

# PROPAGATION DES O.E.M. DANS LES PLASMAS ET LES MÉTAUX.

## I. Modélisation du problème. Les caractéristiques de l'équation de propagation.

### 1°) Propagation du champ électromagnétique dans un milieu conducteur localement neutre.

Soit un milieu matériel caractérisé par sa densité volumique totale de charges  $\rho_{tot}(M,t)$  et son vecteur densité de courant  $\vec{j}(M,t)$ . Les équations de Maxwell s'écrivent dans le cas général

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0} \quad \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

On cherche l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ électrique dans un tel milieu. En formant  $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E})) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}(\vec{E})) - \Delta(\vec{E})$ , et en permutant l'ordre des dérivées spatiales et temporelles (fonctions supposées au moins de classe  $\mathcal{C}^2$ ), il vient

$$\Delta(\vec{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}(M,t)}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\rho_{tot}(M,t) / \varepsilon_0)$$

**Si le milieu reste électriquement localement neutre** ( $\rho_{tot}(M,t) = 0$ ), il vient

$$\boxed{\Delta(\vec{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}(M,t)}{\partial t}} \quad (\text{équation 1}).$$

L'équation d'évolution pour  $\vec{E}$  dépend ainsi de la distribution des courants au sein du milieu.

### 2°) L'équation de propagation d'une OEM dans un métal.

#### ➤ Conduction du courant dans un métal : modèle de DRÛDE.

Dans un conducteur, les charges mobiles ne sont pas complètement libres, car elles interagissent entre elles et avec les charges fixes (les cations du réseau métallique). Une approche phénoménologique, due à **DRÛDE**, consiste à représenter l'action du milieu matériel sur les charges mobiles (les électrons dans le cas d'une conduction métallique) par une **force de frottement visqueux**, qu'on écrit sous la forme

$\vec{F}_f = -\frac{m}{\tau} \cdot \vec{v}$ , où  $\vec{v}$  désigne la vitesse d'entraînement (ou de dérive) des électrons sous l'action d'un

champ électrique  $\vec{E}$ ,  $m$  la masse d'un électron et  $\tau$  un temps de relaxation du milieu.

Le vecteur densité de courant s'écrit dans le matériau  $\boxed{\vec{j} = \rho_{mob} \vec{v} = -n^* e \vec{v}}$ , où  $n^*$  représente la **densité volumique des porteurs mobiles** dans le métal ( $n^*$  en  $m^{-3}$ ).

Le P.F.D. appliqué à un électron mobile, s'écrit en représentation lagrangienne, en négligeant le poids devant la force électromagnétique :  $m \frac{D\vec{v}}{Dt} = m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + m(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}})\vec{v} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) - \frac{m}{\tau} \vec{v}$ .

L'accélération convective est **négligeable** devant l'accélération locale tant que **les électrons ne sont pas relativistes**. Prenons pour paramètre spatial caractéristique la longueur d'onde  $\lambda$  de l'O.E.M. dans le milieu et sa période  $T$  pour paramètre temporel caractéristique.

On a en o.d.g. :  $\frac{\|(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}})\vec{v}\|}{\|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\|} \sim \frac{v^2/\lambda}{v/T} = \frac{v}{c} \ll 1$ , en prenant  $\lambda \approx cT$  comme si on était dans le vide.

En l'absence de champ magnétique extérieur stationnaire appliqué,  $\vec{B}$  dans le milieu est dû à l'O.E.M. qui traverse ce milieu. En se plaçant comme dans le vide, on a pour une O.P.P.H.  $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$ .

$$\text{Ainsi } \frac{\|\vec{F}_{mag}\|}{\|\vec{F}_{el}\|} \sim \frac{vB}{E} = \frac{v}{c}.$$

Pour des électrons supposés **non relativistes**, On pourra **négliger la partie magnétique** de la force de Lorentz devant sa partie électrique.

$$\text{Il reste } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{e}{m} \vec{E} - \frac{1}{\tau} \vec{v} \quad (\text{en l'absence de champ magnétique extérieur appliqué}).$$

En régime stationnaire (et donc sous l'action d'un champ électrique  $\vec{E}_{stat}$  indépendant du temps), les électrons de conduction acquièrent la vitesse limite  $\vec{v}_{lim} = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}_{stat}$ .

En régime stationnaire, on obtient ainsi  $\vec{j}_{stat} = \frac{n^* e^2 \tau}{m} \vec{E}_{stat}$ , relation de la forme  $\vec{j}_{stat} = \gamma_0 \vec{E}_{stat}$ , où

$$\gamma_0 = \frac{n^* e^2 \tau}{m} \text{ représente la } \mathbf{conductivité\ électrique} \text{ du milieu (en régime stationnaire).}$$

Cette relation  $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$  constitue la **loi d'Ohm locale**.

