

Chapitre II Les écoulements dans les conduites en charge

II.1. Ecoulement en charge définition et objectifs

1 Définition : Les écoulements en charges sont des écoulements confinés à l'intérieur d'un contenant, en général une conduite (Fg : II.1). La pression à l'intérieur de ces écoulements peut être de beaucoup plus élevée que la pression atmosphérique ($P > 1atm = 1,013bar = 760mmHg$), ou encore s'abaisser à des valeurs aussi faibles que la pression de vapeur saturante. Même si la pression à l'intérieur de ce type d'écoulement peut atteindre la pression atmosphérique, en aucun cas nous considérons la présence de la surface libre dans cette catégorie d'écoulements.

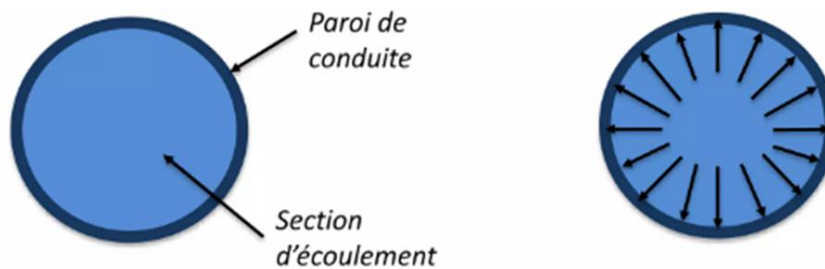


Figure II.1: Schéma d'un contenant de forme circulaire

Les formes des contenants les plus rencontrées sont les circulaires, rectangulaires et triangulaires. La forme circulaire est optimale et plus répandue en raison de la répartition homologue de pression à l'intérieur du tube.

2.Objectif : L'alimentation en eau potable, ainsi que l'irrigation des terres, nécessitent de transporter l'eau de la source ou du stockage vers les lieux de consommation, se font dans la très grande majorité des cas par des conduites sous pression, dans lesquelles les écoulements sont en charge. Cette technique a divers avantages qui sont :

- 1) Livraison de l'eau potable aux consommateurs à l'abri de tout effets extérieurs ;
- 2) Contrôle facile de la vitesse et de la pression d'écoulement ;
- 3) Vaincre la pente par refoulement ;
- 4) Pompage de l'eau souterraine ;
- 5) Avantage d'enterrer les réseaux d'eau.



Figure II.2: Phénomène de capillarité

6) Ouvrage de transfert des grandes quantités d'eau :

Exemple 1 : Entre les barrages réservoirs (Barrage Tabloute de JIJEL vers les hauts plateaux Sitéfien, barrage de Draâ Eddis (Tachouda), avec un débit $Q = 7 \text{ m}^3/\text{s}$, comprenant 42 km de conduites en charge de diamètre = 1,5 m, avec une différence de niveau égale 200 m.

Exemple 2 : Le transfert d'eau potable entre In-Salah, au sud d'Alger, et Tamanrasset, sur 700 Km à travers les immensités du Sahara.

En effet il y a des inconvénients à propos de cette technique, traduits par le coût élevé de réalisation et plus de ça l'importance des pertes de charges engendrées.

II.2. Etude de l'écoulement en charge :

L'étude de l'écoulement en charge, est motivée par le grand nombre et la diversité des applications, naturelles ou industrielles, dans lesquelles on les rencontre. Pour une bonne compréhension, nous essayons d'expliquer aux étudiants quelques notions de base ; concernant l'étude des fluides en mouvement. Il s'agit d'une partie importante vise à aborder les équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides incompressibles parfaits.

II.2.1. Notions générales :

Dans les écoulements en charge, le milieu fluide étant en mouvement, on introduit la notion de « particule fluide ». Lors de l'écoulement d'un fluide, le mouvement d'une particule peut s'effectuer dans tous les sens (en trois dimensions) comme il peut être rotationnel ou irrotationnel.

11.2.1.1. Cinématique des fluides :

La cinématique des fluides est l'étude du mouvement des particules fluides indépendamment de ce qui provoque ou modifie l'écoulement. C'est-à-dire, on cherche à accéder à une description de l'écoulement en termes de trajectoires, vitesses, accélérations et évolutions spatio-temporelles.

Dans la description du milieu fluide, la particule fluide est assimilée à un point au sens mathématique du terme (c'est-à-dire avec un diamètre nul)

Rappels mathématiques

1) Champs scalaires et vectoriel :

1.1 scalaire : est une quantité qui peut être exprimée par un nombre unique représentant sa grandeur. Exemple : masse, pression, densité et température.

