§3. Théorème de Banach-Steinhaus

Théorème 1

Soient E et F deux espaces normés et $\{A_n(x)\}$ une suite d'opérateurs linéaires et continus définie sur E dans F, si la suite $A_n(x)$ converge vers un opérateur $A(x)$, alors cet opérateur est linéaire et continu de plus, on a

$$\|A\| \leq \liminf \|A_n\|.$$

Démonstration

Il est clair que l'opérateur A est linéaire

$$\begin{aligned} A(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n\to\infty} A_n(\alpha x + \beta y) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\alpha A_n(x) + \beta A_n(y)) \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} A_n(x) + \beta \lim_{n\to\infty} A_n(y) \\ &= \alpha A(x) + \beta A(y). \end{aligned}$$

La suite des opérateurs $\{A_n(x)\}$ étant continue alors, on a

$$\|A_n(x)\| \leq C\|x\|, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall x \in E,$$

passons à la limite, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n(x)\| = \|A(x)\| \leq C\|x\|, \quad \forall x \in E.$$

D'où la continuité de l'opérateur A.

Pour l'évaluation de la norme $\|A\|$ de l'opérateur A, on écrit

$$\|A_n(x)\| \leq \|A_n\|\|x\|,$$

passons à la limite inférieure des deux membres, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \inf \|A_n(x)\| \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|A_n\|\|x\|,$$

ou encore

$$\|A(x)\| \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|A_n\|\|x\|.$$

D'où il vient

$$\|A\| \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|A_n\|.$$

Théorème 2 (Evaluation de la norme)

Soient E et F deux espaces normés et A un opérateur linéaire défini sur E dans F, si l'opérateur A est borné dans la boule $B(x_0, r)$, alors la norme $\|A\|$ de cet opérateur est aussi bornée. Autrement dit, on a

$$\forall\, x \in B(x_0, r), \quad \|A(x)\| \leq M,$$

implique la relation suivante

$$\|A\| \leq \frac{2M}{r}.$$

Démonstration

Pour tout $y \in B(0, 1)$, on a

$$x = x_0 + ry \in B(x_0, r),$$

ou encore

$$\|x - x_0\| = \|ry\| = r\,\|y\| \leq r.$$

D'où la relation

$$\begin{aligned} \|A(y)\| &= \frac{1}{r}\,\|A(ry)\| \\ &= \frac{1}{r}\,\|A(x) - A(x_0)\| \\ &\leq \frac{1}{r}\,(\|A(x)\| + \|A(x_0)\|) \\ &\leq \frac{2M}{r}. \end{aligned}$$

Passons au suprimum des deux membres, on obtient

$$\sup_{\|y\| \leq 1} \|A(y)\| \leq \frac{2M}{r},$$

ou encore

$$\|A\| \leq \frac{2M}{r}.$$

Espaces de Baire

Soit $(E, \|.\|)$ un espace normé, on dit que E est un espace de Baire si pour toute famille d'ouverts $(E_n)_{n \in N}$ de E, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad \overline{E_n} = E \ \text{ implique } \ \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n} = E,$$

ou encore pour toute famille de fermés $(F_n)_{n\in N}$ de E, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N};\ \ \mathrm{int}\, F_n = \emptyset \ \text{ implique } \ \mathrm{int}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \emptyset.$$

Théorème 3 (Théorème de Baire)
Tout espace de Banach $(E, \|.\|)$ *est un espace de Baire*

Démonstration
Soit $(E_n)_{n\in N}$ une famille d'ouverts telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \overline{E_n} = E.$$

Montrons que l'intersection de tout les éléments de cette famille $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$ est dense dans l'espace E, C'est à dire $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n} = E$ cela revient à dire que pour tout $x \in E$, les boules ouvertes $B(x, \varepsilon)$ de centre x et de rayon ε ont une intersection non vide avec chaque élément de la famille $(E_n)_{n\in N}$ car ces derniers sont denses dans E, en particulier avec E_1 car $\overline{E_1} = E$. C'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \forall x \in E,\ \exists x_1 \in E_1 \text{ tel que } \ \|x - x_1\| < \varepsilon,$$

ou encore

$$B(x, \varepsilon) \bigcap E_1 \neq \emptyset,$$

cette intersection étant ouverte comme intersection de deux ouverts $B(x, \varepsilon)$ et E_1 il existe alors $\rho_1 > 0$ et $x_1 \in B(x, \varepsilon) \bigcap E_1$ tels que

$$\overline{B(x_1, \rho_1)} \subset B(x, \varepsilon) \bigcap E_1 \neq \emptyset.$$

