Université de M'sila

Faculté de : Technologie **Socle commun**

Série de TD N° 01

Exercice 01 :

Dans une base orthonormée$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, *on donne les vecteurs* $\vec{V}_1$ *et* $\vec{V}_2$ *telle que :*

$$\vec{V}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \quad et \quad \vec{V}_2 = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

1°/ *Calculer les modules* $|\vec{V}_1|$, $|\vec{V}_2|$.

2°/ *Calculer le vecteur somme* $\vec{S} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ *et le vecteur différence* $\vec{D} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$.

3°/ *Calculer les modules* $|\vec{S}| = |\vec{V}_1 + \vec{V}_2|$ *et* $|\vec{D}| = |\vec{V}_1 - \vec{V}_2|$ *de deux manières.*

4°/ *Est-ce-que les égalités* $|\vec{S}| = |\vec{V}_1| + |\vec{V}_2|$ *et* $|\vec{D}| = |\vec{V}_1| - |\vec{V}_2|$ *sont-elles vraies* **?**

Exercice 02 :

Dans une base orthonormée$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, *on donne les vecteurs* $\vec{A}$ *et* $\vec{B}$ *telle que :*

$$\vec{A} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \quad et \quad \vec{B} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

1°/ *Calculer le produit scalaire* $\vec{A} \circ \vec{B}$. *Vérifier que* $\vec{A} \circ \vec{B} = \vec{B} \circ \vec{A}$

2°/ *Quel est l'angle formé entre ces deux vecteurs ?*

3°/ *Donner les composantes des vecteurs* $\vec{A}$ *et* $\vec{B}$. *Comparer les avec* $\vec{A} \circ \vec{i}$, $\vec{A} \circ \vec{j}$ *et* $\vec{A} \circ \vec{k}$ *ainsi que* $\vec{B} \circ \vec{i}$, $\vec{B} \circ \vec{j}$ *et* $\vec{B} \circ \vec{k}$ *respectivement ? Que peut-on dire du produit scalaire.*

Peut-on écrire $\vec{A}$ *et* $\vec{B}$ *sous formes :* $\begin{cases} \vec{A} = (\vec{A} \circ \vec{i})\vec{i} + (\vec{A} \circ \vec{j})\vec{j} + (\vec{A} \circ \vec{k})\vec{k} \\ \vec{B} = (\vec{B} \circ \vec{i})\vec{i} + (\vec{B} \circ \vec{j})\vec{j} + (\vec{B} \circ \vec{k})\vec{k} \end{cases}$

4°/ *Quel est l'angle '* θ *' entre les deux vecteurs* $\vec{A}$ *et* $\vec{B}$

5°/ *Que vaut la projection de* $\vec{A}$ *sur la direction de* $\vec{B}$.

Exercice 03 :

Dans une base orthonormée$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, *on donne les vecteurs* $\vec{A}$,$\vec{B}$ *et* $\vec{C}$ *telle que :*

$$\vec{A} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \ ; \ \vec{B} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \ et \ \vec{C} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

1°/ *Calculer le produit vectoriel* $\vec{A} \wedge \vec{B}$. *Vérifier que* $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$

2°/ *Comparer l'aire de la surface formée par les vecteurs* $\vec{A}$ *et* $\vec{B}$ *et le produit vectoriel* $\vec{A} \wedge \vec{B}$.

3°/ *Déterminer le volume formé par les trois vecteurs* $\vec{A}$, $\vec{B}$ *et* $\vec{C}$

4°/ *Si* $\vec{A} \circ (\vec{B} \wedge \vec{C}) = 0$ *les* **3** *vecteurs sont coplanaires. Que vaut la composante* z_C $(\vec{C} = \vec{i} + \vec{j} + z_C\vec{k})$

5°/ (**Supplémentaire**). *Vérifier la permutation cyclique :* $\vec{A} \circ (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \circ (\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C} \circ (\vec{A} \wedge \vec{B})$.

L. Laïssaoui

Exercice 04 :

Dans une base orthonormée$(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, *on donne les vecteurs* $\vec{A}(t)$ *et* $\vec{B}(t)$ *telle que :*

$\vec{A} = (t-1)\vec{\imath} - (t+1)\vec{\jmath}$ *et* $\vec{B} = t\vec{\imath} - \vec{\jmath}$

1°/ *Calculer les dérivées des vecteurs* $\vec{A}(t)$ *et* $\vec{B}(t)$.

