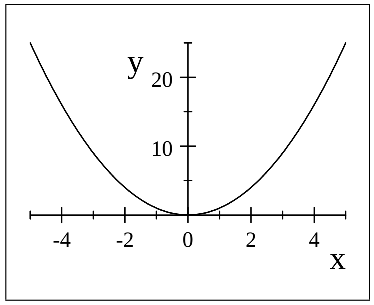
Faculté des Mathématiques de l'Informatique
Département des mathématiques
Licence 3ième année
Module: Optimisation sans contraintes (2020/2021)

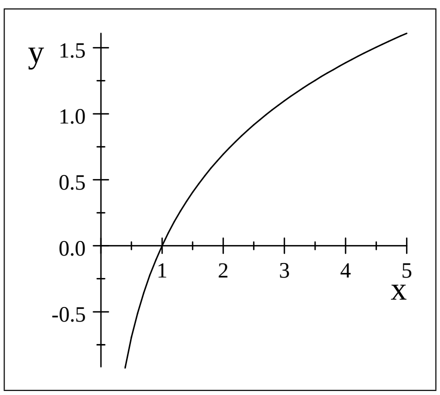
Exemples:
1) $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$

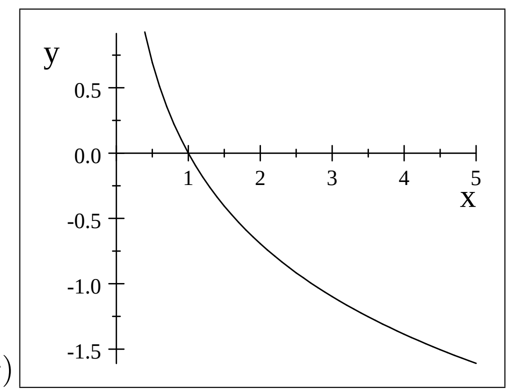


On a

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f''(x) = 2 > 0,$$

donc $f(x) = x^2$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.
2) $f(x) = \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$

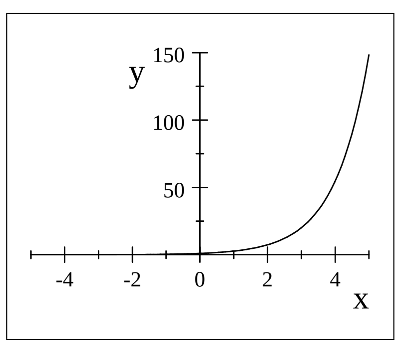
$\ln(x)$ 

$\Rightarrow -\ln(x)$ 

On a

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

donc $f(x) = \ln(x)$ est strictement concave sur $]0, +\infty[$.
3) $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$



On a

$$f^{'}(x) = e^x \Rightarrow f^{''}(x) = e^x > 0,$$

donc $f(x) = e^x$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.

Inégalité de Jensen et ses applications

L'inégalité de Jensen est une généralisation de la définition de fonctions convexes où on considère des combinaisons de longueur supérieurs à 2. Cette inégalité est due au mathématicien danois **Johan Jensen** (il donna la preuve en 1906).

L'inégalité reste vraie pour les fonctions concaves, en inversant le sens.

Enoncé de l'inégalité: *Soient* C *un convexe de* $\mathbb{R}$ et $f : C \to \mathbb{R}$ *une fonction convexe,* $x_1, \ldots, x_m \in C$ et $\lambda_1, ..., \lambda_m \geq 0$ *tels que* $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, *alors*

$$f(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i).$$

Preuve.
Par récurrence sur m:
- La relation est vraie pour deux éléments $m = 2$ (car f est convexe).
- Supposons que cette inégalité est vraie pour k éléments où $k < m$. Soient $x_1, ..., x_m \in C$ et $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}^+$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$. Donc, on peut supposer que $\lambda_m \neq 1$ (sinon on est dans une situation triv

$$\begin{aligned} f(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i) &= f(\lambda_m x_m + \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i x_i) \\ &= f(\lambda_m x_m + (1 - \lambda_m) y) \end{aligned}$$

où $y = \sum\limits_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{(1-\lambda_m)} x_i$. Remarquons que $\sum\limits_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{(1-\lambda_m)} = 1$, c'est à dire $y \in C$. La convexité de f implique

$$f(\lambda_m x_m + (1 - \lambda_m) y) \leq \lambda_m f(x_m) + (1 - \lambda_m) f(y)$$

