Chapitre 6

Annexe

Université Mohamed Boudiaf - M'sila
Faculté de MI
Département de Mathématiques

Durée :1h et 30 m
3 ième année Maths LMD 2015/2016
Module : Géométrie différentielle

Examen final

Exercice 01(Question de cours) :(07pts)
1- Donner la définition de :

1. Immersion, submersion et étale.
2. Variété topologique et variété différentielle.
3. D'une forme différentielle de degré p, d'une 1-forme différentielle fermée.
4. Enoncer le théorème : d'iversion local, de Poincaré et de Green-Riemann.

2- Justifier la réponce : (Oui avec un exemple, Non avec un contre exemple)

1. Toute sous-variété est une variété différentielle.
2. Toute variété différentielle est une sous-variété.
3. Toute sous-variété est un ouvert.

Exercice 02 : (05pts)
Soit l'ensemble M_c défini par :

$$M_c = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 = c\right\}$$

- Si $c=1$, M_1 est une sous-variété ?, si la réponce oui qu'elle est sa dimension.
- Déterminer l'espace tangent $T_{(0,0,1)}M_1$.

Exercice 03 :(05pts)
1- Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de point $(0,1)$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que l'ensemble

$$\{(x,y) \in U^2;\ x^3+y^3+3xy-1=0\}$$

soit le graphe d'une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert V de $\mathbb{R}$, vérifiant $g(0)=1$.
2- Donner un developpement limité l'ordre 1 de g en point 0.

Exercice 04 :(03pts)
Soient ω_1 *et* ω_2 deux 1-forme différentielle :

$$\omega_1 = \frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy,\quad \omega_2 = 2xzdx - 2yzdy + (x^2-y^2)dz$$

1. Calculer $d\omega_1,\ d\omega_2$ *et* $\omega_1 \wedge \omega_2$
2. Montrer que ω_1 est fermée, calculer sa primitive $f = d\omega_1$

Barème :$(0.5 \times 13)+(\mathbf{3}+\mathbf{2})+(\mathbf{3}+\mathbf{2})+(0.5\times 4+\mathbf{1})$ Bon courage

---

Corrigé type d'examen final

Exercice 01(Question de cours) :(07pts)

1- La définition de : Soit $\varphi : \mathcal{O} \subset E \longrightarrow F$ de classe C^k et $x \in \mathcal{O}$

1. on dit que φ est une immersion en x, si df_x est injective.
2. On dit que φ est une submersion en x, si df_x est surjective.
3. Si $\varphi : \mathcal{O} \longrightarrow F$ est la fois submersion en x et immersion en x, on dit que φ est étale.
4. Variété topologique : 1- est un espace séparé, 2- Pour tout $m \in M$, il existe un ouvert U *de* M contenant m est un homéomorphisme $\varphi : U \longrightarrow W \subset \mathbb{R}^n$ *ou* W un ouvert de $\mathbb{R}^n$
5. On appelle variété différentielle Mde dimension n est de classe C^k la donnée de l'espace topologique sépare M et d'un système de carte de classe C^k et de dimension n
6. On appelle forme différentielle de degré p sur l'ouvert $U \subset E$, toute application ω de la forme

$$\begin{array}{rcl} \omega : U \subset E & \longrightarrow & A^p(U, \mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & \omega(x) = \sum\limits_{1 \le i_1, i_2, \ldots, i_p \le n} a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_p} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \end{array}$$

   où $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_p}$ sont des fonctions continues.
7. On appelle ω 1-forme différentielle fermée si $d\omega = 0$.
8. **Théorème 6.1** *:(d'inversion locale)*
   Soient U et V deux ouverts de E et F et soit $\varphi \in C^k(U, V)$ une application étale en $x \in U$, alors il existe un ouvert $\widetilde{U}$ et U contenant x tel que $\varphi|_{\widetilde{U}} :\ \widetilde{U} \longrightarrow \varphi(U) \subset F$ Soit C^k-difféomorphisme de $\widetilde{U}$ dans $\varphi(\widetilde{U})$
9. **Théorème 6.2** *(de Green-Riemann)*
   Soit Ω un ouvert élémentaire de $\mathbb{R}^2$ et et ω est une 1-forme de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert contenant $\overline{\Omega}$, alors on a
   $$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega.$$
   On rappelle que si on note $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, on a
   $$\int_\Omega d\omega = \int\int_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$
10. **Théorème 6.3** *(de Poincaré)*
   Si U est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$, alors toute forme diférentielle sur U qui est fermé est exacte.

2- Justifier la réponce : (c–d, Oui avec exemple, Non avec contre exemple)

1. Oui, par exemple : le cercle
2. Non ; Le carré
3. Oui, la sphère, un intervalle

==

Exercice 02 : (05pts)

Soit l'ensemble M_c défini par :

$$M_c = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 = c\right\}$$

- Si $c = 1$, M_1 est une sous-variété, si la réponce oui qu'elle est sa dimension.
- Déterminer l'espace tangent $T_{(0,0,1)}M_1$.