### ➤ **Limites de validité de la loi d'Ohm.**

On applique maintenant au métal un champ électrique  $\vec{E}$  alternatif de pulsation  $\omega$ . La relation  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  est encore valable à condition de pouvoir négliger le régime transitoire d'évolution de la vitesse

des porteurs de charges, dont le temps de relaxation est  $\tau = \frac{m\gamma_0}{n^* e^2}$ , pour pouvoir considérer qu'un régime

stationnaire est atteint à chaque instant, vrai si  $\tau \ll T$ , soit  $\omega \ll 2\pi \frac{n^* e^2}{m\gamma_0}$ .

**Typiquement** pour un bon métal :  $\gamma_0 \sim 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ ,  $n^* \sim 10^{29} \text{ m}^{-3}$ ,  $m \sim 10^{-30} \text{ kg}$ ,  $e \sim 10^{-19} \text{ C}$ .

$$\text{On obtient } \omega \ll 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}.$$

La loi d'ohm ( $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$ ) reste applicable dans les métaux du continu au domaine radioélectrique.

### ➤ **Conductivité complexe d'un métal.**

Lorsque la durée du régime transitoire n'est plus négligeable devant la période de l'O.E.M., l'équation

$$\text{d'évolution de la vitesse s'écrit } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{e}{m} \vec{E} - \frac{1}{\tau} \vec{v}.$$

L'équation homogène sans second membre ( $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \vec{0}$ ) conduit à des solutions qui s'amortissent exponentiellement : le transitoire s'efface devant la solution particulière de l'équation complète avec second membre. Cette équation étant linéaire, on cherche une réponse en vitesse à une excitation harmonique de pulsation  $\omega$  ( $\vec{E} = \vec{E}_m e^{j\omega t}$ ) sous la forme complexe  $\vec{v} = \vec{v}_m e^{j\omega t}$ .  $\vec{v}_m$  vérifie

$$j\omega\tau \vec{v}_m + \vec{v}_m = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}_m \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_m = -\frac{e\tau}{m(1+j\omega\tau)} \vec{E}_m \quad \Rightarrow \quad \vec{j} = -en^* \vec{v} = \frac{n^* e^2 \tau / m}{1+j\omega\tau} \vec{E}.$$

On reconnaît une expression du type « **loi d'Ohm** »  $\vec{j} = \underline{\gamma} \vec{E}$  (**équation 2**), où  $\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1+j\omega\tau}$  est appelée la **conductivité électrique complexe** du métal.

### ➤ Équation de propagation d'une OEM dans un métal.

L'équation 1 établie au § I.1. est linéaire et admet donc une recherche de solutions sous forme complexe. En remplaçant  $\vec{j}$  par son expression précédente (équation 2), on obtient l'équation de propagation d'un champ électrique harmonique de pulsation  $\omega$  dans un métal

$$\Delta(\vec{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \underline{\gamma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0} \quad (\text{équation 3}), \text{ avec } \underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + j\omega\tau}.$$

### 3°) L'équation de propagation d'une OEM dans un plasma.

#### ➤ Définition.

On appelle **plasma** un état de la matière globalement neutre dans lequel les charges électriques de signes opposés ne sont pas liées entre elles, une des populations au moins étant libre de **se déplacer sur de grandes distances**. Le terme « *plasma* » a été introduit par Irving LANGMUIR (1881 – 1957).

On distingue les « **plasmas froids** », milieux dans lesquels les charges mobiles ne sont pas à l'équilibre thermique à la température  $T$  du plasma (ex : ionosphère, TV écran plasma, ...), et les « **plasmas chauds** » pour lesquels les charges mobiles sont en équilibre thermique à la température du plasma (ex : les étoiles).

Dans un plasma froid, on aura  $\frac{1}{2} m v^2 \gg k_B T_{plasma}$ .

Une caractéristique commune des plasmas froid est leur faible (voire très faible) densité volumique de charges mobiles ( $\sim 10^{11} m^{-3}$ ).

#### ➤ Conduction du courant dans un plasma froid.

Soit un plasma constitué de  $n_e$  électrons (charge  $-e$ , masse  $m_e$ ) par unité de volume et  $n_i$  ions positifs (charge  $+Ze$ , masse  $M$ ) par unité de volume.

- Le vecteur densité de courant dans le plasma s'écrit a priori  $\vec{j} = -en_e \vec{v}_{elec} + Zen_i \vec{v}_{ions}$ .
- Le poids est ici encore négligé devant la force électromagnétique.
- Les électrons sont supposés non relativistes, de sorte que, comme pour le métal, on pourra négliger la partie magnétique de la force de Lorentz devant sa partie électrique.
- Les ions étant beaucoup plus massifs que les électrons ( $m_p / m_e \approx 2000$ ), on pourra négliger le mouvement des ions devant celui des électrons, de sorte que  $n_i = cste$ .
- Le plasma est supposé localement électriquement neutre, de sorte que  $n_e = Zn_i = cste$ .