D'autre part, par hypothèse $(m - 1 < m)$ on a

$$f(y) = f(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{(1 - \lambda_m)} x_i) \leq \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{(1 - \lambda_m)} f(x_i),$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
f(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i) &\leq \lambda_m f(x_m)+(1-\lambda_m)\,f(y)\\
&\leq \lambda_m f(x_m)+(1-\lambda_m)\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\lambda_i}{(1-\lambda_m)}f(x_i)\\
&\leq \sum_{i=1}^{m}\lambda_i f(x_i). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Applications (Inégalités célèbres)

Inégalité arithmético-géométrique

Cette inégalité établit un lien entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique.

Soient $x_1,\ldots,x_m\in\mathbb{R}_+^*$, *alors*

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_i\leq\sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m}x_i}.$$

Preuve. Pour tout $1\leq i\leq m$, on pose $\lambda_i=\frac{1}{m}$. Prenons la fonction $f\left(x\right)=\ln\left(x\right).$ Cette fonction est concave car

$$f''\left(x\right)=-\frac{1}{x^2}<0 \text{ sur } \left]0,+\infty\right[.$$

Donc, on fait appelle à l'inégalité de Jenson appliqué sur f, $\lambda_i=\frac{1}{m}$ et $x_i>0$,

$$f(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i)\geq\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f\left(x_i\right)$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
\ln(\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i}{m}) &\geq \sum_{i=1}^{m}\frac{\ln\left(x_i\right)}{m}\\
&\Rightarrow \ln(\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i}{m})^m\geq\ln(\prod_{i=1}^{m}x_i) && (1)\\
&\Rightarrow (\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i}{m})^m\geq\prod_{i=1}^{m}x_i\\
&\Rightarrow \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_i\leq\sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m}x_i}. \qquad \blacksquare && (2)
\end{aligned}$$

Inégalité de Hölder

Soient $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $p, q > 1$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Alors*

$$\sum_{i=1}^{m} x_i y_i \leq (\sum_{i=1}^{m} x_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{m} y_i^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Hölder Otto

Preuve. La preuve de cette inégalité passe par les étapes suivantes:
1) (*Inégalité de Young*):Soient $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En utilisant la concavité de la fonction logarithme montrer que pour tout $x, y > 0$ on a

$$xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q.$$

William Henry Young

2) Soient $a_i, b_i > 0$ $(1 \leq i \leq m)$. Montrer que si $\sum_{i=1}^{m} a_i^p = \sum_{i=1}^{m} b_i^q = 1$ alors $\sum_{i=1}^{m} a_i b_i \leq 1$.
3) En déduire l'inégalité de Hölder (**Indication**: prenons $a_i = \frac{x_i}{(\sum_{i=1}^{m} x_i^p)^{\frac{1}{p}}}$ et $b_i = \frac{y_i}{(\sum_{i=1}^{m} y_i^q)^{\frac{1}{q}}}$). ∎

Inégalité de Minkowski

Soient $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $p > 1$. *Nous avons*

$$(\sum_{i=1}^{m} (x_i + y_i)^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{m} x_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{m} y_i^p)^{\frac{1}{p}},$$

Hermann Minkowski

Preuve. On utilise la concavité de la fonction suivante $f(t) = \left(1 + t^{\frac{1}{p}}\right)^p$ sur $]0, +\infty[$ et posons $S = \sum_{i=1}^{m} x_i^p$, $\lambda_i = \frac{x_i^p}{S}$ et $t_i = \frac{y_i^p}{x_i^p}$. ■