1.2 Champ scalaire : Si à chaque point d'un domaine, une fonction scalaire a une valeur définie, le domaine est appelé un champ scalaire. Exemple : Distribution de pression, distribution de température dans une ailette.

1.3 Vecteur : Le vecteur est une quantité, qui est spécifiée à la fois par la magnitude et la direction. Exemple : Force, Vitesse et Déplacement.

1.4 Champ de vecteur : Si à chaque point d'un domaine, une fonction vectorielle a une valeur définie, le domaine est appelée un champ vectoriel. Exemple : champ de vitesse d'un fluide en écoulement.

2) Champ d'écoulement :

Le domaine dans lequel les paramètres d'écoulement, c'est-à-dire la vitesse, la pression, etc., sont définis à chaque point et à chaque instant est appelée un champ d'écoulement. Ainsi, un champ d'écoulement serait spécifié par les vitesses à différents points de la région à des moments différents.

3) Les opérateurs mathématique :

3.1 L'opérateur Nabla : On simplifie les écritures en utilisant la notation dyadique qui introduit le vecteur symbolique nabla, noté $\vec{\nabla}$, dont les composantes formelles sont les opérateurs de dérivation partielle par rapport aux variables d'espace x, y, z.

$$\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

La notation des différents opérateurs en fonction de Nabla est donnée dans le tableau ci-dessous :

Opérateur	Notation
Gradient, $\overrightarrow{\text{grad}}\varphi$	$\vec{\nabla}\varphi$
Divergent, $\text{div}\vec{\varphi}$	$\vec{\nabla}\vec{\varphi}$
Rotationnel, $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{\varphi}$	$\vec{\nabla}\wedge\vec{\varphi}$
Laplacien, $\Delta\varphi$	$\vec{\nabla}^2\varphi$
Laplacien vectoriel, $\Delta\vec{\varphi}$	$\vec{\nabla}^2\vec{\varphi}$

3.2 Le gradient : En mathématiques, le gradient est un vecteur représentant la variation d'une fonction par rapport à la variation de ses différents paramètres, généralisant la notion de dérivée d'une fonction dans le cas de plusieurs variables. En physique et en analyse vectorielle, le gradient est une grandeur vectorielle indiquant la façon dont une grandeur physique varie dans l'espace.

Il est courant, selon la façon de noter des vecteurs, d'écrire le gradient d'une fonction ainsi :

$$\overrightarrow{\text{grad}}v = \vec{\nabla}v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \end{bmatrix}$$

3.3 Le divergent : L'opérateur divergence est un outil d'analyse vectorielle qui mesure, pour faire simple, si un champ vectoriel « rentre » ou « sort » d'une zone de l'espace, comme ce que l'on peut observer sur un diagramme de lignes de champ. Il donne donc une information très liée aux sources qui créent le champ. Comme nous le préciserons, l'opérateur divergence est l'équivalent local de la mesure d'un flux.

$$\text{div}\vec{v} = \vec{\nabla}\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\vec{k}$$

3.4 Le rotationnel : Le rotationnel est un opérateur qui transforme un champ de vecteurs en un autre champ de vecteurs.

La notion de rotationnel de la vitesse est essentielle en mécanique des fluides. Elle décrit une rotation de la particule fluide. Si l'écoulement est irrotationnel (son rotationnel est nul en tout point), en termes mathématiques, le vecteur de vitesse est alors le gradient du potentiel (on dit alors que les vitesses « dérivent d'un potentiel »). Si le fluide peut être considéré comme incompressible, la divergence de ce vecteur s'annule.

Le Laplacien du potentiel est donc nul : il s'agit d'un potentiel harmonique qui satisfait l'équation de Laplace.

Le rotationnel d'un champ vectoriel est donné par :

$$\overrightarrow{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

3.4 Le Laplacien : ou simplement le Laplacien, est l'opérateur différentiel défini par l'application de l'opérateur gradient suivie de l'application de l'opérateur divergence. Intuitivement, il combine et relie la description statique d'un champ (décrit par son gradient) aux effets dynamiques (la divergence) de ce champ dans l'espace et le temps.

Il s'applique le plus souvent aux champs scalaires, et son résultat est alors également un champ scalaire.

$$\Delta P = \vec{\nabla}^2 P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}$$

$$\Delta P = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(P))$$

Un champ de gradient est à rotationnel partout nul.

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{\text{grad}}(P)) = 0$$

II.2.1.1.1. Description du fluide en écoulement :

II.2.1.1.1.1. Description de Lagrangienne et Eulérienne :

Deux approches différentes existent. Le point de vue de *Lagrange*, consiste à s'intéresser à la trajectoire des particules de fluide. Celle d'*Euler* se concentre sur l'évolution des propriétés du fluide en différents points et au cours du temps.

