Remarques sur le théorème d'existence et d'unicité

Soit le problème de Cauchy suivant

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

avec la condition initiale

$$\varphi(t_0) = x_0. \tag{2}$$

Remarque 1

Le théorème d'existence et d'unicité fournit uniquement les conditions suffisantes pour l'existence de la solution unique du problème de Cauchy (1) avec la condition initiale (2).

Exemple 1

Soit l'équation

$$\dot{x} = \sin x - \cos t.$$

La fonction $f(t, x) = \sin x - \cos t$ est une fonction continue et Lipschitzienne, d'où l'existence et l'unicité de la solution $x = \varphi(t)$ pout tout couple (t_0, x_0) avec la condition initiale $x_0 = \varphi(t_0)$.

Remarque 2

Le théorème d'existence et d'unicité n'est pas nécéssaire pour l'existence de la solution unique du problème de Cauchy (1) avec la condition initiale (2).

Autrement dit, on peut trouver des équations du type (1), possédant des solutions uniques, satisfaisants à la condition (2) sans que les conditions du théorème soient remplies au point (t_0, x_0).

Exemple 2

Soit l'équation différentielle

$$\dot{x} = \frac{1}{x}.$$

La fonction $f(t,x) = \dfrac{1}{x}$ n'est pas continue aux points $(t_0, 0)$ de l'axe $\overrightarrow{Ot}$ aussi cette fonction n'est pas lipschitzienne. Mais elle admet l'unique solution

$$x^2 = 2(t - t_0), \quad \varphi(t_0) = 0.$$

Remarque 3

La continuité de la fonction $f(t,x)$ est essentielle pour l'existence de la solution du problème de Cauchy (1) avec la condition initiale (2).

Exemple 3

Soit l'équation

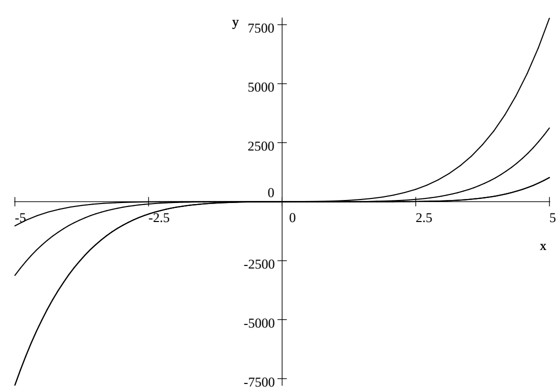
$$\dot{x} = 3\sqrt[3]{x^2}.$$

La fonction $f(t,x) = 3\sqrt[3]{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais la condition de Lipschitz n'est pas vérifiée.

Après l'intégrale de l'équation on trouve deux solutions

$$x = (t + c)^3, \qquad x = 0.$$

Donc il n'y a pas d'unicité car, on a pour chaque point de l'axe des abscisses deux courbes passent



Remarque 4

La condition de Lipschitz de la fonction $f(t,x)$ est essentielle pour l'unicité de la solution du problème de Cauchy (1) avec la condition initiale (2).

Remarque 5

La fonction $f(t,x)$ possède une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ bornée dans le domaine D peut remplacer La condition de Lipschitz.

En effet, l'existence d'une dérivée $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right| \leq M$ bornée dans D implique

$$\begin{aligned} |f(t,x_2) - f(t,x_1)| &= \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| |x_2 - x_1| \\ &\leq L\,|x_2 - x_1| \end{aligned}$$

Remarque 6

La condition de Lipschitz est plus affaiblie que la bornétude de la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ dans le domaine D.

En effet, on prend l'équation

$$\dot{x} = |x| \sin t,$$

la fonction $f(t,x) = |x| \sin t$ n'est pas dérivable à l'origine c'est à dire que la dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'existe pas au point $(t_0, 0)$, $t_0 \neq k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ par contre la condition de Lipschitz est remplie,

$$\begin{aligned} |f(t,x_2) - f(t,x_1)| &= ||x_2| \sin t - |x_1| \sin t| \\ &\leq |\sin t|\, |x_2 - x_1| \\ &\leq L\,|x_2 - x_1|\,, \quad \text{avec} \quad L \geq 1 \end{aligned}$$

Remarque 7

La solution $x = \varphi(t)$ ne dépend pas de la condition initiale $x_0 = \varphi(t_0)$. En vertu de l'unicité, on peut prendre en qualité de $\varphi(t_0)$ n'importe quelle fonction continue dont le graphe appartient à l'ensemble D.