L'élément $x_1 \in E$, les boules ouvertes $B(x_1, \varepsilon)$ de centre x_1 et de rayon ε ont une intersection non vide avec chaque élément de la famille $(E_n)_{n\in N}$ car ces derniers sont denses dans E, en particulier avec E_2 car $\overline{E_2} = E$. C'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \forall x_1 \in E,\ \exists x_2 \in E_2 \text{ tel que } \ \|x_1 - x_2\| < \varepsilon,$$

ou encore

$$B(x_1, \varepsilon) \bigcap E_2 \neq \emptyset,$$

cette intersection étant ouverte comme intersection de deux ouverts $B(x_1, \varepsilon)$ et E_2 il existe alors $\rho_2 > 0$ et $x_2 \in B(x_1, \rho_2) \bigcap E_2$ tels que

$$\overline{B(x_2, \rho_2)} \subset B(x_1, \rho_1) \bigcap E_2 \neq \emptyset,$$

ou encore, il vient

$$\overline{B(x_2, \rho_2)} \subset B(x, \varepsilon) \bigcap E_1 \bigcap E_2$$

D'où, on peut construire par récurrence deux suites ρ_n et x_n telles que

$$\overline{B(x_{n+1}, \rho_{n+1})} \subset B(x_n, \rho_n) \bigcap E_{n+1} \neq \emptyset,$$

ou encore, il vient

$$\overline{B(x_{n+1}, \rho_{n+1})} \subset B(x, \varepsilon) \bigcap \left(\bigcap_{n=1}^{n+1} E_n \right).$$

Il en résulte que la suite x_n est de Cauchy dans un espace de Banach. D'où la converge de cette dernière vers l'élément $x_0 \in \overline{B(x_n, \rho_n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car, on a

$$\forall p, q \geq n; \quad x_p,\ x_q \in B(x_n, \rho_n)$$

Autrement dit, il vient

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in E,\ \exists x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \ \text{ tel que } \|x - x_0\| < \varepsilon \Leftrightarrow E = \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n}.$$

Théorème 4 (Théorème de Banach-Steinhaus 1)
Soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs linéaires continus, définie sur un espace de Banach E dans un espace normé F, si la suite $A_n(x)$ est bornée en chaque point x de E, alors les normes de ces opérateurs $\|A_n\|$ sont aussi bornées. Autrement dit, on a

$$\forall\ x \in E,\ \sup \|A_n(x)\| < \infty \Rightarrow \sup \|A_n\| < \infty.$$

Démonstration
Supposons que la suite $\{\|A_n\|\}$ n'est pas bornée, alors la fonctionnelle définie par

$$p(x) = \sup \|A_n(x)\|$$

est aussi non bornée dans aucune boule de E, car si $p(x)$ est bornée dans une boule de E, alors d'après le théorème d'évaluation des normes, les normes $\|A_n\|$ seront aussi bornées.

Soit E_k l'ensemble ouvert, donné par

$$E_k = \{x \in E,\ p(x) > k\},$$

alors cet ensemble est dense dans E pour tout $k \geq 1$ car, on a pour tout $x \in E$, on peut trouver un $x_0 \in B(x, \varepsilon)$ tel que $p(x_0) > k$. Il est donné que $p(x)$ est non bornée dans la boule $B(x, \varepsilon)$). C'est à dire $x_0 \in E_k$. D'où la densité de E_k dans E.