1) Description de Lagrange (1736 – 1813)

On suit l'évolution d'écoulement au cours du temps d'une de ces particules fluides : M_i . Soit $\vec{v}_i$ son vecteur vitesse ($\vec{v}_i$ est défini, comme toutes les grandeurs physiques dans le fluide, en valeur moyenne sur l'élément de volume. Il se confond en fait avec la vitesse de son centre d'inertie). Soit $\overrightarrow{OM}_i$ le vecteur position de la particule fluide. On a alors :

$$\vec{v}_i = \frac{d\overrightarrow{OM}_i}{dt} = \left(\frac{dx_i}{dt}\right)\vec{i} + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)\vec{j} + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)\vec{k} = \vec{v}_i(t)$$

Cette vitesse ne dépend explicitement que du temps (les coordonnées d'espace sont des fonctions du temps). Plus précisément $\vec{v}_i(t)$ dépend de t et de la position à l'origine des temps de la particule fluide.

Le changement temporel de la vitesse dans une telle mesure est désigné par :

$$\frac{\partial v}{\partial t} \quad (II.1)$$

Appelé dérivé matériel ou dérivé substantiel. Il reflète le changement temporel de la vitesse (ou de toute autre propriété) de la particule fluide marquée (ciblée), observée par un observateur se déplaçant avec la particule fluide. L'approche *Lagrangienne* est également appelée «approche basée sur la trajectoire d'une particule».

L'approche *Lagrangienne : trajectoire* : La trajectoire d'une particule fluide est définie comme le chemin suivi par cette particule au cours du temps, c'est-à-dire l'ensemble des positions successives de cette particule au cours de son mouvement.

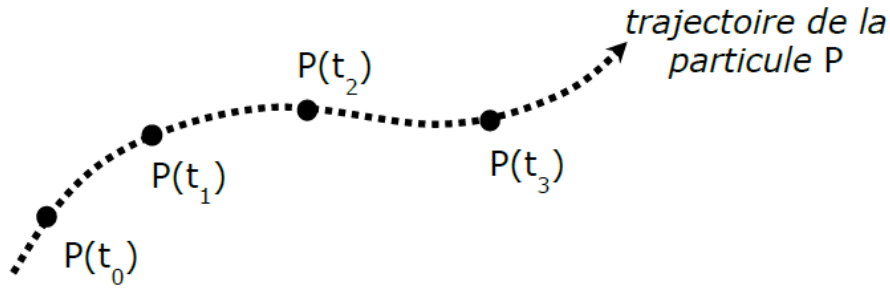


Figure II.3: Représentation d'une trajectoire d'une particule P

Considérons une particule de fluide M_{oi} située en $(x_{0i}, y_{0i}, z_{0i}, t_0)$ et essayons de calculer sa trajectoire, c'est-à-dire l'évolution temporelle de sa position à une date t de référence (instant initial). On étudie les vecteurs position.

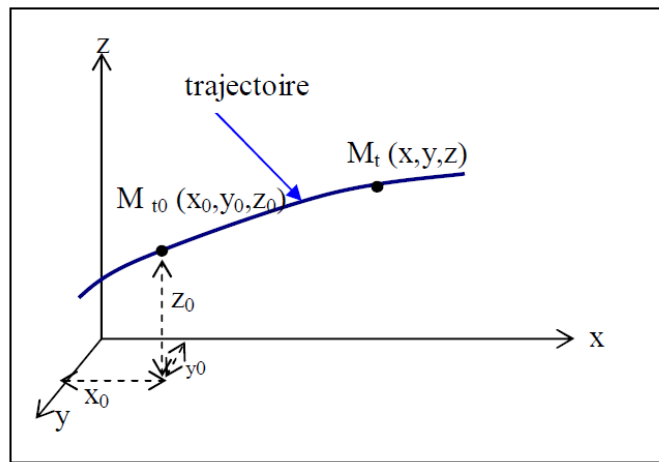


Figure II.4: Représentation Lagrangienne : trajectoire

Connaissant le champ de vitesse $\vec{v}_i = (v_{xi}, v_{yi}, v_{zi}, t)$ elle s'obtient par intégration de l'équation différentielle :

$$\frac{dx_i}{v_{x_i}(t)} = \frac{dy_i}{v_{y_i}(t)} = \frac{dz_i}{v_{z_i}(t)} = dt \quad (II.2)$$

2) Description d'Euler (1703 – 1783)

La description Eulérienne consiste à établir à chaque instant t donné, l'ensemble des vitesses associées à chacun des points M de l'espace fluide. $\vec{V}_M = (x, y, z, t)$ susceptible d'évoluer dans le temps. L'écoulement est alors décrit par un ensemble de vecteurs appelé « champ de vecteurs vitesse ». C'est donc une image instantanée de l'écoulement qui est utilisée à chaque instant.