Caractérisation différentielle de la convexité

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur U.
Définition (*Vecteur gradient*). Soit $x \in U$, on définit le vacteur gardient de f en point x par

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right).$$

Définition (*Dérivée directionnelle*). Soient $x \in U$ et $d \in \mathbb{R}^n$, la dérivée directionnelle de f en x suivant la direction d est donnée par limite suivante

$$f'_d(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + td) - f(x)}{t}.$$

Exemple. La drivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ est la dérivée directionnelle de f en x suivant le vecteur *ième* e_i de la base canonique, en effet

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} = f'_{e_i}(x).$$

Proposition. Si f est différentiable en x alors $f'_d(x)$ existe pour toute direction d et on a

$$f'_d(x) = \langle \nabla f(x), d \rangle.$$

Définition (*Matrice hessienne*). Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable sur U. Soit $x \in U$, on définit la matrice hessienne de f en point x, notée $\nabla^2 f(x)$, par

$$\nabla^2 f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_{ij}^2}(x) \right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}.$$

Proposition. Soit f une fonction convexe sur U et $x \in U$. Alors $f_d^{'}(x)$ existe pour toute direction $d \in \mathbb{R}^n$.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour tous $x, y \in U$ on définit la fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ d'une seule variable suivante:

$$\forall t \in [0,1] : \varphi(t) = f(y + t(x-y)).$$

$$\textbf{Lemme}\left|\begin{array}{l} \textit{Les deux assertions suivantes sont équivalentes} \\ (i)\ f \textit{ est convexe sur } U \\ (ii)\ \textit{Pour tout } x, y \in U : \varphi \textit{ est convexe sur } [0,1] \end{array}\right.$$

Preuve.
$(i) \Rightarrow (ii)$: Supposons que f est convexe sur U. Fixons $x, y \in U$. Soient $t_1, t_2 \in [0,1]$ et $0 \leq \lambda \leq 1$. Alors,

$$\begin{array}{rcl} \varphi(\lambda t_1 + (1-\lambda) t_2) & = & f(y + (\lambda t_1 + (1-\lambda) t_2)(x-y)) \\ & = & f(\lambda y + (1-\lambda) y + (\lambda t_1 + (1-\lambda) t_2)(x-y)) \\ & = & f(\lambda(y + t_1(x-y)) + (1-\lambda)(y + t_2(x-y))) \\ & \leq & \lambda f(y + t_1(x-y)) + (1-\lambda) f(y + t_2(x-y)) \\ & \leq & \lambda \varphi(t_1) + (1-\lambda) \varphi(t_2). \end{array}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: Soient $x, y \in U$ et $0 \leq \lambda \leq 1$. Donc

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda x + (1-\lambda) y) & = & f(y + \lambda(x-y)) \\ & = & \varphi(\lambda) \\ & = & \varphi(\lambda \times 1 + (1-\lambda) \times 0) \\ & \leq & \lambda \varphi(1) + (1-\lambda) \varphi(0) \\ & \leq & \lambda \varphi(1) + (1-\lambda) \varphi(0) \\ & \leq & \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \\ (\text{car } \varphi(1) & = & f(x) \text{ et } \varphi(0) = f(y)). \qquad \blacksquare \end{array}$$

Remarque. Avec même argument, on peut montrer l'équivalence pour la notion de stricte convexité.

Lemme. *Soient $f : U \to R$ une fonction deux fois différentiable sur U, alors Pour tout $x, y \in U$:*
(i) *φ est dérivable sur* $[0,1]$ et

$$\varphi^{'}(t) = \nabla f(y + t(x-y))^T (x-y)$$

(ii) *φ est deux fois dérivable sur $[0,1]$ et on a*

$$\varphi^{''}(t) = (x-y)^T \nabla^2 f(y + t(x-y))(x-y).$$

Preuve.
(i) : Supposons que f est différentiable sur U. Soit $t_0 \in [0,1]$.