En conséquence, on aura dans un tel plasma  $\vec{j} = -en_e \vec{v}_e$ .

La différence fondamentale pour le mouvement des électrons entre un métal et un plasma vient des valeurs de la densité particulière, permettant de négliger les collisions entre charges dans le plasma.

Ainsi, le P.D.F. appliqué à un électron s'écrit, compte tenu des hypothèses et simplifications

précédentes  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{e}{m} \vec{E}$ , qui conduit à  $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{n_e e^2}{m} \vec{E}$  (équation 4).

L'équation 4, **valable dans un plasma sans collisions**, est l'analogie de la loi d'Ohm dans un métal. Cette analogie est encore plus frappante si on se place en régime harmonique de pulsation  $\omega$ .

On obtient en passant aux images complexes :  $\underline{j} = \frac{n_e e^2}{jm\omega} \underline{E} = \underline{\gamma}_{plasma} \underline{E}$ , avec  $\underline{\gamma}_{plasma} = \frac{n_e e^2}{jm\omega}$ , où la conductivité électrique du plasma  $\underline{\gamma}$  est **imaginaire pure**.

➤ **Interprétation énergétique.**

La puissance volumique moyenne dissipée par effet Joule est  $\frac{dP_J}{d\tau} = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle$ , expression non linéaire, qui impose d'utiliser les expressions réelles pour  $\vec{j}$  et  $\vec{E}$ . Avec  $\gamma_{plasma}$  imaginaire pur, le déphasage de  $\vec{j}$  par rapport à  $\vec{E}$  est de  $-\frac{\pi}{2}$  : vecteurs en **quadrature de phase**.

Ainsi  $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle \propto \langle \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \rangle = 0$ . Conclusion

La puissance moyenne transférée par le champ aux porteurs de charges dans un plasma sans collisions est **nulle**.

➤ **Équation de propagation d'une OEM dans un plasma sans collisions.**

En injectant l'équation 4 dans l'équation 1 (§ I.1.), l'équation de propagation du champ électrique dans un plasma sans collisions s'écrit  $\Delta(\vec{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{\mu_0 n_e e^2}{m} \vec{E} = \vec{0}$  (**équation 5**).

## II. Les caractéristiques de l'équation de propagation. Absorption ; dispersion.

### 1°) Recherche des solutions en O.P.P.H. avec k complexe. Relation de dispersion.

Les équations d'évolution du champ électrique établies précédemment (équations 3 et 5) diffèrent de l'équation de d'Alembert par un terme en  $\alpha \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  (cas du métal) ou un terme en  $\beta \vec{E}$  (cas du plasma).

Toutefois, les deux équations sont linéaires, autorisant une étude par les images complexes.

On considère les deux équations du type :  $\Delta s(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s(M, t)}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial s(M, t)}{\partial t}$  (**éqn A**).

$\Delta s(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s(M, t)}{\partial t^2} = \beta s(M, t)$  (**éqn B**).

Les méthodes de changement de variables ou de séparation des variables utilisées pour résoudre l'équation de d'Alembert sont inefficaces ici pour chercher une famille génératrice des solutions de l'équation A ou B. La méthode la plus fructueuse consiste à généraliser la notion d'O.P.P.H. en notation complexe (pour exploiter la linéarité des équations).

On cherche ainsi une onde (appelée pseudo O.P.P.H.) se propageant suivant la direction du vecteur unitaire  $\vec{u}$  de la forme :

$s(M, t) = \Re(\underline{S})$ , où  $\underline{S}(M, t) = A \exp[j \omega t - \underline{k} \cdot \vec{r}]$ , avec  $\omega$  réel et  $\underline{k}$  complexe.

$\omega$  et  $\underline{k}$  sont liés par une relation appelée **relation de dispersion**, qu'on obtient en injectant directement  $\underline{S}(M, t)$  dans l'équation de propagation, avec les équivalences

$$\Delta(\underline{S}) = -\underline{k}^2 \underline{S} \qquad \frac{\partial^2 \underline{S}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{S} \qquad \frac{\partial \underline{S}}{\partial t} = j\omega \underline{S}$$

Ainsi, pour l'équation A, la relation de dispersion s'écrit :  $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\alpha\omega$ .

Et pour l'équation B :  $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \beta$

Pour dégager le contenu physique de la relation de dispersion, il est commode de décomposer le nombre d'onde  $\underline{k}$  en sa **partie réelle** et sa **partie imaginaire** en écrivant  $\underline{k}(\omega) = k'(\omega) + jk''(\omega)$ .

## 2°) Rôle de la partie imaginaire de $k$ : atténuation (ou amplification). Ondes évanescentes.

On réécrit la pseudo O.P.P.H.  $\underline{S}$  sous la forme  $\underline{S} = \underline{A} e^{(k'' \vec{u} \cdot \vec{r})} \exp[j \omega t - k' \vec{u} \cdot \vec{r}]$ . Cette expression montre que l'onde  $s(M,t)$  se présente comme une onde plane progressive dont l'amplitude varie au cours de sa propagation.