$M_1 = S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

$$\forall x \in M_1,\ x = (x_0, y_0, z_0)\ \ \exists U, x \in U$$

Posons $\varphi\,(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

φ est de classe C^∞, $M_1 \subset \mathbb{R}^3$

$$\varphi^{-1}\,(0) = U \cap M_1 = \mathbb{R}^3 \cap M_1 = M_1$$

φ est submersion ?

$$\forall (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$$

$$df_{(x_0,y_0,z_0)} = (2x_0 \quad 2y_0 \quad 2z_0)$$

$$rang\ d_\varphi = \begin{cases} 1 & x_0 = y_0 = z_0 \neq 0 \\ 0 & \quad x_0 = y_0 = z_0 = 0 \end{cases}$$

$$(0,0,0) \notin S^2$$

$$d_\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\forall x \in M_1,\ rang\ d_\varphi = 1 = \dim \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \varphi$ est submersion.
Alors $S^2 = M_1$ est une sous-variété de dimension $d = n - p = 2$ et de classe C^∞.

Soit $S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$
$m = (0,0,1)$ Calculer $T_{(0,0,1)}S^2$
Solution :
Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

$$f^{-1}(0) = U \cap M_1 = M_1 \quad \setminus \quad M_1 = S^2$$

<u>f submersion</u>
$\forall x \in \mathbb{R}\ \ df_x$ surjective

$$d_{(x,y,z)}f = (2x \quad 2y \quad 2z)$$

$$rang\ \left(d_{(x,y,z)}f\right) = 1 = \dim \mathbb{R}$$

$\Longrightarrow\ df_x$ est surjective $\Longrightarrow f$ est submersion
Alors :$T_{(0,0,1)}S^2 = \ker(f\ (0{,}0{,}1))$

$$d_{(0,0,1)}f\ \ : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \longmapsto (0\ 0\ 2)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

alors $df_{(0,0,1)}H = 2h_3, H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$

$$T_{(0,0,1)}S^2 = \{(h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3 :\ df_{(0,0,1)}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0\}$$

$$= \{(h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3\ ,\ 2h_3 = 0\}$$

$T_{(0,0,1)}M_1 = T_{(0,0,1)}S^2$ est le plan.

==

<u>Exercice 03</u> :(05pts)
1- Soit

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^3 + y^3 + 3xy - 1 \end{array}$$

- La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
$\varphi(0,1) = 0$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = 3y^2 + 3x \Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,1) = 3 \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ est inversible.
D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un ouvert V de $\mathbb{R}$ contenant 0 et un ouvert W de $\mathbb{R}$ contenant 1, et une application $g : V \to W$ tels que :

a- $V \times W \subset U$

b- $\varphi(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$, $\varphi(0,1) = 0 \Leftrightarrow g(0) = 1$.

2- Le developpement limité l'ordre 1 de g au voisinage de 1.
$g(x) = g(0) + \frac{(x)}{1!}g^{'}(0) + O(x)\ g(0) = 1$ et

$$g^{'}(0) = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,1)}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,1)} = -\frac{3}{3} = -1$$

donc $g(x) = 1 - x + 0(x)$

==

<u>Exercice 04</u> : (03pts)
Soient $\omega_1\ et\ \omega_2$ deux 1-forme différentielle :

$$\omega_1 = \frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy,\ \ \omega_2 = 2xzdx - 2yzdy + (x^2 - y^2)dz$$

1. $d\omega_1 = \frac{2}{y}dx \wedge dx - \frac{2x}{y^2}dy \wedge dx - \frac{2x}{y^2}dx \wedge dy + \frac{2x^3}{y^3}dy \wedge dy = \frac{2x}{y^2}dx \wedge dy - \frac{2x}{y^2}dx \wedge dy = 0$
2. $d\omega_2 = 2zdx \wedge dx + 2xdz \wedge dx - 2ydz \wedge dy - 2zdy \wedge dy + 2xdx \wedge dz - 2ydy \wedge dz = 0$
3.

$$\begin{aligned}\omega_1 \wedge \omega_2 &= (\frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy) \wedge (2xzdx - 2yzdy + (x^2 - y^2)dz) \\ &= (4xz + \frac{2x^3z}{y^2})dx \wedge dy + (\frac{2x^3}{y} - 2xy)dx \wedge dz - (\frac{x^4}{y^2} - x^2)dy \wedge dz\end{aligned}$$

4. ω_1 est fermée, car $d\omega_1 = 0$
5. Sa primitive $f = d\omega \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} \end{cases}$

   $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y} \Rightarrow f(x,y) = \frac{x^2}{y} + C(y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} + C'(y) \Rightarrow C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = cst$

   alors $f(x,y) = \frac{x^2}{y} + cst$

==

Université Mohamed Boudiaf - M'sila
Département de Mathématiques — Module : Géométrie différentielle
Durée :1h et 30 m

Examen de rattrapage

==

Exercice 01 :(06pts)

1- Donner la définition de :

1. Homéomorphisme, difféomorphisme et $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme .
2. Carte, Atlas et deux atlas équivalents.
3. Champ de vecteurs, divergence et rotationnelle.

2- Soit l'application φ telle que

$$\begin{array}{rcl}\varphi : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (\sin(\frac{y}{2}) - x, \sin(\frac{x}{2}) - y)\end{array}$$

1. Justifier que $\varphi \in \mathcal{C}^1$
2. Calculer sa différentielle, $d\varphi$ est inversible ?
3. Montrer que φ est $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme
4. Déduire que φ est un difféomorphisme local de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ sur son image et que cette image est ouverte.

==

Exercice 02 : (05pts)

- Les ensembles suivants sont-ils des sous-variétés de $\mathbb{R}^3$.

$$M_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = x, \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$$M_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 - z < 0, \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

- Calculer $T_mM_i, \ i = 1,2 \ et \ m \in M_i$ dans les cas affirmatif.

Soit M le cylindre : $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1, \ 0 < z < 1\}$.

