Chapitre 1

Sur les intégrales

Dans ce chapitre on intéresse sur les techniques de calcules des intégrales doubles, triples ainsi les intégrales curvilignes et en finir ce rappel par des applications sur les théorèmes d'analyse vectoriel (Green-Riemann, Divergence et Stokes).

1.1 Intégrales doubles

I- Intégration sur un domaine rectangulaire

Soit une fonction positive

$$\begin{array}{rcl} f:[a,b]\times[c,d] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

L'intégrale de f sur le rectangle $[a,b]\times[c,d]$ est le volume sous le graphe de la fonction. C'est à dire le volume de l'ensemble $\{(x,y,z) \text{ tel que } (x,y)\in[a,b]\times[c,d], z\leq f(x,y)\}$.

Théorème 1.1.1 *(Théorème de Fubini). Soit une fonction $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $R=[a,b]\times[c,d]$. Alors*

$$\int_R f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx = \int_c^d \left[\int_c^d f(x,y)dx\right]dy.$$

En pratique, nous utilisons le théorème de Fubini pour calculer les intégrales sur des rectangles.

Exemple 1.1.1 *Soient la fonction $f(x,y) = x^2+y^2-4$ et le rectangle $R = [0,1]\times[0,2]$*

$$\begin{aligned}
\int_R f(x,y)dxdy &= \int_0^1 \left[\int_0^2 f(x,y)dy\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^2 (x^2+y^2-4)dy\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^2 4y - x^2y - \frac{y^3}{3}\right] dx = \frac{14}{3}.
\end{aligned}$$

II- Intégration sur un domaine non rectangulaire

Nous voulons maintenant intégrer la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$ sur le triangle de la figure

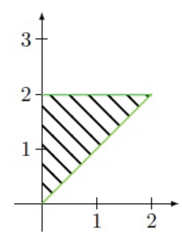

Figure 1.1.1 : Intégration sur un tiangle

$$\begin{aligned}
\int_T f(x,y)dxdy &= \int_0^2 \left[\int_0^y f(x,y)dx\right] dy \\
&= \int_0^2 \left[\int_0^y (x^2+y^2)dx\right] dy \\
&= \int_0^2 \left[\int_x^0 (x^2+y^2)dy\right] dx.
\end{aligned}$$

Remarque 1.1.1

I- *Il existe principalement deux types de domaines non rectangulaires : les horizontales et les verticales (respectivement)*

$$D_h = \{(x,y) \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b], \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

$$D_v = \{(x,y) \in \mathbb{R} : \ y \in [c,d], \psi_1(x) \leq x \leq \psi_2(x)\}$$

II- L'aire du domaine D vaut l'intégrable de la fonction $f(x,y)=1$ sur D :

$$Aire(D) = \int_D dxdy$$

.

III- **changement de variables**

Comme dans les intégrales simples, il y a souvent moyen de trouver un changement de variables qui simplifie les expressions.

Soit $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ une fonction bijective de classe C^1 dont l'inverse est également de classe C^1. On designe par x et y ses composantes, c'est-a-dire que $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$.

On appelle jacobien de la transformation φ le déterminant

$$J_\varphi(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

On a alors le théorème suivant

Théorème 1.1.2 *Soit une fonction $f : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ continue. Alors*

$$\int\int_{\varphi(\Omega_1)} f(x,y)\,dxdy = \int\int_{\Omega_1} f(x(u,v), y(u,v))\,|J_\varphi(u,v)|\,dudv.$$

(a) Le cas des coordonnées polaires : $J(r,\theta) = r$, alors $dxdy = rdrd\theta$

(b) Le cas des coordonnées cylindriques : $J(r,\theta,z) = r$, alors $dxdydz = rdrd\theta dz$

(c) Le cas des Coordonnées sphériques : $J(\rho,\theta,\varphi) = \rho^2\sin(\theta)$, alors $dxdydz = \rho^2\sin(\theta)d\rho d\theta d\varphi$

1.2 Intégrales triples

Les intégrales triples fonctionnent exactement de la même manière que les intégrales doubles.

1.3 Un peut de géométrie différentielle

1.3.1 Les fonctions à valeurs vectorielles

Opérateurs différentiels

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$; on notera $x = (x_1, x_2, .., x_n)$ un point de Ω.

