



Université Mohammed Boudiaf - M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département de Mathématiques

---

---

Polycopié de cours  
Master Analyse Mathématique et numérique  
Deuxième année (Semestre 03)

---

---

---

---

# COURS DE METHODES NUMERIQUE AUX ELEMENTS FINIS

---

---

---

Enseigné par :  
Dr. GAGUI Bachir

---

---

Année : 2020/2021

---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>1 Sur les intégrales</b>	<b>5</b>
1.1 Intégrales doubles . . . . .	5
1.2 Intégrales triples . . . . .	7
1.3 Un peu de géométrie différentielle . . . . .	8
1.3.1 Les fonctions à valeurs vectorielles . . . . .	8
1.4 Intégrales curvilignes . . . . .	9
1.4.1 intégrale curviligne d'une fonction . . . . .	9
1.5 Les théorèmes intégraux de l'analyse vectorielle . . . . .	9
1.5.1 Le théorème de Green . . . . .	9
1.5.2 Théorème de la divergence (Gauss-Ostrogradsky) . . . . .	10
1.5.3 Théorème de Stokes . . . . .	10
1.6 Exercices . . . . .	11
<b>2 Espaces fonctionnels</b>	<b>12</b>
2.1 Introduction . . . . .	12
2.2 Quelques notions de base et préliminaires . . . . .	12
2.2.1 Les distributions . . . . .	12
2.2.2 Dérivée d'une distribution . . . . .	13
2.2.3 Espace de Sobolev . . . . .	13
2.2.4 L'espace $H^1(\Omega)$ . . . . .	13
2.2.5 Les sous espace de $H^1(\Omega)$ . . . . .	14

2.3	Les formes linéaires et bilinéaires continues . . . . .	14
2.3.1	Formes linéaires . . . . .	14
2.3.2	Formes bilinéaires . . . . .	14
2.4	Théorèmes de Lax-Milgram et Stambachia . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Méthodes variationnelles</b>	<b>16</b>
3.1	Formules de Green . . . . .	16
3.2	Formulation variationnelle . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Méthode des éléments finis (MEF)</b>	<b>20</b>
4.1	Introduction . . . . .	20
4.2	Méthodes de projections . . . . .	23
4.2.1	La méthode de Galerkin . . . . .	24
4.2.2	Principe de la méthode de Galerkin . . . . .	24
4.3	Méthode de Ritz . . . . .	25
4.3.1	Principe de la méthode Ritz . . . . .	25
4.4	<b>Présentation de la méthode des éléments finis</b> . . . . .	27
4.5	Éléments finis unidimensionnels $d=1$ . . . . .	28
4.5.1	Application sur les équations différentielles . . . . .	29
4.5.2	<b>Le maillage</b> . . . . .	31
4.5.3	Méthode d'éléments finis de degré 1 . . . . .	32
4.5.4	Méthode de éléments finis de degré 2 . . . . .	34
4.5.5	Méthode d'éléments finis de degré $k$ . . . . .	36
4.6	Éléments finis multidimensionnels $d \geq 2$ . . . . .	37
4.6.1	Application sur les EDPs . . . . .	37
4.6.2	Le maillage . . . . .	38
4.6.3	Les noeuds . . . . .	38
4.7	Éléments finis de Lagrange triangulaires . . . . .	39
4.7.1	Éléments finis $P_1$ . . . . .	39
4.7.2	Éléments triangulaires généraux . . . . .	42
4.7.3	Éléments finis isoparamétriques triangulaires et quadrangulaires . . . . .	46

---

4.8	Analyse de convergence . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Applications</b>	<b>58</b>
5.1	les éléments finis unidimensionnelle . . . . .	58
5.1.1	Éléments finis de degré un: $P_1$ . . . . .	58
5.1.2	2 <sup>ème</sup> application . . . . .	65
5.2	Éléments finis multidimensionnelle . . . . .	68
5.2.1	Les éléments finis triangulaire . . . . .	68
5.2.2	Les éléments finis quadrilatère . . . . .	73
	<b>Bibliographie</b>	<b>80</b>

Bachir GAGUI