La partie **imaginaire** de  $k$ , notée  **$k''$**  implique une **évolution exponentielle de l'amplitude de l'onde**, avec amortissement ou amplification suivant le signe de  $k''$  et le sens de propagation de l'onde.

Le cas rencontré le plus fréquemment correspond à un *amortissement* de l'onde : **le milieu est dit alors absorbant**.

On définit la grandeur notée  $\delta$ , telle que  $\delta = \frac{1}{|k''(\omega)|}$ , **homogène à une longueur**, représentant la distance caractéristique de l'amortissement, qu'on appelle souvent **épaisseur de peau** ou **profondeur de pénétration**.

**Remarque :** Comme exemple de milieu amplificateur, on peut citer le cas du gaz contenu dans une cavité laser.

### ➤ Ondes évanescentes.

Dans le cas où  $k'(\omega) = 0$ , on a  $\vec{k} = k'' \vec{u}$ . Il reste  $\underline{S}(M,t) = \underline{A} e^{(k'' \vec{u} \cdot \vec{r})} \exp[j\omega t]$ .

On obtient une onde atténuée sans propagation et sans absorption, appelée **onde évanescente**.

## 3°) Rôle de la partie réelle de $k$ . Vitesse de phase.

### ➤ Vitesse de phase et dispersion.

Le terme de phase en  $\omega t - k' \vec{u} \cdot \vec{r}$  montre que la phase de la pseudo-O.P.P.H. se propage avec la vitesse, dite **vitesse de phase**  $v_\phi = \frac{\omega}{k'(\omega)}$ , qui peut dépendre à priori de la pulsation  $\omega$ . Il en découle que des ondes de pulsations différentes ne se propagent pas à la même vitesse.

Un milieu dans lequel la vitesse de phase **dépend de  $\omega$**  est dit **milieu dispersif** (d'où le nom de relation de dispersion donnée à l'équation liant  $\omega$  et  $k$ ).

De façon très générale, un signal physique émis par une source qui se propage possède une extension spatiale et une extension temporelle finies, conditions qui ne sont pas réalisées avec une O.P.P.H. De plus, l'énergie associée à cette onde serait infinie, puisque elle est spatialement non limitée.

En conclusion, une O.P.P.H. est un outil d'analyse des phénomènes de propagation, mais ne saurait décrire à elle seule un phénomène physique observable. Ce qui revient à dire : **l'O.P.P.H. n'existe pas !**

## 4°) De l'O.P.P.H. au paquet d'onde. Vitesse de groupe.

Cherchons à comprendre comment fabriquer une onde « localisée » en partant du modèle de l'O.P.P.H. Procédons par étapes.

### a) Superposition de 2 ondes progressives harmoniques de fréquences voisines.

Considérons la superposition de 2 O.P.P.H. de *même amplitude*, de pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  **très proches** se propageant dans la direction  $Ox$  dans le sens des  $x$  croissants.

Soit  $k_1 = k(\omega_1)$  et  $k_2 = k(\omega_2)$  les modules d'onde associés tirés de la relation de dispersion.

L'onde résultante s'écrit  $s(x, t) = S_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x) + S_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x)$ , en supposant les ondes ① et ② en phase à  $t = 0$  en  $x = 0$ .

On note  $\omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  et  $k_m = \frac{k_1 + k_2}{2}$  les pulsations temporelles et spatiales moyennes et

$\delta\omega = \omega_1 - \omega_2$  et  $\delta k = k_1 - k_2$  les écarts entre ces pulsations.

On peut écrire  $s(x, t) = 2S_0 \cos\left[\frac{\delta\omega}{2}t - \frac{\delta k}{2}x\right] \cos \omega_m t - k_m x$ .

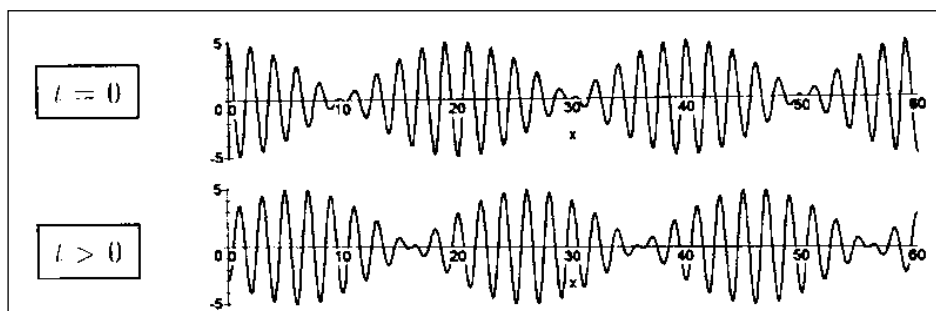
Cette expression fait apparaître un **phénomène de battements** : une onde moyenne de pulsation  $\omega_m$  et de module d'onde  $k_m$  est *modulée en amplitude* par une onde enveloppe de pulsation  $\frac{\delta\omega}{2} \ll \omega_m$  et de module d'onde  $\frac{\delta k}{2} \ll k_m$ .