Remarque 8

La méthode de Piccard ne donne pas la solution exacte du problème de Cauchy (1) avec la condition initiale (2).mais une méthode d'approximation de la solution.

Exemple 4

En utilisant la méthode de Piccard, trouver la solution de l'équation différentielle

$$\dot{x} = x$$

avec la condition initiale $(0, 1)$

$$\varphi(0) = 1.$$

Comme, il est connu l'équation intégrale correspondante s'écrit sous la forme

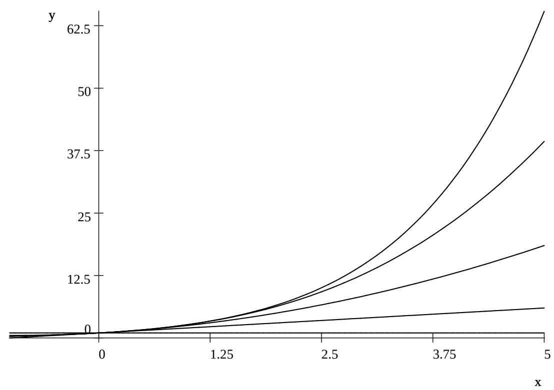
$$\begin{aligned} \varphi^{i+1}(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau\varphi^i(\tau))d\tau \\ &= 1 + \int_0^t \varphi^i(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

où la construction de la série donne

$$\begin{aligned} \varphi^0(t) &= 1, \\ \varphi^1(t) &= 1 + \int\limits_0^t d\tau = 1 + t, \\ \varphi^2(t) &= 1 + \int\limits_0^t (\tau + 1)d\tau = 1 + t + \frac{t^2}{2!}, \\ \varphi^3(t) &= 1 + \int\limits_0^t (1 + \tau + \frac{\tau^2}{2!})d\tau = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}, \\ &\vdots \\ \varphi^i(t) &= 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + ... + \frac{t^i}{i!} \\ &\vdots \end{aligned}$$

La limite de cette suite converge uniformément sur tout l'axe réel vers la fonction

$$\varphi(t) = \exp t.$$



Remarque 9
Soit D le domaine donné par

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad |t - t_0| < a, \;\; |x| < \infty\},$$

et soit la fonction $f \in C(D, \mathbb{R})$ satisfait à la condition de Lipschitz sur l'ensemble D, alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe une solution et une seule

$$x = \varphi(t), \text{ avec } x_0 = \varphi(t_0) \text{ et } \; \varphi \in C([t_0 - a, t_0 + a], \mathbb{R}).$$

Remarque 10
Soit D le domaine donné par

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad |t| < \infty, \;\; |x| < \infty\},$$

et soit la fonction $f \in C(D, \mathbb{R})$ satisfait à la condition de Lipschitz sur l'ensemble $\mathbb{D}$, alors pour tout point $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, il existe une solution et une seule

$$x = \varphi(t), \text{ avec } x_0 = \varphi(t_0) \text{ et } \varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Exemple 5

Soit l'équation

$$\dot{x} = t + \sin x.$$

La fonction $f(t, x) = t + \sin x$ est Lipschitzienne sur tout $\mathbb{R}^2$avec la constante de Lipschitz $L = 1$ car, on a

$$\left|\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\right| = |\cos x| \leq 1,$$

alors pour tout point $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une solution et une seule

$$x = \varphi(t), \text{ avec } x_0 = \varphi(t_0) \text{ et } \varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Exemple 6

Soit l'équation

$$\dot{x} = |x|$$

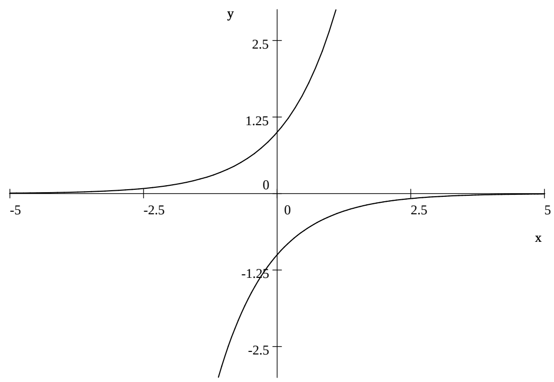
La fonction $f(t, x) = |x|$ est Lipschitzienne sur tout $\mathbb{R}^2$avec la constante de Lipschitz $L = 1$ car, on a

$$\left|\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\right| = 1 \leq 1,$$

alors pour tout point $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une solution et une seule

$$x = \varphi(t), \text{ avec } x_0 = \varphi(t_0) \text{ et } \varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} C \exp t, & C \leq 0 \\ C \exp(-t), & C \leq 0 \end{cases}$$