Approche Eulérienne : lignes de courants

Les lignes de courants sont les lignes du champ de vecteurs $\vec{v}$: elles sont définies comme étant les tangentes en chaque point au vecteur vitesse $\vec{v}(x, y, z, t_0)$ à un instant donné t_0 .

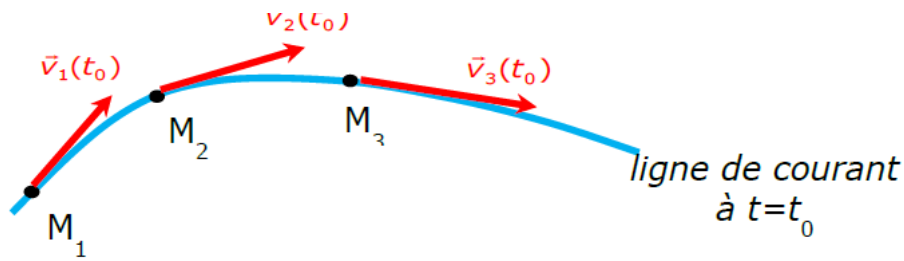


Figure II.5: Représentation Eulérienne : lignes de courant

Mathématiquement, ces lignes sont définies par l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels qu'un déplacement élémentaire $d\vec{M}(dx, dy, dz)$ le long de la ligne soit colinéaire au vecteur vitesse $\vec{v}$; ceci peut s'exprimer par :

$$d\vec{M} \wedge \vec{v} = \vec{0} \text{ soit } \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \quad (II.3)$$

On obtient l'équation des lignes de courants par intégration, après avoir rendu explicite la dépendance de v_x , v_y et v_z vis-à-vis de x, y, z . Pour définir les trois constantes d'intégration, il suffit d'identifier un point particulier (x_0, y_0, z_0) par lequel passe la ligne de courant.

Exemple :

Un écoulement est caractérisé par le champ de vitesse suivant : $\vec{v} = Ax \cdot t\vec{i} - By \cdot t^2\vec{j}$ avec : $A = 0,2s^{-2}$ et $B = 0,1s^{-3}$. Calculer la vitesse de fluide en (2,8) à l'instant $t=2$ puis trouver l'équation de la ligne de courant passant par (2,8). Etablir l'expression donnant la trajectoire de la parcelle de fluide située en (2,8) à l'instant $t=2$.

Solution

$$\vec{v}(2,8) = 0,2 \cdot 2 \cdot 2\vec{i} - 0,1 \cdot 8 \cdot 2^2\vec{j} = 0,8\vec{i} - 3,2\vec{j}$$

Sa norme est d'environ : $v = \sqrt{0,8^2 + (-3,2)^2} = 3,3 \text{ m.s}^{-1}$

L'équation de la ligne du courant : $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \Rightarrow \int \frac{dy}{-By \cdot t^2} = \int \frac{dx}{Ax \cdot t}$, la grandeur t est considérée comme constante, alors on a : $\int \frac{dy}{y} = \left(\frac{-Bt}{A}\right) \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = \left(\frac{-Bt}{A}\right) \ln x + c \Leftrightarrow \ln y = \ln x^{\frac{-Bt}{A}} + c$

Or

$$y = Cx^{\frac{-Bt}{A}}$$

La constante d'intégration C est donnée par la condition initiale ; on obtient $C = 16$. A chaque instant t , la ligne de courant passant par le point (2, 8) a pour équation :

$$y(x) = 16x^{\frac{-t}{2}}$$

Considérons une particule de fluide P_{oi} située en $(x_{0i}, y_{0i}, z_{0i}, t_0)$, pour calculer la trajectoire d'une parcelle de fluide, dans un intervalle $[t_0, t]$ on utilise l'équation (II.2) : $\frac{dx_i}{v_{x_i}(t)} = \frac{dy_i}{v_{y_i}(t)} = dt$ qui se décline sous la forme de : $dx(t) = Ax \cdot t dt$ et $dy(t) = -By \cdot t^2 dt$