L'onde moyenne se comporte comme une onde plane progressive de vitesse de phase  $v_\phi = \frac{\omega_m}{k_m}$ , alors que l'onde enveloppe constitue une onde plane progressive se propageant à la vitesse dite de modulation  $v_{\text{mod}} = \frac{\delta\omega}{\delta k}$ .

La vitesse de modulation peut être exprimée en utilisant un développement en séries de Taylor de  $\omega(k)$  au voisinage de  $k = k_m$  :  $v_{\text{mod}} = \frac{\omega(k_1) - \omega(k_2)}{k_1 - k_2} \simeq \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_m} + \dots$

Dans la plupart des applications intéressantes, tous les termes sont négligeables à l'exception du premier terme.

$v_\phi$  et  $v_{\text{mod}}$  n'étant pas identiques en général, les crêtes de l'onde moyenne avancent à une vitesse différente de celle des crêtes de l'onde enveloppe : l'onde globale se déforme donc en se propageant : par exemple, sur la figure ci-dessous, l'enveloppe est translatée de  $\Delta x = 6$  vers la droite entre les deux instants considérés. L'onde moyenne quant à elle est translatée de  $\Delta x = 1$  vers la droite (remplacement d'un maximum par un minimum).



👉 Nous constatons que si l'onde résultante est essentiellement **localisée** au voisinage des ventres des fuseaux de modulation de son amplitude, ces ventres ne sont pas limités dans le temps. Un tel signal ne représente pas encore un signal réel !

### **b) Généralisation au cas d'un paquet d'ondes ; vitesse de groupe.**

En superposant un nombre plus important d'O.P.P.H., nous pouvons réduire encore l'extension de l'enveloppe du signal résultant, dont l'allure est celle d'un signal oscillant rapidement, d'amplitude lentement modulée : on obtient des « **paquets d'ondes** ». Plus précisément :

On appelle paquet d'ondes, un ensemble continu d'O.P.P.H. de pulsations voisines de  $\omega_m$ , comprises entre  $\omega_m - \frac{\Delta\omega}{2}$  et  $\omega_m + \frac{\Delta\omega}{2}$ , avec  $\Delta\omega \ll \omega_m$ .

En notation complexe, on peut écrire l'amplitude du paquet d'ondes sous la forme

$$\underline{s}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \underline{A}(\omega) e^{j\omega t - k(\omega)x} d\omega,$$

où  $\underline{A}(\omega)$  ne prend de valeurs notables que sur l'intervalle  $\left[ \omega_m - \frac{\Delta\omega}{2}; \omega_m + \frac{\Delta\omega}{2} \right]$ .

### ► Vitesse du paquet d'ondes ou vitesse de groupe.

Avec  $\omega \approx \omega_m$  on peut se limiter pour exprimer  $k(\omega)$  à un développement de Taylor d'ordre 1 :

$$\omega = \omega_m + \omega - \omega_m \quad \text{et} \quad k = k_m + \omega - \omega_m \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_m}$$

L'amplitude complexe du paquet d'ondes s'écrit alors dans ces conditions :

$$\underline{s}(x, t) = \left( \int_{\Delta\omega} \underline{A}(\omega) e^{j\omega - \omega_m \left( t - x \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_m} \right)} d\omega \right) e^{j\omega_m t - k_m x}, \quad \text{expression qui correspond à une O.P.P.H.}$$

moyenne en  $\exp\left[ j\omega_m t - k_m x \right]$  de pulsation  $\omega_m$  se propageant à la vitesse de phase  $v_\phi = \frac{\omega_m}{k_m}$  et une

onde enveloppe qui ne dépend que de la variable  $t - x \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_m}$

L'onde enveloppe du paquet d'onde se propage à la vitesse notée  $v_g$ , appelée **vitesse de groupe**  $v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{\omega_m}$ .



Dans un **milieu dispersif**,  $v_\phi$  dépend de  $\omega$  : les vitesses de phase et de groupe sont alors différentes : **le paquet d'ondes se propage en se déformant**.

## III. Influence de la fréquence de l'O.E.M. sur sa propagation dans un métal ou un plasma.

### 1°) Propagation d'une O.P.P.H. dans un plasma neutre.

On s'intéresse à la propagation d'une O.P.P.H. dans un plasma neutre, en notant l'image complexe du champ électrique associé sous la forme  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_m \exp[j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$ , avec  $\vec{k}$  a priori complexe.

On a déjà établi que  $\text{div}(\vec{E}) = -j\vec{k} \cdot \vec{E}$ .