- Montrer que M est produit de deux variétés $M_1 \times M_2$.
- Expliciter M_1 et M_2, Qu'elle est la dimension de M $\dim(M)$.

==

Exercice 03 :(05pts)

1- Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de point $(0,0,1)$ dans $\mathbb{R}^3$ tel que l'ensemble

$$\{(x,y,z) \in U^3; \ x^2 + y^2 + z^2 - \cos(xyz) = 0\}$$

soit le graphe d'une fonction g définie sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$.

2- Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$.

3- Calculer ses dérvées partielles en point $(0,0)$.

==

Exercice 04 :(04pts)

Soit ω_1 une 1-forme différentielle telle que :

$$\omega_1 = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

1. Donner le domaine de définition de ω_1
2. Calculer $d\omega_1$ et préciser son degré
3. Est-ce que ω_1 est fermée. ?
4. Est-ce que ω_1 est exacte. ?

Bon courage

Université Mohamed Boudiaf - M'sila
Faculté de MI
Département de Mathématiques
Date : 16 mai 2017
3 ième année Maths LMD 2016/2017
Module : Géométrie différentielle
Durée :1h et 30 m

Examen final

`La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la note finale.`

Exercice 01(Questions de cours) :(05pts)

1- Donner la définition de :

(i)- Plongement, forme différentielle alternée, Fibré tangent.

(ii)- Enoncer le théorème de : Morse et Sard.

(iii)- $\Lambda^p(U \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{K})$: L'ensemble .....

(iv)- $\Omega^p_{\mathcal{C}^k}(U \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{K})$: L'ensemble .....

2- Réponder par :(Oui, Non, pas évident)

(i)- Si M est une sous-variété, T_mM est un espace vectoriel, $\forall m \in M$?.

(ii)- Si la dim(M)=n, T_mM est de dimension n, $\forall m \in M$?.

(iii)- Si M est une variété différentielle, T_mM est un espace vectoriel ?.

Exercice 02 : (05pts)

Soit les ensembles suivants
$M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 - x = 0\}$.
$M_2 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2, \; 0 \le x < 1\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2, \; 0 \le y < 1\}$.
$M_3 = \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$: le tore.
- Est ce que M_1, M_2 et M_3 sont des sous-variétés ?, si la réponce oui qu'elle est sa dimension et régularité.

Exercice 03 :(05pts)

1- Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de 0 et un voisinage ouvert W de 1, tel que l'ensemble

$$\{(x, y) \in V \times W; \; 1 - ye^x + xe^y = 0\}$$

soit le graphe d'une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur V à valeur de W, vérifiant $g(0) = 1$.
2- Donner un developpement limité à l'ordre 1 de g en point 0.

Exercice 04 :(05pts)

I- Soit le champ de vecteur $\overrightarrow{F} = e^y \, \widehat{i} + (xe^y - 2y) \, \widehat{j}$

(i)- Calculer la divergence $\overrightarrow{div}(\overrightarrow{F})$ et le rotationnel $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{F})$

II- Soient ω_1 *et* ω_2 deux 1-forme différentielle :

$$\omega_1 = e^y dx + (xe^y - 2y)dy, \quad \omega_2 = 2xydx + x^2 dy$$

(i)- Calculer $d\omega_1, \; d\omega_2, \; \omega_1 \wedge \omega_2$ *et* $d(\omega_1 \wedge \omega_2)$

(ii)- Montrer que ω_1 est fermée, calculer sa primitive $\omega_1 = df$

Barème : $(0.5 \times 10) + (2+1+2) + (4+1) + (0.5+1+0.5 \times 4 + 0.5 + 1)$ Bon courage

===

Corrigé type d'examen final

Exercice 01(Questions de cours) :(05pts)

1- La définition de : Soit $\varphi : \mathcal{O} \subset E \longrightarrow F$ de classe C^k et $x \in \mathcal{O}$

1. **Définition 6.1** *(Plongement) Soient M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^p$ un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de M sur $f(M)$. On dit que f est un plongement si, $f(M)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.*
2. **Définition 6.2** *Soit*
$$\begin{array}{rcl} f : E \times E \times E .... \times E = E^p & \to & \mathbb{K} \\ (x_1, x_2, ..., x_p) & \mapsto & f(x_1, x_2, ..., x_p) \end{array}$$
est dite forme linéaire alternée si,
$$f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_p) = -f(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_p),\ \forall i, j = 1, p \text{ et } i \neq j$$
3. **Définition 6.3** *: Soit M une variété de dimension n et de classe $\mathcal{C}^k$. On note par*
$$TM = \underset{m \in M}{\cup} T_m M$$
l'ensemble de tous les vecteurs tangents en tout point de M. On appelle TM le fibré tangent.
4. **Théorème 6.4** *(de Sard)Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ est une immersion en x de classe $\mathcal{C}^k$, alors il existe un voisinage $\widetilde{U}$ de x telle que $f(\widetilde{U})$ est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^n$.*
5. **Théorème 6.5** *(de Morse)Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, on suppose que 0 est un point critique non dégénéré, alors il existe un difféomorphisme local φ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$. Alors $T_0\varphi = Id$ et*
$$f(x) = f(0) + q(\varphi(x))$$
avec q une forme quadratique non dégénéré.
6. $\Lambda^p(U \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{K})$: L'ensemble des p-formes linéaires alternée.
7. $\Omega^p_{\mathcal{C}^k}(U \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{K})$: L'ensemble des formes différentielles de degré p et de classe $\mathcal{C}^k$

2- La réponce : (Oui, Non, pas évident)

