-t-il une 1-forme $\omega \in \Omega^1(U \subset \mathbb{R}^p)$ telle que $\omega \wedge \omega \neq 0$?
3- Existe-t-il une 2-forme $\omega \in \Omega^2(U \subset \mathbb{R}^p)$ telle que $\omega \wedge \omega \neq 0$?

Exercice 06 :
En utlisant la formule de Green-Riemann, calculer les intégrales :
1- Soit la courbe C un cercle donné par l'équation $x^2 + y^2 = a^2$
(a)$\oint_C xydx + (x + y)dy$, (b) $\oint_C (x - y)dx + (x + y)dy$, (c) $\oint_C x^2ydx + xy^2dy$
2- Soit la courbe γ un ellipse donné par l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
(a) $\oint_\gamma (x - y)dx + (x + y)dy$
3- Soit la courbe T un triangle ABC de sommets $A(a, 0), B(a, a), C(0, a)$
(a)$\oint_T y^2dx + (x + y)^2dy$

Exercice 07 :
Vérifier le théorème de Stokes avec.
- Le champ de vecteurs $F(x, y) = (x^2y, 2xy)$
- La surface $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.