Supposer que le plasma reste **localement électriquement neutre** revient à ne considérer que des **ondes transverses se propageant dans le plasma**.  
Inversement, si on considère la propagation d'une onde transverse dans un plasma, celui-ci reste localement électriquement neutre.

En reprenant les hypothèses établies au § I.3.,  $\vec{E}$  est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta(\vec{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{\mu_0 n_e e^2}{m} \vec{E} = \vec{0}, \quad \text{qui conduit à la relation de dispersion } \underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 n_e e^2}{m}.$$

On introduit la grandeur notée  $\omega_p$ , appelée **pulsation de plasma**, avec

$$\omega_p^2 = \frac{\mu_0 c^2 n_e e^2}{m} = \frac{n_e e^2}{m \epsilon_0}$$

La relation de dispersion dans le plasma devient  $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$  (équation 6)

### ➤ Discussion.

- Si  $\omega > \omega_p$ ,  $\underline{k}^2 > 0 \Rightarrow \underline{k}$  réel (donc  $\underline{k} = k'$ ) : la **propagation est possible**.

L'OEM se propage avec la vitesse **de phase**  $v_\phi = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_p^2 / \omega^2}}$ , qui dépend de  $\omega$ .

**La propagation dans un plasma est dispersive.** On constate que  $v_\phi > c$ , mais on rappelle que la vitesse de phase est un concept purement géométrique et ne correspond pas à un signal physique réel (observable). **La vitesse de phase n'est donc pas limitée par c !**

L'observable physique correspond au « **paquet d'onde** », limité spatialement, obtenu par superposition de différentes O.P.P.H. de fréquences voisines, qui se déplace à la vitesse dite **de groupe**  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ .

En différenciant l'équation 6, il vient  $2kdk = 2 \frac{\omega d\omega}{c^2} \Rightarrow \frac{\omega}{k} \frac{d\omega}{dk} = c^2$ , soit  $v_\phi v_g = c^2$ .

On aura donc  $v_g = c \sqrt{1 - \omega_p^2 / \omega^2}$ . On a bien  $v_g < c$ .

**Le déplacement du paquet d'onde, associé à un transport d'énergie, est limité par c pour satisfaire aux lois de la relativité.**

- Si  $\omega < \omega_p$ ,  $\underline{k}^2 < 0 \Rightarrow \underline{k}$  imaginaire pur (donc  $\underline{k} = jk''$ ) : **propagation impossible**.

On obtient dans ce cas dans le plasma une **onde évanescence** (onde stationnaire amortie) qui **ne transporte en moyenne aucune énergie électromagnétique**. En pratique, on aura un **phénomène de réflexion totale** sur l'interface vide – plasma pour  $\omega < \omega_p$ .

Fréquence du **plasma ionosphérique** (en prenant  $n_e \sim 10^{11} \text{ m}^{-3}$ ) :  $f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{n_e e^2}{m \epsilon_0}} \sim 3 \text{ MHz}$ .

## 2°) Propagation dans un conducteur ohmique de conductivité réelle : effet de peau.

### ➤ Le cadre de l'étude.

On considère un milieu conducteur, de conductivité électrique statique  $\gamma_0$  constante, supposé avoir les mêmes constantes électromagnétiques que celles du vide (milieu non magnétique et non polarisable).

On étudie la possibilité d'existence, dans ce conducteur, d'une onde plane progressive harmonique O.P.P.H. de pulsation  $\omega$  en prenant pour image complexe du champ électrique l'expression  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_m \exp[j(\omega t - \underline{k} \cdot \vec{r})]$ .

On reprend l'équation de propagation dans un métal établie au § I.2. pour une O.P.P.H.

$$\Delta(\vec{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\gamma_0}{1 + j\omega\tau} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}, \text{ avec } \tau = \frac{m\gamma_0}{n^* e^2}$$

On suppose la loi d'Ohm applicable dans le métal et que sa conductivité reste réelle, ce qui suppose d'une part  $\omega \ll \frac{1}{\tau} = \frac{n^* e^2}{m\gamma_0}$  (pour pouvoir écrire  $\underline{\gamma} \approx \gamma_0$ ) et d'autre part que  $\|\vec{j}\| \gg \epsilon_0 \left\| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|$  (les



courants de conduction sont prépondérants dans le métal pour des fréquences inférieures à  $10^{12}$  Hz).

On a ainsi  $\gamma_0 \gg \varepsilon_0 \omega = \frac{\omega}{\mu_0 c^2}$ . Explicitement  $\mu_0 \gamma_0 = \mu_0 \frac{n^* e^2 \tau}{m} = \frac{n^* e^2}{m \varepsilon_0} \tau$ , soit  $\mu_0 \gamma_0 = \frac{\omega_p^2 \tau}{c^2}$ , en

reprenant l'expression de la pulsation plasma introduite au § III.1.