1. Oui.
2. Oui.
3. pas évident (pas toujours).

===

Exercice 02 : (05pts)

1. $M_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } x^2 + y^2 - x = 0\right\}$(fenêtre de Viviani) :
   M_1 n'est pas une sous-variété, car
   Posons $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x^2 + y^2 - x)$
   F est de classe C^∞, $M_1 \subset \mathbb{R}^3$
   $F^{-1}(1, 0) = U \cap M_1 = \mathbb{R}^3 \cap M_1 = M_1$.
   F est submersion ?
$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ dF_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x - 1 & 2y & 0 \end{pmatrix}.$$
   Soit $m_=(1, 0, 0) \in M, m_2 = (0, 0, 1) \in M$ mais
   $dF_{(1,0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rang\ dF_{m_1} = 1$
   $dF_{(0,0,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rang\ dF_{m_1} = 2$
   Alors dF n'est pas sujective $\Rightarrow$ F n'est pas une submersion $\Rightarrow$ M_1 n'est une sous-variété.

2. Soit $M_2 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \le x < 1\} \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \le y < 1\}$.
   D'après le graphe, M_2 n'est pas une sous-variété, puisque au point 0 on a deux (02) espaces tangents.

3. $M_3 = \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$: le tore : est un sous-variété
   S^1 : est un sous-variété de dimension $d = 1$ et de classe C^∞, d'après le théorème (voir le cours : le produit de deux sous-variétés) M_3 est une sous-variété de dimension
   $dim(M_3) = dim(S^1) + dim(S^1) = 1 + 1 = 2$ et de régularité (classe) $C^{\inf(\infty,\infty)} = C^\infty$.

***

<u>Exercice 03</u> :(05pts)

1- Soit

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 1 - ye^x + xe^y \end{array}$$

- La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

$\varphi(0,1) = 0$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = -e^x + xe^y \Rightarrow \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,1)\right| = |-1| \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ est inversible.

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un ouvert V de $\mathbb{R}$ contenant 0 et un ouvert W de $\mathbb{R}$ contenant 1, et une application $g : V \to W$ tels que :

a- $V \times W \subset U$

b-

$$E = \{(x,y) \in V \times W;\ \varphi(x,y) = 0\} = \{(x, g(x));\ \varphi(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)\}$$

c- $\varphi(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$, $\varphi(0,1) = 0 \Leftrightarrow g(0) = 1$.

2- Le developpement limité l'ordre 1 de g au voisinage de 1.

$g(x) = g(0) + \frac{(x)}{1!} g'(0) + O(x)$ $g(0) = 1$ et

$$g'(0) = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,1)}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,1)} = -\frac{e-1}{-1} = e - 1$$

donc $g(x) = 1 + (e-1)x + 0(x)$

***

<u>Exercice 04</u> : (03pts)

I- $\overrightarrow{F} = e^y\ \widehat{i} + (xe^y - 2y)\ \widehat{j} = (F_1, F_2) = (e^y, xe^y - 2y)$.

La divergence $\overrightarrow{div}(\overrightarrow{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = xe^y - 2$.

Le rotationnel $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{F}) = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} = (0)\widehat{i} + (0)\widehat{j} + (e^y - e^y)\widehat{k} = 0$

II- Soient $\omega_1\ et\ \omega_2$ deux 1-forme différentielle :

$$\omega_1 = e^y dx + (xe^y - 2y)dy, \quad \omega_2 = 2xydx + x^2 dy$$

1. $d\omega_1 = e^y dy \wedge dx + e^y dx \wedge dy + (xe^y - 2)dy \wedge dy = -e^y dx \wedge dy + e^y dx \wedge dy = 0$
2. $d\omega_2 = 2ydx \wedge dx + 2xdy \wedge dx + 2xdx \wedge dy = -2xdx \wedge dy + 2xdx \wedge dy = 0$
3.

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \omega_2 &= (e^y dx + (xe^y - 2y)dy) \wedge (2xydx + x^2 dy) \\ &= 2xye^y dx \wedge dx + x^2 e^y dx \wedge dy + 2xy(xe^y - 2y)dy \wedge dx + x^2(xe^y - 2y)dy \wedge dy \\ &= (x^2 e^y - 2x^2 ye^y + 4xy^2)dx \wedge dy \end{aligned}$$

4. $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = 0$
5. ω_1 est fermée, car $d\omega_1 = 0$

6. Sa primitive $\omega_1 = e^y dx + (xe^y - 2y)dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \Leftrightarrow \omega_1 = df \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = & e^y \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & xe^y - 2y \end{cases}$

   $\frac{\partial f}{\partial x} = e^y \Rightarrow f(x,y) = xe^y + C(y)$
   et
   $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y - 2y \Rightarrow xe^y + C^{'}(y) = xe^y - 2y \Rightarrow C^{'}(y) = -2y \Rightarrow C(y) = -y^2 + cst$
   alors $f(x,y) = xe^y - y^2 + cst$

==

Université Mohamed Boudiaf - M'sila	Date : 10 juin 2018
Faculté de MI	$3^{\text{ème}}$ année Maths LMD 2017/2018
Département de Mathématiques	Module : Géométrie différentielle
Durée :1h et 30 m	Enseignant : `Gagui.B`

Examen de rattrapage

Exercice 01(*Questions de cours*) *:(05pts) Dire si les affirmations suivantes sont V :vraies ou F :fausses.*

1. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application.*
   - *(i)- Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ alors f est différentiable en tout point.*
   - *(ii)- Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ alors il existe ∇f en tout point.*
   - *(iii)- S'il existe ∇f en tout point alors $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.*
2. *Soient M un ensemble non vide et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*
   - *(i)- Tout ouvert est un sous-variété.*
   - *(ii)- Toute variété est une sous-variété.*

==

Exercice 02 : *(05pts) Soit*

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

(1)- Est ce que M est une sous-variété ?, si la réponse oui qu'elle est sa dimension et régularité.