On a trois cas

♦ $\underline{0 < t_0 < 1}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \to 0} \frac{\varphi(t_0+\tau)-\varphi(t_0)}{\tau} &= \lim_{\tau \to 0} \frac{f(y+(t_0+\tau)(x-y)) - f(y+t_0(x-y))}{\tau} \\
&= \lim_{\tau \to 0} \frac{f(y+t_0(x-y)+\tau(x-y)) - f(y+t_0(x-y))}{\tau} \\
&= f'_{(x-y)}(y+t_0(x-y)) \\
&= \langle \nabla f(y+t_0(x-y), x-y) \rangle = \varphi'(t_0).
\end{aligned}$$

♦ $\underline{t_0 = 0}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \overset{>}{\to} 0} \frac{\varphi(t_0+\tau)-\varphi(t_0)}{\tau} &= \lim_{\tau \overset{>}{\to} 0} \frac{f(y+\tau(x-y)) - f(y)}{\tau} \\
&= f'_{(x-y)}(y) \\
&= \langle \nabla f(y), x-y \rangle = \varphi'_d(0).
\end{aligned}$$

♦ $\underline{t_0 = 1}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \overset{<}{\to} 1} \frac{\varphi(t_0+\tau)-\varphi(t_0)}{\tau} &= \lim_{\tau \overset{<}{\to} 1} \frac{f(y+(1+\tau)(x-y)) - f(x)}{\tau} \\
&= \lim_{\tau \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x+\tau(x-y)) - f(x)}{\tau} = f'_{(x-y)}(x) \\
&= \langle \nabla f(x), x-y \rangle = \varphi'_g(0).
\end{aligned}$$

Donc, φ est dérivable sur $[0,1]$.

(ii) : Soit $t_0 \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \to 0} \frac{\varphi'(t_0+\tau)-\varphi'(t_0)}{\tau} &= \lim_{\tau \to 0} \frac{\langle \nabla f(y+(t_0+\tau)(x-y), x-y) \rangle - \langle \nabla f(y+t_0(x-y), x-y) \rangle}{\tau} \\
&= \lim_{\tau \to 0} \frac{\langle \nabla f(y+(t_0+\tau)(x-y)) - \nabla f(y+t_0(x-y)), x-y \rangle}{\tau} \\
&= \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(y+(t_0+\tau)(x-y)) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(y+t_0(x-y)) \right) (x_i - y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla \frac{\partial f}{\partial x_i}(y+t_0(x-y)), (x-y) \right\rangle (x_i - y_i).
\end{aligned}$$

Avec un calcul on montre que pour tout $t \in [0,1]$:

$$\varphi''(t) = (x-y)^T \nabla^2 f(y+t(x-y))(x-y). \qquad \blacksquare$$

Proposition. Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur U . Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) f est convexe sur U .
(ii) $f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle \qquad \forall x, y \in U.$
(iii) $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0 \qquad \forall x, y \in U.$

On a équivalence entre convexité stricte et les inégalités (ii) et (iii) précédentes rendues strictes, pour $x \neq y$. Pour la concavité, on obtient l'équivalence en changeant le rôle des inégalités.