La relation de dispersion s'écrit alors  $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\mu_0 \gamma_0 \omega = \frac{\omega^2 - j\omega_p^2 \tau \omega}{c^2}$ ,

En supposant  $\begin{cases} \omega \ll 1/\tau \\ \omega \ll \omega_p^2/\tau \end{cases}$ , il reste  $\underline{k}^2 = -j\mu_0 \gamma_0 \omega = -j \frac{\omega_p^2 \tau \omega}{c^2}$  (équation 7)

➤ **Résolution de l'équation de dispersion.**

Il est judicieux de réécrire l'équation 7 sous la forme  $\underline{k}^2 = \mu_0 \gamma_0 \omega e^{-j\pi/2}$ .

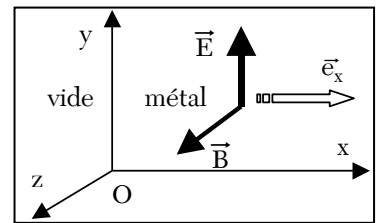
D'où  $\underline{k} = \pm e^{-j\pi/4} \sqrt{\mu_0 \gamma_0 \omega}$  soit  $\underline{k} = \pm \frac{1-j}{\delta}$ , avec  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$ , ***δ homogène à une longueur.***

Supposons que le métal occupe tout le demi espace des  $x \geq 0$  et est supposé illimité suivant Oy et Oz.

On considère que l'O.E.M. qui se propage suivant l'axe Ox dans le sens des x croissants, donc avec  $\vec{k} = k\vec{u}_x$ .

Le champ électrique dans le métal est de la forme

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_m \exp\left(\mp \frac{x}{\delta}\right) \exp[j(\omega t \mp x / \delta)].$$



On rejette la solution en  $\exp\left(+\frac{x}{\delta}\right)$  qui diverge pour  $x \rightarrow +\infty$  et on retient la solution

physiquement acceptable  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_m \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp[j(\omega t - x / \delta)]$ .

On obtient le champ magnétique dans le métal en utilisant l'équation de Maxwell – Faraday, qui s'écrit

pour des O.P.P.H. :  $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ .

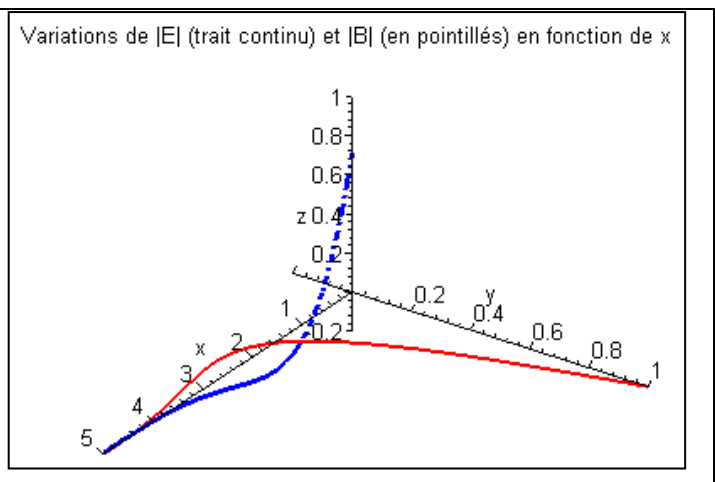
Soit ici  $\vec{B} = \sqrt{\mu_0 \gamma_0 \omega} e^{-j\pi/4} \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{\omega} = \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma_0}{\omega}} e^{-x/\delta} \exp[j(\omega t - x / \delta - \pi / 4)] \vec{u}_x \wedge \vec{E}_m$

Dans un conducteur, une O.E.M. se propage en ***s'atténuant de façon exponentielle*** avec une profondeur de pénétration typique  $\delta$ , appelée ***épaisseur de***

***peau*** :  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$ .

La propagation se fait avec ***dispersion*** et ***absorption***.

Notons également que  $\vec{E}$  est en avance sur  $\vec{B}$  de  $\frac{\pi}{4}$ .



➤ Épaisseurs de peau de quelques milieux conducteurs non magnétiques.

Conducteur	Conductivité $\gamma_0 (\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1})$	Épaisseur de peau			
		50 Hz $\delta$ en cm	1 KHz $\delta$ en mm	1 MHz $\delta$ en mm	3 GHz $\delta$ en $\mu\text{m}$
Cuivre	$5,80 \times 10^7$	0,93	2,1	0,066	1,2
Graphite	$1,0 \times 10^5$	22,4	50,3	1,59	29,0
Eau de mer	$\approx 5,0$	$3,3 \times 10^3$	$7 \times 10^3$	$2 \times 10^2$	-----

**Discussion :**

L'épaisseur de peau **diminue** quand la fréquence augmente. A haute fréquence, le champ magnétique, le champ électrique ainsi que les courants de conduction sont localisés dans une fine pellicule d'épaisseur de l'ordre de quelques  $\delta$ , au voisinage de la surface du conducteur (d'où le nom d'épaisseur de peau donnée à la longueur  $\delta$ ).