D'après le théorème de Baire il existe un $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$, tel que que la fonctionnelle

$$p(x_0) = \sup \|A_n(x_0)\| = \infty.$$

D'où, on obtient le résultat voulu

$$\sup \|A_n\| = \infty \Rightarrow \exists\, x_0 \in E, \quad \sup \|A_n(x_0)\| = \infty.$$

En d'autres termes,

$$\forall\, x \in E,\ \sup \|A_n(x)\| < \infty \Rightarrow \sup \|A_n\| < \infty.$$

Théorème 5 (Théorème de Banach-Steinhaus 2)

Soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs linéaires continus, définie sur un espace de Banach E dans un espace de Banach F, la suite $\{A_n\}$ converge vers un opérateur linéaire continu A, si et seulement si

- *Les normes $\|A_n\|$ des opérateurs A_n sont bornées*
- *La suite $\{A_n\}$ est de Cauchy pour tout élément x d'un ensemble G dense dans E.*

Démonstration

1. *Condition suffisante*

La densité de l'ensemble G dans E donne

$$\overline{G} = E \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, x \in E,\ \exists\, y \in G, \quad \text{tel que } \|x - y\| < \varepsilon.$$

La suite $\{A_n\}$ étant de Cauchy pour tout élément y de G alors, on a

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, p, q \geq N,\ \forall\, y \in G,\ \text{on a } \|A_p(y) - A_q(y)\| < \varepsilon.$$

D'où pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned}
\|A_p(x) - A_q(x)\| &= \|A_p(x) - A_q(x) + A_p(y) - A_p(y) + A_q(y) - A_q(y)\| \\
&\leq \|A_p(x) - A_p(y)\| + \|A_q(x) - A_q(y)\| + \|A_p(y) - A_q(y)\| \\
&< (\|A_p\| + \|A_q\|)\, \|x - y\| + \varepsilon \\
&< (2C + 1)\, \varepsilon.
\end{aligned}$$

L'espace F étant complet, alors il existe un opérateur linéaire continu A, tel que

$$\lim A_n(x) = A(x).$$

2. *Condition nécessaire*

La suite d'opérateurs linéaires continus $\{A_n\}$ converge vers l'opérateur linéaire continu A. D'où elle est de Cauchy pour tout élément x de E et par conséquent pour tout élément de G, car dense dans E. De plus, les normes $\|A\|$ et $\|A_n\|$ sont bornées car les opérateurs A et A_n sont continus pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Application ouverte

Soient E et F deux espaces de Banach et A une application linéaire continue surjective de E sur F. Alors, on dit que A est une application ouverte si, on a l'image directe de tout ouvert de E par A est un ouvert de F.

Théorème 6 (Théorème de l'application ouverte)

Soit A un opérateur linéaire continu et surjectif, défini sur un espace de Banach E dans un espace de Banach F, alors il existe une constante positive $\alpha > 0$ telle que

$$B_F(0, \alpha) \subset A\left(B_E(0, 1)\right).$$

Corollaire 1

Soit A un opérateur linéaire vérifiant le théorème de l'application ouverte, alors l'image de tout ouvert V de E par l'opérateur A est un ouvert $A(V)$ de F.

Démonstration

Soit V un ouvert de E, alors pour tout $y \in A(V)$ il existe $x \in V$ tel que

$$y = A(x),$$

cela veut dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$B_E(x, \varepsilon) \subset V,$$

ou encore

$$x + B_E(0, \varepsilon) \subset V.$$

La composition par l'opérateur A des deux membres nous donne

$$A(x) + A\left(B_E(0, \varepsilon)\right) \subset A(V),$$

ou encore

$$y + A(B_E(0, \varepsilon)) \subset A(V).$$

Appliquons le théorème de l'application ouverte pour l'opérateur A

$$B_F(0,\alpha) \subset A(B_E(0,1)),$$

ou encore

$$B_F(0,\alpha\varepsilon) \subset A(B_E(0,\varepsilon)).$$

D'où, on obtient

$$y + B_F(0,\alpha\varepsilon) \subset y + A(B_E(0,\varepsilon)) \subset A(V),$$

ou encore

$$B_F(y,\varepsilon\alpha) \subset A(V).$$

Théorème 7 (Théorème des opérateurs inverses)
Soit A un opérateur borné et bijectif, défini sur un espace de Banach E dans un espace de Banach F, alors l'opérateur inverse A^{-1} est aussi borné.