Preuve
$(i) \Rightarrow (ii)$: Supposons que f est convexe. Soient $x, y \in U$, on sait que φ est convexe sur $[0, 1]$ alors d'après ()

$$\varphi(1) \geq \varphi(0) + (1 - 0)\varphi'(0),$$

$$\text{comme} \left| \begin{array}{l} \varphi(1) = f(x) \\ \varphi(0) = f(y) \\ \varphi'(0) = \nabla f(y)^T (x - y) \end{array} \right. \qquad \Rightarrow f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle .$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Soient $x, y \in U$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\ f(y) &\geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \end{aligned}$$

On fait la somme terme à terme

$$f(x) + f(y) \geq f(y) + f(x) + \langle \nabla f(y) - f(x), x - y \rangle$$

ce qui implique

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0.$$

$(iii) \Rightarrow (i)$: Soient $x, y \in U$, nous allons montrer que φ' est croissante sur $[0, 1]$. Soit $t_1, t_2 \in [0, 1]$ tels que $t_1 < t_2$. Donc

$$\langle \nabla f(y + t_1(x - y)) - \nabla f(y + t_2(x - y)), y + t_1(x - y) - (y + t_2(x - y)) \rangle \geq 0$$

donc

$$(t_1 - t_2) \langle \nabla f(y + t_1(x - y)) - \nabla f(y + t_2(x - y)), (x - y) \rangle \geq 0$$

comme $(t_1 - t_2) < 0$ on trouve

$$\langle \nabla f(y + t_1(x - y)) - \nabla f(y + t_2(x - y)), (x - y) \rangle \leq 0$$

alors

$$\langle \nabla f(y + t_1(x - y)), (x - y) \rangle \leq \langle \nabla f(y + t_2(x - y)), (x - y) \rangle$$

d'où $\varphi'(t) = \nabla f(y + t(x - y))^T (x - y)$

$$\varphi'(t_1) \leq \varphi'(t_2).$$

D'après le résultat () φ est convexe sur $[0, 1]$, par conséquent f est convexe sur U. ■

Corollaire. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable sur U. Nous avons $(i) \Leftrightarrow (ii)$ où
(i) f est convexe sur U.
(ii) Pour tout $x \in U$ la matrice hessienne $\nabla^2 f(x)$ est semi définie positive.

Preuve.
$(i) \Rightarrow (ii)$: Supposons que f est convexe sur U. Soit $x \in U$, comme U est un ouvert on a

$$\exists \alpha > 0 \ : x + \alpha d \in U \text{ pour tout } d \in \mathbb{R}^n.$$

On pose $y = x + \alpha d$. La fonction d'une seule variable

$$\varphi(t) = f(y + t(x - y)) \text{ est convexe sur } [0, 1];$$

alors

$$\varphi''(1) \geq 0,$$

ce qui implique que

$$\alpha^2 d^T \nabla^2 f(x) d \geq 0 \overset{\alpha>0}{\Rightarrow} d^T \nabla^2 f(x) d;$$

comme d est libre dans $\mathbb{R}^n$, on conclut que la matrice hessienne $\nabla^2 f(x)$ est semi définie positive.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Soient $x, y \in U$ et $t \in [0, 1]$. On a

$$\begin{aligned} (x-y)^T \nabla^2 f(y + t(x-y))(x-y) &\geq 0 \\ &\Rightarrow \varphi''(t) \geq 0. \end{aligned}$$

C'est à dire φ est convexe sur $[0, 1]$. Par conséquent, f est convexe sur U. ■

Convexité d'une fonction quadratique

On considère la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x + c \end{array}$$

avec A une matrice réelle symétrique, b un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et c une constante donnée. On peut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\nabla f(x) = Ax - b$$

et

$$\nabla^2 f(x) = A.$$

On déduit immédiatement que f est convexe si, et seulement si A est semi-définie positive. Si A est définie positive alors f est strictement convexe, mais l'inverse n'est pas vraie comme nous allons voir dans proposition suivante.