(2)- Calculer $T_{(1,0,0)}M$: l'espace tangent de M au point $m = (1,0,0)$.

==

Exercice 03 *:(06pts)*

I- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$(x,y) \quad \mapsto \quad f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^3 \cos(\frac{1}{x^2+y^2}) & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- *(i)- f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$.*
- *(ii)- Ecrire la matrice Jacobienne $Jf_{(x,y)}$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.*
- *(iii)- f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.*
- *(iv)- Sans faire de calculs, que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$?*
- *(v)- f est - elle un difféomorphisme local.*

II- Soit l'ensemble $E = \{(x,y,z) \in V \times W \subset \mathbb{R}^3; \; x^3 + 4xy + z^2 - 3yz^2 - 3 = 0\}$

- *(i)- Montrer qu'il existe un voisinage ouvert $V \subset \mathbb{R}^2$ de $(1,1)$ et un voisinage ouvert $W \subset \mathbb{R}$ de 1, tel que l'ensemble E soit le graphe d'une fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie sur V à valeur de W, vérifiant $g(1,1) = 1$.*
- *(ii)- Calculer ses dérivées partielles premières au point $(1,1)$.*

==

Exercice 04 *:(04pts)*

- *(i)- Trouver une application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant $\varphi(0) = 0$, telle que la forme différentielle ω suivante soit exacte sur $\mathbb{R}^2$: $\omega = \frac{2xy}{(1+x^2)^2}dx + \varphi(x)dy$*
- *(ii)- Donner une primitive de ω.*
- *(iii)- Déduire la valeur de l'intégrale curviligne $\int_\gamma \omega$, ouγ une ellipse d'équation $3x^2 = -7y^2 + 21$.*
- *(iv)- Refaire le calcul en utilisant le théorème de Green-Riemann.*

Barème : $(1 \times 5) + (3 + 2) + (0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 1 + 3) + (1 + 1 + 1 + 1)$

Bon courage

==

Corrigé type

Exercice 01(Questions de cours) :(03pts)

1. Définitions
   (a) **Définition 6.4** *(sous-variété) voir le cours (06 définitions) .*
   (b) **Définition 6.5** *(variété différentielle) La donnée d'un espace topologique séparé M et un système de carte*
2. la différentiabilité au sens Fréchet $\Rightarrow$ la différentiabilité au sens Gateau
3. La relation est : $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\Rightarrow$ difféomorphisme $\Rightarrow$ homéomorphisme.
4. Si $\omega \in \Omega^p_{\mathcal{C}^k}(U \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, leur dérivée $d\omega \in \Omega^{p+1}_{\mathcal{C}^{k-1}}(U \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.
5. La forme générale d'une 1-forme différentielle est : $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$.

==

Exercice 02 : (05pts)

1. $M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = z\right\}$
   Posons
$$\begin{array}{rcc} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 + y^2 - z \end{array}$$
   f est de classe C^∞, $M \subset \mathbb{R}^3$
   $f^{-1}(\{0\}) = U \cap M = U \cap M = M$.
   f est submersion ?
$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ df_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -1 \end{pmatrix}.$$
   Soit $\forall m \in M \ rang \ dF_m = 1 = dim(\mathbb{R}) \Rightarrow df$ est sujective $\Rightarrow f$ est une submersion $\Rightarrow M$ est une sous-variété.
2. la dimension de M est : $dim(M) = dim(\mathbb{R}^3)$-nombre d'équations $= 3 - 1 = 2$.
3. Régularité(classe) de M est C^∞, donc M est dite sous-variété lisse.
4. L'espace tangent au point $m = (1, 0, 1)$: d'après la définition de point de vue submersion, alors l'espace tangent est défini comme suit : $T_m M = \ker(df_m)$, donc après le calcul on trouve
$$\begin{array}{rcl} T_{(1,0,1}M & = & \{(h_1, h_2, h_3); \ h_3 = 2h_1\} \\ T_{(1,0,1}M & = & \{h_1(1, 0, 2) + h_2(0, 1, 0); \ h_1, h_2 \in \mathbb{R}\} \end{array}$$
   donc l'espace tangent est un espace vectoriel engendré par les deux vecteurs $v_1 = (1, 0, 2), v_2 = (0, 1, 0)$ sont indépendants, alors $dim(T_{(1,0,1}M) = 2 = dim(M)$.

==

Exercice 03 :(06pts)

I- Soit
$$\begin{array}{rcc} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & z^3 + 2z + e^{z-x-y^2} - \cos(x - y + z) \end{array}$$

a- la matrice Jacobienne
$$Jf_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} -e^{z-x-y^2} - \sin(x - y + z) \\ -2ye^{z-x-y^2} - \sin(x - y + z) \\ 3z^2 + 2 + e^{z-x-y^2} + \sin(x - y + z) \end{pmatrix}$$

b- la matrice Jacobienne constitué les dérivées partielles premières, donc les dérivées existent et sont continues, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$

II- On pose

$$\begin{array}{llr} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & z^3+2z+e^{z-x-y^2}-\cos(x-y+z) \end{array}$$

- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Soit le point $(0,0,0)$ $f(0,0,0)=e^0-\cos(0)=1-1=0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=3z^2+2+e^{z-x-y^2}+\sin(x-y+z)\Rightarrow$ $\left|\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)\right|=3\neq 0\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}$ est inversible.