Alors on a :

$$\int_{x_0}^{x_p} \frac{dx}{x} = A \int_{t_0}^t t dt \quad \text{et} \quad \int_{y_0}^{y_p} \frac{dy}{y} = -B \int_{t_0}^t t^2 dt$$

$$\ln \frac{x_p}{x_0} = A \frac{1}{2} (t^2 - t_0^2) \quad \text{et} \quad \ln \frac{y_p}{y_0} = -B \frac{1}{3} (t^3 - t_0^3)$$

On obtient l'expression de trajectoire recherchée :

$$x_p(t) = x_0 e^{\frac{A}{2}(t^2 - t_0^2)}$$

$$y_p(t) = y_0 e^{\frac{-B}{3}(t^3 - t_0^3)}$$

Compatibilité de deux descriptions :

- ✓ En description *Lagrangienne*, le vecteur vitesse $\vec{v}$ d'un point M du fluide est le vecteur de la particule fluide qui l'entoure.
- ✓ En description *Eulérienne*, le vecteur vitesse $\vec{v}$ d'un point M du fluide à un instant t est le vecteur vitesse de la particule fluide qui se trouve en M à cet instant t .

A chaque instant, les lignes de champ des vitesses dans les deux descriptions coïncident. Une même vitesse peut être analysée de deux façons différentes.

Un tube de courant (Veine fluide) est l'ensemble des lignes de courants s'appuyant sur un contour fermé.

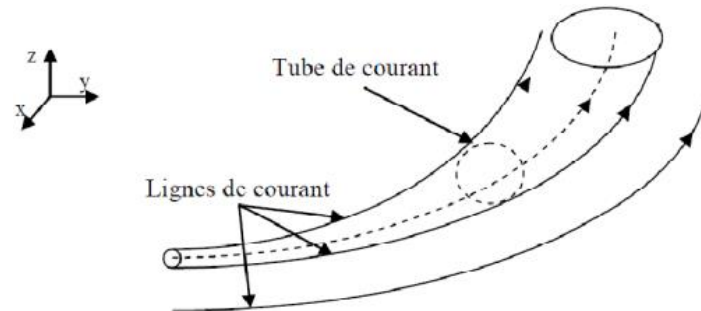


Figure II.6: Représentation : Tube de courant

Remarque :

- 1) Dans un écoulement stationnaire, les trajectoires des particules et les lignes de courant sont identiques, mais attention, ce n'est pas le cas dans un écoulement instationnaire.
- 2) D'un point de vue pratique, la mise en œuvre de la méthode Eulérienne est mieux adaptée à l'étude de la description de l'écoulement d'un fluide.
- 3) **Fonction de courant** : Considérons un écoulement plan (x,y) bidimensionnel, l'équation (II.3) peut devenir :

$$-v_y dx + v_x dy = 0 \quad (II.4)$$

L'écoulement est permanent et le fluide incompressible. Soit une fonction que l'on désigne par φ et qui en chaque point du plan x, y satisfait :

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \text{ Et } v_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (II.5)$$

φ : est alors appelée Fonction de courant.

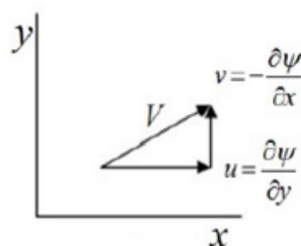


Figure II.7 : Composantes de vitesse le long d'une ligne de courant

Substituant l'équation (II.5) dans l'équation (II.4), on obtient :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = d\varphi = 0 \quad (II.6)$$

ce qui permet d'écrire que : $\varphi = Cte$ le long d'une ligne de courant.

- 4) Le débit entre deux lignes de courant :

En effet, $Q = \int_1^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \cdot d\mathbf{l}$ où $\mathbf{n}$ est la normale à une ligne quelconque joignant les lignes de courant $\varphi = \varphi_1$ et $\varphi = \varphi_2$. Si (dx, dy) sont les composantes du vecteur tangent à la ligne d'intégration, celles de $\mathbf{n} \cdot d\mathbf{l}$ sont $(dx, -dy)$ et le débit Q est :

$$Q = \int_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx - \frac{\partial \varphi}{\partial y} (-dy) = \int_1^2 d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta \varphi$$

La distance d entre les lignes de courant est inversement proportionnelle à la vitesse locale du fluide :

$$v = \frac{\Delta \varphi}{d}$$

II.2.1.1.1.2. Évolution d'une particule fluide :

A) La divergence du champ des vitesses est égale au taux de variation relative du volume de la particule fluide en M (admis) :

$$\text{div} \vec{v} = \frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt} \quad (II.7)$$

(V = volume de la particule fluide)

B) Le vecteur tourbillon :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} \quad (II.8)$$

Vecteur tourbillon par ses coordonnées cartésiennes :

$$\text{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

La relation décrit la rotation locale des particules fluides.