La  $\searrow$  de  $\delta$  quand la fréquence  $\nearrow$  justifie la modélisation de la conduction par des ***courants surfaciques***.

La variation de  $\delta$  avec la fréquence s'interprète très simplement avec la ***loi de Lenz*** : le conducteur s'oppose à la pénétration du champ variable en son sein, comme le sol s'oppose aux variations journalières ou annuelles de température imposées par l'air à son contact (Voir le chapitre ***Transferts thermiques***).

➤ Vecteur de Poynting dans le conducteur.

Rappelons que le vecteur de Poynting  $\vec{P}$  **doit être calculé à partir des expressions réelles des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , compte tenu de son caractère non linéaire vis-à-vis du champ électromagnétique.**

La moyenne temporelle du vecteur de Poynting s'écrit :

$$\langle \vec{P} \rangle_{temp} = P_0 \cdot e^{-\frac{2x}{\delta}} \vec{e}_x, \text{ avec } P_0 = \frac{1}{4} \delta \gamma |E_m|^2.$$

Contrairement au cas des plasmas, il y a **transfert d'énergie du champ électromagnétique vers les charges** dans un métal (effet Joule) conduisant à une perte d'énergie du champ d'où l'amortissement de l'onde.

➤ Le cas limite du conducteur parfait



Un métal **parfait** est caractérisé par une **conductivité  $\gamma \rightarrow \infty$** .

Dans un métal parfait, l'épaisseur de peau est nulle pour toute fréquence.  
On a  $\vec{E} = \vec{0}$  ;  $\rho = 0$  ;  $\vec{j} = \vec{0}$  et on peut prendre  $\vec{B} = \vec{0}$  en n'étudiant que les champs variables dans le temps (Mais il peut exister un champ  $\vec{B}$  statique non nul dans un métal parfait).



les charges et les courants éventuels ne peuvent être que **surfaciques**.

### 3°) Propagation dans un conducteur ohmique de conductivité complexe.

On reprend la relation de dispersion déduite de l'équation 3 :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\mu_0 \frac{\gamma_0}{(1 + j\omega\tau)} \omega = \frac{\omega^2 - j\omega_p^2 \frac{\tau\omega}{1 + j\omega\tau}}{c^2}, \text{ avec } \omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m\varepsilon_0}} \text{ et } \tau = \frac{m\gamma_0}{n^* e^2}.$$

➤ **Cas où**  $\frac{1}{\tau} \ll \omega_p < \omega$  :

La relation de dispersion se simplifie en  $\underline{k}^2 \approx \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$  : on retrouve le même type de relation de dispersion que celle dans un plasma sans collision, avec ici **propagation dispersive sans atténuation** ( $\underline{k}$  réel).

Le métal est **transparent** pour l'OEM dans ce domaine de fréquences, ce qui explique notamment la **transparence ultraviolette de certains métaux alcalins**, mais retenons que le modèle étudié a des limites, et **qu'il ne s'applique pas dans le domaine des trop hautes fréquences** (rayons X et au-delà).

Le modèle utilisé suppose un milieu vu comme un « fluide continu de charges libres », ce qui suppose notamment que  $\lambda \gg d$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde de l'OEM et  $d$  la distance caractéristique entre les charges libres.

Le domaine de fréquences compatible avec le modèle continu utilisé (et qui conduit à l'équation 3) suppose  $f \ll \frac{c}{d} \sim 10^{18} \text{ Hz}$ , qui appartient au domaine des **rayons U.V. lointains**.

➤ **Cas où**  $\frac{1}{\tau} \ll \omega < \omega_p$  :

La relation de dispersion conduit à  $\underline{k}^2 \approx \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ , avec ici  $\underline{k}^2 < 0$  : on obtient une **onde évanescente**.

Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  de l'onde dans le métal sont en quadrature de phase entre eux (conséquence de  $\vec{k} = jk'' \vec{u}_x$ ) et la **moyenne temporelle du vecteur de Poynting est nulle** : il n'y a pas de dissipation de l'énergie de l'onde par le milieu. En revanche, l'énergie initiale se retrouve intégralement dans une **onde réfléchi**e par la surface métallique (en  $x = 0$ )

Pour un bon conducteur comme le cuivre, ce comportement correspond à  $10^{13} \text{ Hz} \ll f \leq 10^{15} \text{ Hz}$ , donc à des longueurs d'onde appartenant au domaine  $0,3 \mu m < \lambda \ll 30 \mu m$ , ce qui englobe le domaine visible.

On comprend pourquoi les métaux peuvent **réfléchir la lumière visible**. La fabrication de miroirs optiques par dépôt d'une couche d'argent ou d'aluminium utilise cette propriété.