- On appelle champ scalaire de l'espace $\mathbb{R}^3$ une fonction f de $\mathbb{R}^3$ à valeurs scalaires :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & f(x, y, z) \end{array}$$

- On appelle champ vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^3$ une fonction V de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{rcl} V : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix} \end{array}$$

- Soit u une fonctions de classe $C^1(\Omega)$ à valeurs réelles définie sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$. On appelle gradient de u et on note $grad(u)$ ou ∇u, le vecteur

$$grad(u) = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots\ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

- Soit $v(x) = (v_1(x), v_2(x), \ldots\ldots, v_n(x)) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. On appelle divergence du vecteur v et on note $div\,(v)$ ou $\nabla.v$, le scalaire

$$div\,(v) = \nabla.v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \ldots ... + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$$

- Soit u une fonction de deux variables (x, y) à valeurs réelles définie sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$. On appelle laplacien de u et on note $\triangle u$ ou $\nabla^2 u$, le scalaire

$$\triangle u = div\,(grad\,(u)) = \nabla.\nabla\,(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

- Soit $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. On définit pour $x \in \Omega$ le rotationnel de F comme

$$rotF(x) = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix}$$

- Soit $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. On définit pour $x \in \Omega$ le rotationnel de F comme

$$rotF(x) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

1.4 Intégrales curvilignes

Nous savons maintenant comment intégrer des fonctions sur des volumes dans $\mathbb{R}^3$ et sur des surfaces dans $\mathbb{R}^2$. Nous savons également intégrer des champs de vecteurs sur des lignes dans $\mathbb{R}^3$. Nous allons maintenant voir comment on intègre des fonctions sur des lignes et surfaces dans $\mathbb{R}^3$.

Soit un chemin $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, et une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. On définit l'intégrale de f sur γ par

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt.$$

Remarque 1.4.2

1. *Si $f = 1$, alors l'intégrale $\int_\gamma ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt$ est la longure de la courbe.*
2. *La valeur de l'intégrale de f sur γ ne dépend pas du paramétrage choisi.*

1.4.1 intégrale curviligne d'une fonction

1.5 Les théorèmes intégraux de l'analyse vectorielle

1.5.1 Le théorème de Green

Soit un champ de vecteurs F, tel que

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix}$$

et un chemin $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ donné par $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Nous avons défini la circulation de F le long de γ par

$$\begin{aligned}\int_\gamma f ds &= \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma^{'}(t)\|dt \\ &= \int_a^b \Big(F_1(\gamma(t))x^{'}(t) + F_2(\gamma(t))^{'}(t) + F_3(\gamma(t))z^{'}(t)\Big)\, dt \\ &= \int_a^b F_1dx + F_2dy + F_3dz.\end{aligned}$$

Théorème 1.5.3 *(Théorème de Green)*
Soient $P, Q : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1. Alors

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Remarque 1.5.3 *L'aire du domaine D est donnée par*

$$Aire(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx.$$

1.5.2 Théorème de la divergence (Gauss-Ostrodasky)

Soient D un domaine dans le plan et $\gamma(t) = (x(t), y(t)$ une paramétrisation.
une paramétrisation du bord ∂D de D. La normale à γ est perpendiculaire à la tangente, donc la normale extérieure de norme 1 vaut

$$n = \frac{(y^{'}(t), -x^{'}(t))}{\sqrt{(x^{'}(t))^2 + (y^{'}(t))^2}}$$

Théorème 1.5.4 *(Théorème de la divergence)*
Soit F un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$. Le flux de F à travers le bord de D est égal à l'intégrale de la divergence de F sur D,

$$\int_{\partial D} F.nd\gamma = \iint_D \nabla.FdA.$$

1.5.3 Théorème de Stokes

Nous nous mettons maintenant dans $\mathbb{R}^3$, et nous y considérons une surface paramétrée S donc le bord est ∂S.

Théorème 1.5.5 *(Théorème de Stokes)*

Alors le flux du rotationnel de F à travers S est égal à la circulation de F le long du bord,

$$\int_{\partial S} F.d\gamma = \iint_S \nabla \times F dS.$$

1.6 Exercices

Calculer $\int_\gamma f dl$, avec f et le bord de γ dans les cas suivants:

1- $f(x,y) = x + 2y$, est le bord du trapèze $(0,0),(2,0),(1,1),(0,1)$.

2- $f(x,y) = y^2; \gamma(t) = (t, e^t), 1 \leq t \leq 3$.

3- $f(x,y) = x^2 + y^2$ γ= bord du carré $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$.