C) Dérivée particulaire en description Eulérienne : On cherche à calculer l'évolution temporelle d'une grandeur Eulérienne $G(M, t)$ sur un petit volume autour du point M , en suivant cette particule (par exemple la concentration en colorant ou la vitesse ou encore la masse volumique). Cette vitesse de variation est appelée dérivée totale de G et est notée dG/dt .

Si l'on note $\vec{v}$ la vitesse de déplacement du point de mire M . En généralisant à trois dimensions, cela permet d'écrire :

$$M \text{ quelconque} \Rightarrow \frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})G \quad (II.9)$$

Avec :

$\frac{\partial G}{\partial t}$: Dérivée locale (influence du temps en M fixe) Terme $\neq 0$ si écoulement non stationnaire ;

$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})G$: Dérivée convective (influence du déplacement) Terme $\neq 0$ si écoulement non uniforme.

L'opérateur $(\vec{v} \cdot \nabla)G = v_x \frac{\partial G}{\partial x} + v_y \frac{\partial G}{\partial y} + v_z \frac{\partial G}{\partial z}$

On expliquant par ces cas particulières :

✓ cas particulier n°1 : le point de mire M est fixe ($\vec{v} = \vec{0}$). On est alors dans une description eulérienne et la vitesse de variation de G est égale à la dérivée partielle ou locale, notée $\frac{\partial G}{\partial t}$:

$$M \text{ fixe} \Rightarrow \frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t}$$

✓ cas particulier n°2 : le point de mire est attaché à une molécule de fluide ($\vec{v} = \vec{u}$). On est alors dans une description lagrangienne et la vitesse de variation de G est égale à ce qu'on appelle la dérivée matérielle ou dérivée particulaire ou dérivée en suivant le mouvement notée DG/Dt .

$$M \text{ fluide} \Rightarrow \frac{dG}{dt} = \frac{DG}{Dt} \text{ avec } \frac{DG}{Dt} \equiv \frac{\partial G}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})G \quad (II.10)$$

Exemple sur quelques grandeurs physiques :

Dérivée particulaire du champ de masse volumique : $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\rho$

Dérivée particulaire du champ de vitesse : $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$. c'est l'accélération de la particule fluide.

D) Conservation de la masse :

L'équation de continuité exprimant la conservation de la masse contenue dans un volume élémentaire (Lagrange) ou encore dans un élément fixe (Euler) :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho\vec{v}) + \sum_i \rho q_{vi} \quad (II.11)$$

On appelle q_{vi} le débit volumique de fluide créé ($q_{vi} > 0$: source) ou détruite ($q_{vi} < 0$: puits) par unité de volume.

Cas particulières :

1. Ecoulement permanent ou stationnaire : il n'y a pas de variation explicite avec le temps :

$$\text{div}(\rho\vec{v}) = \sum_i \rho q_{vi} \quad (II.12)$$

2. Ecoulement conservatif : pas de puits ni de sources $\Rightarrow \sum_i \rho q_{vi} = 0$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0 \quad (II.13)$$

3. Ecoulement permanent et conservatif :

$$\text{div}(\rho\vec{v}) = 0 \quad (II.14)$$

4. Fluide incompressible ($\rho = \text{Cst}$) :

$$\text{div}(\vec{v}) = \sum_i q_{vi} \quad (II.15)$$

5. Ecoulement conservatif, permanent et iso-volume :

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (II.16)$$

L'opérateur divergence est lié au flux d'un vecteur : il intervient très souvent en physique dans les équations de conservation.

II.2.1.1.3.1 Modèles d'écoulements et propriétés

Lorsqu'un fluide est en mouvement, les grandeurs telles que la pression, la vitesse, la masse volumique, ... sont généralement fonctions à la fois du temps et de l'espace.

1) Ecoulement permanent ou stationnaire :

Un écoulement du fluide est dit permanent ou stationnaire, si les paramètres qui caractérisent le fluide (pression, vitesse, température, masse volumique) sont indépendants du temps en chacun des points de l'écoulement. Autrement dit, les dérivées partielles par rapport au temps des grandeurs physiques sont nulles ($\partial/\partial t = 0$). C'est-à-dire que les champs Eulériens : $\vec{v}(M, t), P(M, t), \rho(M, t)$ sont indépendants du temps :

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \vec{0}, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad (II.17)$$

Propriété :

2) Régime transitoire ou non-permanent ou instationnaire :

Chaque grandeur dépend de l'instant considéré. Il en découle que la vitesse dépend alors nécessairement de la position dans le fluide.

