

Théorème d'existence et d'unicité (Méthode de contraction)

Le principe des applications contractantes est utilisé pour la démonstration de nombreux théorèmes d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles, fonctionnelles et intégrales.

Théorème (dit théorème **d'existence et d'unicité**)

Soit l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

où $f(t, x)$ est une fonction continue de deux variables (t, x) sur l'ensemble

$$\mathbb{D} = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\} \subset \mathbb{U},$$

et satisfait à la condition de Lipschitz en x

$$|f(t, x_2) - f(t, x_1)| \leq L |x_2 - x_1| \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in \mathbb{D}.$$

Alors, il existe une solution et une seule $x = \varphi(t)$ de l'équation (1) définie sur l'intervalle $\mathbb{T} =]t_0 - d, t_0 + d[$, avec $d \leq a$ et satisfait à la condition

$$\varphi(t_0) = x_0 \tag{2}$$

Application contractante

Soit $\mathbb{E} = (X, \rho)$ un espace métrique, une application A définie sur \mathbb{E} à valeurs dans \mathbb{E} est dite contractante s'il existe un nombre positif $K \in]0, 1[$ tel que, pour tout point $x, y \in \mathbb{E}$, on a

$$\rho(Ax, Ay) \leq K \rho(x, y), \tag{3}$$

c'est à dire

$$\|Ay - Ax\| \leq K \|y - x\|.$$

Proposition

Toute application contractante est continue.

Démonstration

En effet, en vertu de la relation (3), on a

$$x_n \rightarrow x \text{ implique } Ax_n \rightarrow Ax, \quad (n \rightarrow \infty)$$

Point fixe

Un point $x \in \mathbb{E}$ est appelé point fixe de l'application A si, on a

$$Ax = x,$$

en d'autre terme, les points fixes sont les points solutions de l'équation

$$Ax = x.$$

Théorème

Dans un espace métrique complet \mathbb{E} toute application contractante A admet un point fixe et un seul.

Démonstration

Existence

Soit x_0 un point de \mathbb{E} et soit $\{x_n\}$ la suite définie par

$$x_1 = Ax_0, \quad x_2 = Ax_1 = A^2x_0, \dots, \quad x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0, \dots$$

alors cette suite est de Cauchy car pour $m \geq n$, on a

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &= \rho(A^n x_0, A^n x_{m-n}) \leq K^n \rho(x_0, x_{m-n}) \\ &\leq K^n [\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \dots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})] \\ &\leq K^n \rho(x_0, x_1) [1 + K + K^2 + \dots + K^{m-n-1}] \\ &\leq K^n \rho(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{\infty} K^i = K^n \rho(x_0, x_1) \frac{1}{1-K}. \end{aligned}$$

Comme $0 < K < 1$, cette valeur peut être rendue aussi petit que l'on veut lorsque n augmente indéfiniment, l'espace \mathbb{E} étant complet alors la suite de Cauchy $\{x_n\}$ converge, soit

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

L'application contractante A est continue, alors

$$\begin{aligned} Ax &= A \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x. \end{aligned}$$

D'où l'existence d'un point fixe pour l'application contractante A .

Unicité

Soient x et y deux points fixes alors, on a

$$Ax = x \text{ et } Ay = y$$

en vertu de la relation (3)

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \rho(Ax, Ay) \\ &\leq K\rho(x, y), \end{aligned}$$

d'où

$$0 \leq (1 - k)\rho(x, y) \leq 0 \Rightarrow (1 - K)\rho(x, y) = 0.$$

Comme $(1 - K) \neq 0$, alors $\rho(x, y) = 0$ d'où le résultat voulu $x = y$.
C.Q.F.D.

Démonstration (Théorème d'existence et d'unicité)

Comme il est connu la relation

$$\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)),$$

avec la condition initiale

$$\varphi(t_0) = x_0,$$

est équivalente à l'équation intégrale

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau))d\tau \quad (4)$$

Soit A une application définie comme suit, pour toute fonction φ il existe une fonction φ^* telle que

$$\varphi^*(t) = (A\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau))d\tau \quad (5)$$

ou symboliquement,

$$\varphi^* = A\varphi,$$

la solution de l'équation symbolique (4)

$$\varphi = A\varphi \tag{6}$$

est un point fixe de l'opérateur A .

