Chapitre 2

Espaces fonctionnels

2.1 Introduction

L'analyse de la méthode des éléments finis requiert une bonne dose d'analyse fonctionnelle, outil fondamental pour une véritable compréhension de cette méthode. C'est l'objet de ce chapitre. Précisions dans le départ que notre objectif n'est pas de donner un cours d'analyse fonctionnelle complet mais bien de donner les outils de base nécessaires à l'utilisation efficace de la méthode des éléments finis .

Parmi les outils de base, on retrouve les notions de distributions, d'espaces de Hilbert, de Sobolev, etc. . . , Nous omettons toutefois beaucoup de détails et de subtilités qui ont bien sur leur importance mais qui ne sont pas essentielles à une bonne compréhension de la méthode des éléments finis.

Un espace fonctionnel est un espace vectoriel dont les éléments sont des fonctions.

2.2 Quelques notions de base et préliminaires

2.2.1 Les distributions

Les distributions sont des fonctions ce que nombres irrationnels sont aux nombres rationnels. Les distributions sont en fait une généralisation de notion de fonction, ont notions essentielles comme la dérivation d'une distribution.

2.2.2 Dérivée d'une distribution

On définit la dérivée d'une distribution T par la relation suivante

$$\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle \qquad \forall \varphi \in D\left(]a,b[\right).$$

On définit de manière similaire, la dérivée d'ordre n

$$\left\langle T^{(n)}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \varphi^{(n)} \right\rangle \quad \forall \varphi \in D\left(]a,b[\right).$$

2.2.3 Espace de Sobolev

L'espace de Sobolev $W^{1,p}$ est défini par

$$W^{m,p} = \left\{ u \in L^p(\Omega) \text{ pour tout multi indice } \alpha, \text{ avec } |\alpha| \leq m,\ D^\alpha u \in L^p(\Omega) \right\},$$

dans cette définition la dérivée partielle D^α est entendu au sens de distributions

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_{2+ \dots} \alpha_{n-1} + \alpha_n$$
$$D^\alpha u = \frac{\partial^\alpha u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}$$

2.2.4 L'espace $H^1(\Omega)$

On note par $H^1(\Omega)$ l'espace fonctionnel linéaire défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq 3 \right\},$$

que l'on munit du produit scalaire noté $((u;w))_{1,\Omega}$

$$((u,w))_{1,\Omega} = \int\limits_\Omega \left(uw + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u \partial w}{\partial x_i \partial x_i} \right) dv.$$

et par le fait même d'une norme induite

$$\|u\|_{1,\Omega} = \left(((u,u))_{1,\Omega} \right)^{1/2} = \left(\int_\Omega \left(u^2 + \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right) dv \right)^{1/2}.$$

Remarque 2.2.1

1. *Si $p = 2$ on a $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$.*
2. *H^1 est un espace Hilbert.*

2.2.5 Les sous espace de $H^1(\Omega)$

On a quelques sous-espaces de H^1 sont extrêmement utiles en pratique, il s'agit l'espace $H_0^1(\Omega)$

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}.$$

2.3 Les formes linéaires et bilinéaires continues

2.3.1 Formes linéaires

Définition 2.3.1 (forme linéaire)

On appelle forme linéaire une fonctionnelle linéaire sur un espace de Hilbert V. Une forme linéaire l vérifie donc les propriétés suivantes

- $l(\alpha u) = \alpha l(u) \qquad \forall u \in V$ *et* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- $l(u_1 + u_2) = l(u_1) + l(u_2)\,,\ \forall u_1, u_2 \in V$.

Définition 2.3.2 (forme linéaire continue)

Une forme linéaire l sur l'espace de Hilbert V muni de la norme $\|.\|_V$ est dite continue s'il existe une constante C, telle que

$$\|l(u)\| \leq C \|u\|_V \qquad \forall u \in V,$$

2.3.2 Formes bilinéaires

Définition 2.3.3 (Forme bilinéaire)

Une forme bilinéaire sur un espace de Hilbert V est une application a qui associe à un couple $(u, w) \in V \times V$ un scalaire noté $a(u, w)$ satisfaisant

- $a(\alpha u_1 + \beta u_2, w) = \alpha a(u_1, w) + \beta a(u_2, w)\,,\ \forall u_1, u_2, w \in V$ *et* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $a(u, \alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha a(u, w_1) + \beta a(u, w_2)\,,\ \forall u, w_1, w_2 \in V$ *et* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Une forme bilinéaire est donc linéaire en chacun de ses deux arguments.

Définition 2.3.4 (Forme bilinéaire continue)

Une forme bilinéaire a est dite continue sur $V \times V$ s'il existe une constante C, telle que

$$\|a(u, w)\| \leq C \|u\|_V \|w\|_V \qquad \forall u, w \in V,$$

Définition 2.3.5

Une forme bilinéaire a est dite symétrique si

$$a(u, w) = a(w, u), \ \forall u, w \in V,$$

Définition 2.3.6

Une forme bilinéaire est dite coercive ou elliptique s'il existe une constante strictement positive α, telle que

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2, \forall u \in V,$$

Remarque 2.3.2

Les formes bilinéaires coercives sont une généralisation de la notion de matrice définie positive.

2.4 Théorèmes de Lax-Milgram et Stambachia

Théorème 2.4.1 (Lax-Milgram) *Soit V un espace de Hilbert et soient l est une formes linéaire continues sur V et a est une forme bilinéaire continues et coercive sur $V \times V$. alors il existe une unique solution u du problème variationnel.*

$$\begin{cases} \text{Trouver une fonction } u \in V \text{ telle que} \\ a(u, w) = l(w), \ \forall w \in V \end{cases}.$$

Théorème 2.4.2 (Stambachia) *Soit V un espace de Hilbert et soient l est une formes linéaire continues sur V et a est une forme bilinéaire continues, coercive et symétrique, alors le problème suivant*

$$a(u, w) = l(w), \forall w \in V.$$

Admit une unique solution u sous la forme

$$J(u) = a(u, w) - 2l(w),$$

qui représente le minimum de la fonction