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ contenant $(0,0)$ et un ouvert W de $\mathbb{R}$ contenant 0, et une application $g:V\subset\mathbb{R}^2\to W\mathbb{R}$ tels que :

a- $V\times W\subset U$

b- $f(x,y,z)=0\Leftrightarrow z=g(x,y)$, c-à-d ;

$$E=\{(x,y,z)\in V\times W;\ f(x,y,z)=0\}=\{(x,,y,g(x,y));\ f(x,y,z)=0\Leftrightarrow z=g(x,y)\}$$

c- $f(x,y,z)=0\Leftrightarrow z=g(x,y)$, $f(0,0,0)=0\Leftrightarrow g(0,0)=0$.

2- les dérivées partielles premières au point $(0,0)$.

$$Jf_{(x,y)}=df_{(x,y)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\end{pmatrix}$$

$$dg_{(x,y)}=-\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))\right)^{-1}\left(\partial f_{(x,y,\phi(x,y))}\right)$$

$$dg_{(x,y)}=-\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))\right)^{-1}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,g(x,y)),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,g(x,y))\right]$$

donc

$$dg_{(x,y)}(0,0)=-(2)^{-1}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,1))\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,1))\right]$$

$$dg_{(x,y)}(0,0)=\left[\frac{\partial g}{\partial x}(0,0))\quad \frac{\partial g}{\partial y}(0,0))\right]=-(3)^{-1}\left[-1\quad 0\right]$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)=\frac{1}{3}\\ \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)=0\end{array}\right.$$

==

Exercice 04 : (06.5pts)

I- $\overrightarrow{F}=3(x^2-y)\,\widehat{i}+3(y^2-x)\,\widehat{j}=(F_1,F_2)=(3(x^2-y),3(y^2-x))$.

La divergence $\overrightarrow{div}(\overrightarrow{F})=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}=6x+6y$.

Le rotationnel $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{F})=\begin{vmatrix}\widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_1 & F_2 & 0\end{vmatrix}=(0)\widehat{i}+(0)\widehat{j}+(-3-(-3))\widehat{k}=0$

II- Soient ω 1-forme différentielle : $\omega=3(x^2-y)dx+3(y^2-x)dy$

(i)- $\omega\in\Omega^1_{\mathcal{C}^\infty}(U\subset\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$

(ii)- $d\omega=6xdx\wedge dx-3dy\wedge dx-3dx\wedge dy+6ydy\wedge dy=3dx\wedge dy-3dx\wedge dy=0$

(iii)- ω est fermée, car $d\omega=0$

(iv)- ω est définie sur un ouvert étoilé $U=\mathbb{R}^3$, donc d'après le théorème de Poincaré ω est exacte.

(v)- Sa primitive $\omega=3(x^2-y)dx+3(y^2-x)dy=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\Leftrightarrow\omega=df\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{lll}\frac{\partial f}{\partial x} & = & 3(x^2-y).......(1)\\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & 3(y^2-x).......(2)\end{array}\right.$

$\frac{\partial f}{\partial x}=3(x^2-y)\Rightarrow f(x,y)=x^3-3xy+C(y)......(*)$, on remplace (*) dans (2) on trouve
$3x+C'(y)=3(y^2-x)\Rightarrow C'(y)=3y^2\Rightarrow C(y)=y^3+cst$
alors $f(x,y)=x^3-3xy+y^3+cst$

(vi)- On déduire la valeur de l'intégrale curviligne : on a $\omega=df\Rightarrow\int_\gamma\omega=\int_\gamma df$, donc
$\int_\gamma\omega=f(\gamma(2\pi))-f(\gamma(0))=0$

(vii)- En utilisant la formule de Green-Riemann : $\int_\gamma \omega = \int_\gamma 3(x^2-y)dx + 3(y^2-x)dy$
On prendre : $p(x,y) = 3(x^2-y) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = -3$ et $q(x,y) = 3(y^2-x) \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial x} = -3$
donc

$$\begin{aligned}
\int_\gamma 3(x^2-y)dx + 3(y^2-x)dy &= \iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dxdy \\
\int_\gamma 3(x^2-y)dx + 3(y^2-x)dy &= \iint_D (-3-(-3))\, dxdy \\
\int_\gamma 3(x^2-y)dx + 3(y^2-x)dy &= 0
\end{aligned}$$

==

Université Mohamed Boudiaf - M'sila — Date : 23 juin 2019
Faculté de MI — 3 ième année Maths LMD 2018-2019
Département de Mathématiques — Module : Géométrie différentielle
Durée :1h et 30 m

Examen final

Exercice 01 *:(08pts)*

I- Soit l'application h, telle que

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (\cos(x)+\sin(y), \sin(x)+\cos(y), e^{x-y}) \end{array}$$

(i)- Ecrire la matrice Jacobienne $Jh_{(x,y)}$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(ii)- Montrer que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

(iii)- h est - elle un difféomorphisme global.

II- Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application de classe C^1 et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application

$$g(u,v) = f(\cos(u)+\sin(v), \sin(u)+\cos(v), e^{u-v})$$

(i)- Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

(ii)- On suppose que f est différentiable au point $A = (1,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$ et que sa différentielle en ce point, en convenant d'identifier une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ avec sa matrice $Jf_A = f'_A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
- Déterminer la différentielle de g au point $B = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

III- Soit la fonction

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^y - y^x \end{array}$$

– *Montrer qu'il existe deux intervalles ouverts I_1 et I_2 contenant 1 tels que l'ensemble (non vide)*

$$E = \{(x,y) \in I_1 \times I_2 : \ \varphi(x,y) = 0\}.$$

soit le graphe d'une fonction ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I_1 et à valeur dans I_2 et vérifiant $\phi(1) = 1$.

==

Exercice 02 *: (06pts) I- Soit*

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$$

(1)- Montrer que M est une sous-variété.

(2)- Qu'elle est sa dimension et sa régularité.

(3)- Calculer $T_{(0,0,1)}M$: l'espace tangent de M au point $m = (0,0,1)$.

II- Soit la sous-variété suivante

$$M_1 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ det(A) = 1\}$$

– *Qu'elle est la dimension de la sous-variété M_1.*

==

Exercice 03 *:(06pts) I- Soit ω 1-forme différentielle : $\omega = 3(x^2-y)dx + 3(y^2-x)dy$*

(i)- Calculer $d\omega$.

(ii)- ω est-elle fermée.

(iii)- Expliquer pourquoi ω est exacte, calculer sa primitive $\omega = df$.

II- On considère la forme différentielle $\omega = xdy \wedge dz - 2zf(y)dx \wedge dy + yf(y)dz \wedge dx$ où f est une application de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $f(1) = 1$. Déterminer f dans les cas suivants

(i)- $d\omega = dx \wedge dy \wedge dz$

(ii)- $d\omega = 0$

Barème :$((1+1+1)+(1+1)+3)+(2+(0.5+0.5)+2+1)+((0.5+0.5+(1+1)+(1+1+1))$

Bon courage

==

Corrigé type d'examen final

Exercice 01 :(08pts)

I- Soit l'application h, telle que

$$\begin{array}{rcl} h:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (\cos(x)+\sin(y), \sin(x)+\cos(y), e^{x-y}) \end{array}$$

(i)- La matrice Jacobienne

$$Jh_{(x,y)} = h^{'}(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x) & \cos(y) \\ \cos(x) & -\sin(y) \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{pmatrix}$$

(ii)- h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, les dérivées partielles existent et continues.

(iii)- h est - elle un difféomorphisme global, si h est bijective alors h est un difféomorphisme global et si h n'est pas bijective alors h n'est pas un difféomorphisme global, h n'est pas injective, car $h(x,y) = h(x, y+2\pi) \Rightarrow y \neq y + 2\pi$ h alors n'est pas bijective, donc h n'est pas un difféomorphisme global.

II- Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application de classe C^1 et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application

$$g(u,v) = f(cosu + sinv, sinu + cosv, e^{u-v})$$

(i)- On remarque que $g = f \circ h$, étant composée de deux applications de classe C^1, alors l'application g est de classe C^1.

(ii)- L'application h est différentiable pour tout point (u,v), telle que

$$Jh_{(u,v)} = h^{'}(u,v) = \begin{pmatrix} -\sin(u) & \cos(v) \\ \sin(u) & -\sin(v) \\ e^{u-v} & -e^{u-v} \end{pmatrix}$$

Donc après la loi de composition on a $Jg(u,v) = Jf_{h(u,v)} \times Jh_{(u,v)}$, alors pour $(u,v) = B = (\pi/2, \pi/2)$ on a $Jg(B) = Jf_A \times Jh_B$ par un calcul simple on trouve

$$Jg(B) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

III- Soit la fonction

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^y - y^x \end{array}$$

- La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

$\varphi(1,1) = 1^1 - 1^1 = 0$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = x^y \ln(x) - \frac{x}{y} y^x \Rightarrow \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,1) \right| = |-1| \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ est inversible.

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un ouvert V de $\mathbb{R}$ contenant 1 et un ouvert W de $\mathbb{R}$ contenant 1, et une application $\phi : V \to W$ tels que :

(i)- $V \times W \subset U$

(ii)-

$$E = \{(x,y) \in V \times W;\ \varphi(x,y) = 0\} = \{(x, \phi(x));\ \varphi(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \phi(x)\}$$

(iii)- $\varphi(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \phi(x)$, $\varphi(1,1) = 0 \Leftrightarrow \phi(1) = 1$.

==

Exercice 02 : (06pts)

I- Soit $M = S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

(i)- Posons $\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ φ est de classe C^∞, $M \subset \mathbb{R}^3$

$$\varphi^{-1}(0) = U \cap M_1 = \mathbb{R}^3 \cap M = M$$

φ est une submersion . $\forall (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3, df_{(x_0,y_0,z_0)}.H = (2x_0 \quad 2y_0 \quad 2z_0).H$

$$rang\ d_\varphi = \begin{cases} 1 & x_0 = y_0 = z_0 \neq 0 \\ 0 & x_0 = y_0 = z_0 = 0 \end{cases}$$

$(0,0,0) \notin S^2$, $\forall x \in M$, $rang\ d_\varphi = 1 = \dim \mathbb{R} \Longrightarrow \varphi$ est une submersion. Alors $S^2 = M$ est une sous-variété.

(ii)- la dimension de M est : $dim(M) = dim(\mathbb{R}^3)$-nombre d'équations $= 3 - 1 = 2$.

(iii)- Régularité(classe) de M est C^∞, donc M est dite sous-variété lisse.