Démonstration
Il en résulte immédiatement du théorème de l'application ouverte, l'application A étant bijective, continue et ouverte elle donc bicontinue. D'où, on a

$$A \in L(E,F),\ A \quad \text{bijectif implique} \quad A^{-1} \in L(F,E)$$

Espaces Produits
Soient E et F deux espaces normés, on appelle espace produit que l'on note $E \times F$ l'ensemble des couples $z = (x,y)$, muni des opérations suivantes

$$\alpha z_1 + \beta z_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2),\ \text{avec}\ \ z_1 = (x_1,y_1),\ z_2 = (x_2,y_2)$$

et α, β des scalaires. On muni cet espace par la norme dite de graphe

$$\|z\| = \|\ (x,y)\ \| = \|x\|_E + \|y\|_F.$$

Remarque 1
L'espace produit $E \times F$ est un espace de Banach si E et F sont des espaces Banach.

Graphes
soit A un opérateur défini sur le sous espace $D(A) \subset E$ à valeurs dans le sous espace $R(A) \subset F$, on appelle graphe de A le sous ensemble $G(A) \subset E \times F$ défini par

$$G(A) = \{(x,y),\ x \in D(A),\ y = A(x)\} \subset E \times F,$$

ou encore

$$G(A) = \{(x, A(x)); \quad x \in D(A)\} \subset E \times F,$$

de plus $G(A)$ est un sous espace de $E \times F$.

Opérateurs fermés

On dit que l'opérateur A est fermé, si toute suite x_n d'éléments de $D(A)$, converge vers x telle que la suite $A(x_n)$ soit convergente vers y alors, on a

$$x \in D(A) \text{ et } y = A(x)$$

ou encore

On dit que l'opérateur A est fermé, si toute suite $(x_n, A(x_n))$ d'éléments de $G(A)$ converge vers (x, y) alors, on a

$$(x, y) \in G(A) \text{ avec la relation } y = A(x).$$

Remarque 1

Un opérateur A est fermé, si et seulement si son graphe $G(A)$ est fermé.

Remarque 2

Tout opérateur continu A linéaire ou non linéaire a un graphe fermé.

Remarque 3

Un opérateur A fermé n'est pas nécessairement borné. (sauf s'il est défini sur tout un espace de Banach E.)

Théorème 8 (de graphe fermé)

Soit A un opérateur linéaire, défini sur un espace de Banach E à valeurs dans un espace de Banach F, si le graphe $G(A)$ est fermé dans $E \times F$, alors A est continu.

Démonstration

Soit P l'opérateur de projection défini sur le graphe $(G(A), \|x\|_E + \|A(x)\|_F)$, muni de la norme $\|x\|_E + \|A(x)\|_F$ dans l'espace $(E, \|x\|_E)$, muni de la norme $\|x\|_E$, par

$$\begin{aligned} P : G(A) &\rightarrow E \\ (x, A(x)) &\rightarrow P(x, A(x)) = x, \end{aligned}$$

l'opérateur de projection P est borné car, on a

$$\|x\|_E \leq \|x\|_E + \|A(x)\|_F,$$

l'opérateur de projection P est bijectif car, on a

$\forall x \in E,$ il existe un seul couple $(x, A(x))$ du graphe fermé tel que $P(x, A(x)) = x$.

D'après le théorème des opérateurs inverses, l'opérateur P^{-1} est borné d'où, on a la relation

$$\|A(x)\|_F + \|x\|_E \leq C\|x\|_E,$$

ou encore

$$\|A(x)\|_F \leq (C-1)\|x\|_E,$$

ce qui implique la continuité de l'opérateur A.

Bibliographie

[1] **L. KANTOROVITCH, D. AKILOV.** Analyse Fonctionnelle Tome1, Tome2. Editions Mir 1981.

[2] **A. KOLMOGOROV, S. FOMINE.** Elements de la Théorie des Fonctions et de l'Analyse Fonctionnelle. Editions Mir 1974.

[3] **V. MIKHAILOV.** Equations aux dérivées partielles. Editions Mir 1980.

[4] **M. NADIR.** Cours d'analyse fonctionnelle, université de Msila Algérie 2004.

[5] **W. RUDIN.** Functional Analysis. McGraw-Hill New York 1973.