Soit \mathbb{G} le domaine donné par

$$\mathbb{G} = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad |t - t_0| \leq r, \quad |x - x_0| \leq b\} \subset \mathbb{D},$$

avec

$$r \leq a. \tag{7}$$

Désignons par Ω la famille de toutes les fonctions continues sur le segment $[t_0 - r, t_0 + r]$, dont les graphes passent par \mathbb{G} , d'où la fonction $\varphi(t)$ appartient à la famille Ω si et seulement si $\forall t \in [t_0 - r, t_0 + r]$, on a

$$|\varphi(t) - x_0| \leq b. \tag{8}$$

Le problème est de trouver le nombre r tel que les deux conditions

- $\varphi \in \mathbb{G} \Rightarrow A\varphi \in \mathbb{G}$
- $\exists K \in]0, 1[, \quad \|A\varphi - A\psi\| \leq K \|\varphi - \psi\|, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathbb{G}$

soient vérifiées.

Pour la première condition, montrons que pour tout $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$, on a

$$|(A\varphi)(t) - x_0| \leq b. \tag{9}$$

En effet,

$$|(A\varphi)(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^t |f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau \leq Mr, \quad |f(\tau, \varphi(\tau))| \leq M,$$

d'où la première condition est remplie pour

$$r \leq \frac{b}{M}. \tag{10}$$

Pour la deuxième condition, on a

$$\begin{aligned}
|(A\varphi)(t) - (A\psi)(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(\tau, \varphi(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau))| d\tau \\
&\leq L \int_{t_0}^t |\varphi(\tau) - \psi(\tau)| d\tau \\
&\leq L \|\varphi - \psi\| |t - t_0| \\
&\leq Lr \|\varphi - \psi\|,
\end{aligned}$$

d'où

$$\max_{t \in [t_0 - r, t_0 + r]} |(A\varphi)(t) - (A\psi)(t)| \leq Lr \|\varphi - \psi\|$$

autrement dit

$$\|A\varphi - A\psi\| \leq Lr \|\varphi - \psi\|.$$

ainsi la deuxième condition est vérifiée si

$$r \leq \frac{K}{L}, \tag{11}$$

avec $K \in]0, 1[$ et L la constante de Lipschitz. D'où les conditions aux dessus sont remplies pour la famille Ω , avec le nombre r vérifiant les inégalités (7), (10) et (11).

Posons

$$\rho(\varphi, \psi) = \|\varphi - \psi\|, \quad \forall \varphi, \psi \in \Omega.$$

L'espace métrique $\mathbb{F} = (\Omega, \rho)$ est complet comme sous espace fermé de l'espace complet de toutes les fonctions continues sur $[t_0 - r, t_0 + r]$.

Comme $K \in]0, 1[$ et $A\varphi \in F, \forall \varphi \in \mathbb{F}$, l'application

$$A : \varphi \mapsto A\varphi \quad \text{est contractante.}$$

En vertu du principe des applications contractantes l'équation $A\varphi = \varphi$ admet une solution et une seule dans l'espace \mathbb{F} avec la condition

$$d = \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{K}{L}\right).$$

Bibliographie

- [1] **M. KRASNOV, A. KISSELEV, G. MAKARENKO.** Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires. Editions Mir 1978.
- [2] **M. NADIR.** Cours Equations différentielles ordinaires, Université de Msila Algérie 2004.
- [3] **A. PHILIPPOV.** Recueil de problèmes d'équations différentielles. Editions Mir 1976.
- [4] **A. TRITIAK.** Cours Equations différentielles ordinaires, Université de Constantine Algérie 1981.

Address. Prof. Dr. Mostefa NADIR
Department of Mathematics
Faculty of Mathematics and Informatics
University of Msila
28000 ALGERIA

E-mail. mostefanadir@yahoo.fr