2°/ *Calculer les dérivées des produits scalaire* $\vec{A} \circ \vec{B}$ *et vectoriel* $\vec{A} \wedge \vec{B}$ *de deux manières.*

3°/ *Assurer vous que l'ordre est sans importance pour* $\vec{A} \circ \vec{B}$, *alors qu'il l'est pour* $\vec{A} \wedge \vec{B}$.

Exercice 05 *:* (***Supplémentaire***)

Dans une base orthonormée$(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ *sont dans le plan* (xoy) *avec* $\theta = \theta_1 + \theta_2$

1°/ *En se basant sur la figure ci-contre, montrer que le produit scalaire de* $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$, *s'écrit :*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \| \vec{a} \| \| \vec{b} \| \cos(\theta).$$

- *Montrer que si le produit scalaire est nul* $(\| \vec{a} \| \neq 0, \| \vec{b} \| \neq 0)$, *les deux vecteurs sont orthogonaux.*

2°/ *les composantes respectives de* $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$, *sont* $(4,2,4)$ *et* $(-2,1,2)$*:*

- *Calculer les modules de* $\vec{a}$ *et de* $\vec{b}$.
- *Quelles sont les composantes du vecteur somme* $\vec{C}^+ = \vec{a} + \vec{b}$ *?*
- *Quel est l'angle formé entre les deux vecteurs* $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$*?*
- *Calculer* $\| \vec{C}^+ \|$ *des deux manières en utilisant les résultats précédents.*

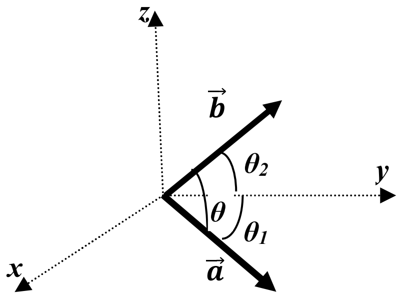

Figure-1

Exercice 06 **:** (***Supplémentaire***)

Dans une base orthonormée$(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, *on donne* $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$. *Comme le montre la figure-1*

1°/*Montrer que le produit vectoriel des deux vecteurs* $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$, *s'écrit :*

$\vec{a} \wedge \vec{b} = \| \vec{a} \| \| \vec{b} \| \sin(\theta).\vec{u}$. *Dans quelle direction est orienté ce vecteur ?*

2°/ *Si* $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$, *ont pour composantes, respectivement,* $(1,2,1)$ *et* $(-2,1,1)$*:*

- *Quels sont les cosinus directeur du vecteur* $\vec{u}$ *? Si « α, β, γ » sont les angles que fait* $\vec{u}$ *avec les axes «* $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$ *» respectivement.*
- *Montrer que le produit vectoriel des deux vecteurs* $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ *représente une surface orientée formées par*
- *Montrer que si le produit vectoriel est nul* $(\| \vec{a} \|$ ***et*** $\| \vec{b} \| \neq 0)$ *les deux vecteurs sont Parallèles*

L .Laïssaoui

Exercice 07 : (*Supplémentaire*)

Dans une base orthonormée$(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, *on donne les vecteurs* $\vec{A}\,(1,2,5)$, $\vec{B}(1,2,1)$ *et* $\vec{C}(-2,1,1)$.

1°/*Montrer que le produit mixte représente le volume formé par les vecteurs opérandes.*

2°/*Calculer les produits mixtes suivant :*

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})$, $\vec{B}\cdot(\vec{C}\wedge\vec{A})$ *et* $\vec{C}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B})$. *Qu'en déduisez-vous ?*

3°/*Montrer que si* $\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})$ *est nul* $(\|\vec{A}\|\neq 0\,, \|\vec{B}\|\neq 0\ \textit{et}\ \|\vec{C}\|\neq 0)$, $\vec{A}$, $\vec{B}$ *et* $\vec{C}$ *sont coplanaires*

Exercice 08 :

Dans une base orthonormée$(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, *on donne les vecteurs :*

$\vec{A}(t) = 2t\vec{\imath} + (t+1)\vec{\jmath} + (1-t)\vec{k}$ $\qquad\qquad$ $\vec{B}(t) = 4t\vec{\imath} - 3t\vec{\jmath} + 2\vec{k}$

Calculer : $\dfrac{d\vec{A}}{dt}$, $\dfrac{d\vec{B}}{dt}$.

Calculer : $\dfrac{d(\vec{A}\circ\vec{B})}{dt}$ *et* $\dfrac{d(\vec{A}\wedge\vec{B})}{dt}$ *de deux manières.*

L. Laïssaoui