Remarque 11
Soit D le domaine donné par

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad |t| < \infty, \ |x| < \infty\},$$

et soit la fonction $f \in C(D, \mathbb{R})$ satisfait à la condition de Lipschitz non sur l'ensemble D, mais au voisinage de chaque point $(t_0, x_0) \in D$, (c'est à dire qu'il n'existe pas une constante L qui réalise la condition de Lipschitz sur tout D), alors pour tout point $(t_0, x_0) \in D$, il existe une solution et une seule

$$x = \varphi(t), \text{ avec } x_0 = \varphi(t_0) \text{ et } \ \varphi \text{ est définie au voisinge de } t_0.$$

Exemple 7
Soit l'équation

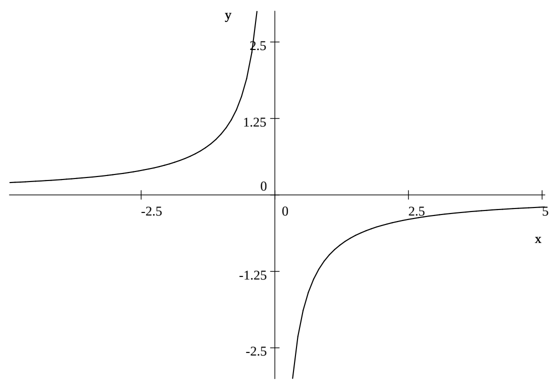
$$\dot{x} = x^2.$$

On remarque que le critère

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| &= \left|x^2 - y^2\right| \\ &\leq L\,|x - y| \end{aligned}$$

est vrai si, on a la condition $|x + y| \leq L$, cela signifie que l'on ne peut pas trouver une constante de Lipschitz L unique sur le plan tout entier. D'où pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une solution et une seule $x = \varphi(t)$ en un voisinage de t_0, $\varphi(t_0) = x_0 \neq 0$.

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) = \frac{1}{t - (t_0 + \frac{1}{x^0})}, \quad \text{si } \ \varphi(t_0) = x_0 \neq 0, \\ x &= \varphi(t) \equiv 0, \ \text{ si } \ \ x = 0. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \varphi &\in C(]-\infty, t_0 + \frac{1}{x^0}[, \mathbb{R}), \quad \text{si} \quad x^0 > 0, \\ \varphi &\in C(]t_0 + \frac{1}{x^0}, +\infty[, \mathbb{R}), \quad \text{si} \quad x^0 < 0, \\ \varphi &\in C(]-\infty, +\infty[, \mathbb{R}), \quad \text{si} \quad x^0 = 0. \end{aligned}$$

Remarque 12
Soit D le domaine donné par

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + a, \ |x - x_0| < b\},$$

ou

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad t_0 - a \leq t \leq t_0, \ |x - x_0| < b)\},$$

et soit la fonction $f \in C(D, \mathbb{R})$ satisfait à la condition de Lipschitz sur l'ensemble D, alors pour tout point t tel que

$$t_0 \leq t \leq t_0 + d,$$

ou

$$t_0 - d \leq t \leq t_0,$$

avec $d = \min(a, \dfrac{b}{M})$, il existe une solution et une seule

$$x = \varphi(t), \text{ avec } x_0 = \varphi(t_0) \ .$$

Bibliographie

[1] **M. KRASNOV, A. KISSELEV, G. MAKARENKO.** Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires. Editions Mir 1978.

[2] **M. NADIR.** Cours Equations différentielles ordinaires, Université de Msila Algérie 2004.

[3] **A. PHILIPPOV.** Recueil de problèmes d'équations différentielles. Editions Mir 1976.

[4] **A. TRITIAK.** Cours Equations différentielles ordinaires, Université de Constantine Algérie 1981.

Address. Prof. Dr. Mostefa NADIR
Department of Mathematics
Faculty of Mathematics and Informatics
University of Msila
28000 ALGERIA
E-mail. mostefanadir@yahoo.fr