3) Uniforme / non-uniforme

Un écoulement permanent est dit uniforme lorsque ses grandeurs sont indépendantes des coordonnées d'espace. La dérivée partielle de toutes les variables par rapport aux coordonnées d'espace est nulle : $\partial/\partial x = \partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$.

Par opposition, on définit les écoulements non-uniformes parmi lesquels on distingue les écoulements graduellement (ou lentement) variés dont les changements du vecteur vitesse sont progressifs et les écoulements rapidement (ou brusquement) variés marqués par des changements rapides.

4) Ecoulement tourbillonnaires ou non tourbillonnaire (irrotationnel)

Définitions :

- i. Dans un écoulement non tourbillonnaire, le vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{rot} \vec{v}$ est nul en tout point de l'espace, $\vec{v}$ est à circulation conservative et les lignes de courants ne peuvent être fermées.
- ii. Si le vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{rot} \vec{v}$ est non nul en au moins un point donné de l'espace, l'écoulement est dit tourbillonnaire
- iii. Propriété d'écoulement non tourbillonnaire (Potentiel des vitesses)

Un écoulement non tourbillonnaire est tel que en tout point de l'espace $\overrightarrow{rot} \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow$ le champ de vitesse est nécessairement un gradient ($\vec{v} = \overrightarrow{\nabla} \phi$). C'est-à-dire, $\vec{v}$ dérive donc d'un potentiel ϕ scalaire, appelé potentiel de vitesse, défini à une constante additive près. Et l'écoulement est dit écoulement potentiel.

Alors,

$$\overrightarrow{rot} \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \exists \phi \text{ tel que } \vec{v} = \overrightarrow{grad} \phi \quad (II.18)$$

Un écoulement non tourbillonnaire dérive d'un potentiel scalaire défini à une constante additive près

- En chaque point le vecteur $\vec{v}$ est orthogonal aux surfaces équipotentiels $\phi = Cste$
- Si l'écoulement est de plus incompressible alors $div(\vec{v}) = 0$ soit :
 - En introduisant l'équation de conservation de la masse (II.13), on obtient:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \overrightarrow{grad} \phi) = 0$$

- Si, de plus, le fluide est incompressible ($\rho = Cste$), on obtient :

$$div(\rho \overrightarrow{grad} \phi) = 0 \Rightarrow div(\overrightarrow{grad} \phi) = 0 \Rightarrow \Delta \phi = 0 \quad (II.19)$$

Donc : ϕ obéit à l'équation dite de Laplace: $\Delta \phi = 0$.

On montre que si un fluide part du repos et si la viscosité est négligeable, son écoulement est irrotationnel.

Remarque :

- ✓ De la relation (II.18), on peut donc exprimer les composantes du vecteur vitesse à partir du potentiel des vitesses :

$$\vec{v} = \overrightarrow{grad} \phi \Rightarrow v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \text{ et } v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (II.20)$$

- ✓ Pour un écoulement irrotationnel plans, on peut satisfaire l'équation de continuité en posant :

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \phi: \text{ fonction du courant}$$

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \phi: \text{ fonction de potentiel}$$

Les fonctions ϕ et ψ sont donc liées par les relations :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (II.21)$$

Travaux Dirigés (N° 2)

Exercice 1 : l'accélération et vitesse

Un champ de vitesse est défini par $v_x = 2y^2$, $v_y = 3x$, $v_z = 0$. Au point (1,2,0), calculer :

1. la vitesse ;
2. l'accélération locale ;
3. l'accélération convective.

Solution :

1. La vitesse à (1,2,0) $\vec{v} = 2y^2\vec{i} + 3x\vec{j}$ Or : $\vec{v} = 8\vec{i} + 3\vec{j}$ et La valeur absolue : $v = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}$

La dérivée particulière de champ de vitesse c'est l'accélération $\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v}$

2. On a la dérivée locale est nulle $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v}$

3. On a : $\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$

$$\Rightarrow \vec{a} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 12xy \\ 6y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi l'accélération convective : $\vec{a} = 12xy\vec{i} + 6y^2\vec{j}$

L'accélération a (1,2,0) : $\vec{a} = 12 \cdot 1 \cdot 2\vec{i} + 6 \cdot 2^2\vec{j}$, Or : $\vec{a} = 24\vec{i} + 24\vec{j}$

La valeur absolue : $a = 24\sqrt{2}$

Exercice 2 :

On considère un écoulement permanent, défini dans un repère (O, x, y, z) par le champ des vitesses suivant : $v_x = 2x - 3y$, $v_y = 3x - 2y$ et $v_z = 0$

- 1) Montrer que le fluide est incompressible ;
- 2) Déterminer la forme des lignes de courant ;
- 3) Déterminer les coordonnées du vecteur tourbillon.