(iv)- Soit le point $m = (0,0,1)$. Alors par la définition (point de vue submersion), on peut calculer :$T_{(0,0,1)}S^2 = \ker(f\ (0,0,1))$

$$d_{(0,0,1)}f \ : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \longmapsto (0\ 0\ 2) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

alors $df_{(0,0,1)}H = 2h_3, H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$

$$T_{(0,0,1)}S^2 = \{(h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3 :\ df_{(0,0,1)} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0\}$$

$$= \{(h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3\ ,\ 2h_3 = 0\}$$

$T_{(0,0,1)}M_1 = T_{(0,0,1)}S^2$ est le plan. donc l'espace tangent est un espace vectoriel engendré par les deux vecteurs $v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0)$ sont indépendants, alors $dim(T_{(0,0,1}M) = 2 = dim(M)$.

II- $M_1 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ M\ inversible\} = SL_n(\mathbb{R}$

– La dimension $dim(M_1) = dim(\mathcal{M}_n)$-nombre d'équations $= n^2 - 1$.

==

Exercice 03 :(06pts)

I- Soient ω 1-forme différentielle : $\omega = 3(x^2 - y)dx + 3(y^2 - x)dy$

(i)- $d\omega = 6xdx \wedge dx - 3dy \wedge dx - 3dx \wedge dy + 6ydy \wedge dy = 3dx \wedge dy - 3dx \wedge dy = 0$

(ii)- ω est fermée, car $d\omega = 0$

(iii)- ω est définie sur un ouvert étoilé $U = \mathbb{R}^3$, donc d'après le théorème de Poincaré ω est exacte.

(iv)- Sa primitive $\omega = 3(x^2-y)dx+3(y^2-x)dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy \Leftrightarrow \omega = df \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = & 3(x^2 - y).......(1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & 3(y^2 - x).......(2) \end{cases}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x^2 - y) \Rightarrow f(x,y) = x^3 - 3xy + C(y)......(*)$, on remplace (*) dans (2) on trouve
$3x + C^{'}(y) = 3(y^2 - x) \Rightarrow C^{'}(y) = 3y^2 \Rightarrow C(y) = y^3 + cst$
alors $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3 + cst$

II- Soit $\omega = xdy \wedge dz - 2zf(y)dx \wedge dy + yf(y)dz \wedge dx$

– On a besoin de calculer $d\omega = (1 + yf^{'}(y) - f(y))dx \wedge dy \wedge dz$

(i)- Si $d\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ ceci équivalent à : $1 + yf^{'}(y) - f(y) = 1 \rightarrow f(y) = y$

(ii)- Si $d\omega = 0$ ceci équivalent à : $1 + yf'(y) - f(y) = 0 \to f(y) = 1$

==

Université Mohamed Boudiaf - M'sila — Date : 08 juillet 2019

Faculté de MI — 3 ième année Maths LMD 2018-2019

Département de Mathématiques — Module : Géométrie différentielle

Durée :1h et 30 m

Examen de rattrapage

Exercice 01 *:(10pts)*

I- Soit l'application φ, telle que

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (\sin(\frac{y}{2}) - x, \sin(\frac{x}{2}) - y) \end{array}$$

(i)- Justifier que $\varphi \in \mathcal{C}^1$.

(ii)- Calculer sa différentielle, $d\varphi$ est inversible ?

(iii)- Montrer que φ est $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

(iv)- φ est - elle un difféomorphisme local, global.

II- Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , sinon \end{cases}$$

(i)- Est ce que f est continue en $a = (0,0)$?.

(ii)- Est ce que f est différentiable en $a = (0,0)$?.

(iii)- Est ce que f est admet des dérivées partielles en point $a = (0,0)$?.

(iv)- Donner une conclusion.

III- Soit la fonction

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x^2 + y^2 + z^2 - \cos(xyz) \end{array}$$

– *Montrer qu'il existe deux intervalles ouverts $V \subset \mathbb{R}^2$ contenant $(0,0)$ et $W \subset \mathbb{R}$ contenant 1 tel que l'ensemble $E = \{(x,y,z) \in V \times W : \varphi(x,y,z) = 0\}$, soit le graphe d'une fonction ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ sur V à valeur dans W et vérifiant $\phi(0,0) = 1$.*

==

Exercice 02 *: (06pts)*

I- Soit l'ensemble suivant de $\mathbb{R}^3$.

$$M_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = x, \; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

(1)- Est ce que M_1 est une sous-variété ?.

II- Soit M le cylindre : $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = 1, \; 0 < z < 1\}$.

(1)- Montrer que M est le produit de deux sous-variétés $M_1 \times M_2$.

(2)- Expliciter M_1 et M_2.

(3)- Qu'elle est la dimension de M.

(4)- Calculer $T_m M_1$, avec $m = (1,0) \in M_1$.

==

Exercice 03 *:(04.5pts)*

I- Soit le champ de vecteur $\overrightarrow{F} = e^y \, \widehat{i} + (xe^y - 2y) \, \widehat{j}$

(i)- Calculer la divergence $\overrightarrow{div}(\overrightarrow{F})$ et le rotationnel $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{F})$

II- Soient ω_1 et ω_2 deux 1-forme différentielle, telles que

$$\omega_1 = e^y dx + (xe^y - 2y)dy, \quad \omega_2 = 2xydx + x^2 dy$$

(i)- Calculer $d\omega_1$, $d\omega_2$, $\omega_1 \wedge \omega_2$ et $d(\omega_1 \wedge \omega_2)$

(ii)- Montrer que ω_1 est fermée, calculer sa primitive $\omega_1 = df$

Bon courage

==