Proposition. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable sur U. Si pour tout $x \in U$ la matrice hessienne $\nabla^2 f(x)$ est définie positive, alors f est strictement convexe sur U. La réciproque n'est pas vraie.*

Preuve. Soient $x, y \in U$ tels que $x \neq y$ et $t \in [0,1]$. On a

$$\begin{array}{rcl} (x-y)^T \nabla^2 f(y + t(x-y))(x-y) & > & 0 \\ & \Rightarrow & \varphi''(t) > 0 \end{array}$$

c'est à dire φ est strictement convexe sur $[0,1]$. Par conséquent, f est strictement convexe sur U. Pour la réciproque, on donne cet exemple:

$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

La fonction f est strictement convexe, en effet soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ et $\lambda \in]0,1[$. Comme la fonction $h(x) = x^2$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$ (car $h''(x) = 2 > 0$), on trouve

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda(x_1,y_1) + (1-\lambda)(x_2,y_2)) & = & f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \\ & = & (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)^2 + (\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)^2 \\ & < & \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2 + \lambda y_1^2 + (1-\lambda)y_2^2 \\ & < & \lambda f(x_1,y_1) + (1-\lambda) f(x_2,y_2), \end{array}$$

c'est à dire f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$. Mais en point $(x,y) = (0,0)$ on trouve

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui n'est pas définie positive (elle est semi définie positive). ■

Rappel sur les matrices symétriques (semi) définies positives

Soit A une matrice symétrique d'ordre n.
1) A est semi définie positive si $\forall x \in \mathbb{R}^n : x^T A x \geq 0$.
2) A est définie positive si $\forall x \in \mathbb{R}^n, (x \neq 0) : x^T A x > 0$.

Caractérisation.

1) A est semi définie positive $\Leftrightarrow$ Toutes ses valeurs propres sont positives.
2) A est définie positive $\Leftrightarrow$ Toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Les mineurs de A: sont les déterminants de sous matrices carrées de A.

Mineur principal de A d'ordre $k\,(1 \leq k \leq n)$ est le déterminant de sous matrice de A obtenue en supprimant les $n-k$ lignes et les $n-k$ colonnes correspondantes.

Mineur principal diagonal de A d'ordre $k\,(1 \leq k \leq n)$ est le déterminant de sous matrice de A obtenue en éliminant les $n-k$ dernières lignes et $n-k$ dernières colonnes.

Caractérisation (Critère de Sylvester).

1) A est semi définie positive $\Leftrightarrow$ Tous ses **mineurs principaux** sont ≥ 0.
2) A est définie positive $\Leftrightarrow$ Ses n **mineurs principaux diagonaux** sont > 0.
Définition: Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice symétrique.

1) A est dite à diagonale dominante si $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$.

2) A est dite à diagonale strictement dominante si $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$.

Proposition (Condition suffisante):
1) A est une matrice symétrique à diagonale dominante et positive, alors A est semi définie positive.
2) A est une matrice symétrique à diagonale strictement dominante et strictement positive, alors A est définie positive.
Remarque:
1) Une matrice symétrique semi définie positive possède **une diagonale positive**.
2) Une matrice symétrique définie positive possède **une diagonale strictemet positive**.
3) Si dans une matrice symétrique on trouve dans sa diagonale des éléments diagonaux de signes différents, alors la matrice n'est pas définie.

Remarque finale: A est (semi) définie négative si $-A$ est (semi) définie positive.

Cas particulier

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Soit $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2$Alors:
1- Si $det\left(\nabla^2 f(\overline{x}, \overline{y})\right) > 0$, alors la matrice hessienne $\nabla^2 f(\overline{x}, \overline{y})$ est définie:
-si $tr\left(\nabla^2 f\left(\overline{x}, \overline{y}\right)\right) > 0$ alors $\nabla^2 f(\overline{x}, \overline{y})$ est définie positive,
-si $tr\left(\nabla^2 f\left(\overline{x}, \overline{y}\right)\right) < 0$ alors $\nabla^2 f(\overline{x}, \overline{y})$ est définie négative,
2- Si $det(\nabla^2 f\left(\overline{x}, \overline{y}\right)) < 0$ alors $\nabla^2 f(\overline{x}, \overline{y})$ n'est pas définie.
3- Si $det(\nabla^2 f\left(\overline{x}, \overline{y}\right)) = 0$, on ne peut rien conclure.