Solution :

1. Le fluide est incompressible, si la divergence de champ de vitesse est nulle, $div(\vec{v}) = 0$

On a :

$$div(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 2 - 2 + 0 = 0$$

Donc $div \vec{v} = 0 \Rightarrow$ fluide incompressible

2. L'équation de la ligne de courant : est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \Rightarrow \frac{dx}{2x - 3y} = \frac{dy}{3x - 2y} \Leftrightarrow \int (3x - 2y)dx = \int (2x - 3y) dy$$

L'intégration de cette équation nous donne :

$$\frac{3}{2}(x^2 + y^2) - 4xy = c$$

La forme est elliptique.

3. Les coordonnées du vecteur tourbillon

$$\text{Vecteur tourbillon : } \vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{rot} \vec{v} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k} \right]$$

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} [0\vec{i} + 0\vec{j} + (3 + 3)\vec{k}] = 3\vec{k}$$

Exercice 3 :

Soit un écoulement dont le potentiel des vitesses est donné par : $\phi = x^2 - 2y - y^2$

Avec $\vec{v} = \overrightarrow{grad} \phi$

Démontrer que l'écoulement est :

- bidimensionnel
- permanent
- continu (vérifiant l'équation de continuité) ?

Solution :

1. On a :

$$\vec{v} = \overrightarrow{grad} \phi \Rightarrow v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \text{ et } v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Alors on cherche à déterminer les composantes de la vitesse :

$$v \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y - 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ la composante selon l'axe } Oz : v_z = 0 \Rightarrow \text{l'écoulement est donc}$$

bidimensionnel.

2. L'écoulement est permanent si : $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, on a $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial (grad \phi)}{\partial t} = \frac{\partial (x^2 - 2y - y^2)}{\partial t} = 0$

La vitesse ne dépend pas du temps : l'écoulement est donc permanent

3. D'autre part, nous avons : $div(v) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 2 - 2 + 0 = 0$

L'équation de continuité est vérifiée, donc l'écoulement est continu.

Exercice 4 :

Supposant que les composantes du vecteur vitesse sont : $v_x = x^2 + z^2$ et $v_y = x^2 + y^2$.

Déterminer les composantes du vecteur vitesse suivant la direction z, qui satisfont l'équation de continuité ?

Solution :

La condition qui satisfait l'équation de la continuité : $div(v) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

$$div(v) = 2x + 2y + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial z} = -2(x + y)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -2(x + y) \Rightarrow v_z = -2(x + y)z$$

Exercice 5 :

Soit un fluide parfait d'un écoulement plan stationnaire, dont le champs de vitesse locale au point $M(x, y, z)$:

$$v \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3xy^2 \\ -3x^2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer l'équation cartésienne et la forme des lignes de courant du fluide
- 2) Calculer l'accélération $\mathbf{a}$ de la particule du fluide de l'écoulement en utilisant une description Eulérienne.

Solution :

- 1) 1. L'équation cartésienne : Pour cet écoulements les lignes de courant (ou lignes de champ) confondues avec la trajectoire des particules du fluide (car l'écoulements étudié est stationnaire) sont telles que le déplacement élémentaire $\vec{dr}(dx, dy, 0)$ d'une particule fluide est parallèle à la vitesse d'écoulement $\vec{v}(v_x, v_y, 0)$ du fluide au point $(x, y, 0)$.

$$\text{Donc : } \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

- 1) 2. L'équation des lignes de courant du fluide : on a

$$\begin{aligned} \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} &\Leftrightarrow \frac{dx}{3xy^2} = \frac{dy}{-3x^2y} \Leftrightarrow \int -3x^2y dx = \int 3xy^2 dy \\ &\Rightarrow -yx^3 = xy^3 + C \Rightarrow xy^3 + yx^3 = xy(x^2 + y^2) = C \end{aligned}$$

La ligne passe par le point $(x_0, y_0, 0)$, alors la forme est comme suit : $x_0^2 + y_0^2 = Cst$

Les lignes de courants sont des cercles, dans le plan Oxy , de centre O origine du repère cartésien $Oxyz$ et de rayon $R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$

- 2) l'accélération $\vec{a}$ de la particule du fluide par la description *Eulérienne*.

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v}$$

$$\text{L'écoulement plan stationnaire : } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v}$$

$$\vec{a} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + 0 \right) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9xy^4 - 18x^3y^2 \\ 9x^4y - 18x^2y^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$