Université Mohamed Boudiaf - M'sila — Le 19.01.2020
Faculté de MI — Département de Mathématiques
Master : Analyse Maths et Num 2019/2020 — Module : Eléments finis
Durée :1h et 30 m

Examen final

Exercice 01*(05pts) :*
Soient le champ de vecteurs $F(x,y) = -xy^2\,\widehat{i} + x^2y\,\widehat{j}$*, et* R *le triangle de sommets* $(1,0),(0,1)$ *et* $(1,1)$*.*

1. *Calculer l'intégrale curviligne directement, c-à-d :* $\int_\gamma F(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$*.*
2. *Refaire le calcul en utilisant la formule de Green-Riemann.*
3. *Calculer l'intégrale double de la fonction* $f(x,y) = xy$ *sur le domaine* R*.*

Exercice 02*(08pts) : Le but de cet exercice est de résoudre le problème suivant par la méthode des éléments finis de degré 1, i.e.,* $\mathbb{P}_1$*.*

$$(PC)\begin{cases} -u''(x) + u'(x) = 1 \ ,0 < x < 1 \\ u(0) = 0,\ u(1) = 0. \end{cases}$$

1. *Vérifier que la solution exacte est :* $u(x) = x - \frac{e^x-1}{e-1},\ \forall x \in [0,1]$*.*
2. *Ecrire le problème variationnel (PV) du problème (PC) en choisissant comme l'espace des solutions et des fonctions test* V_h*.*
3. *Qu'elles sont les conditions pour dire que le problème (PV) admet une solution. ?*
4. *On décompose l'intervalle* $[0,1]$ *en trois sous-intervalles* $[0,1] = [0,1/3] \cup [1/3,2/3] \cup [2/3,1]$*.*
   - (a) *Déterminer les fonctions de bases* $\varphi_0, \varphi_{1/3}, \varphi_{2/3}, \varphi_1$*.*
   - (b) *Tracer ces fonctions.*
   - (c) *Résoudre le système discret.*

Exercice 03*(07pts) Soit le problème en 2D suivant*

$$\begin{cases} \Delta u + 1 = & 0 \ ,\Omega = \overline{1245631} \\ u = & 0\ ,\ sur\ \Sigma_1 = \overline{456} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = & 1\ ,\ sur\ \Sigma_2 = \overline{136} \end{cases}$$

1- Ecrire le problème variationnel (faible)
2- Déterminer les fonctions de bases :$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *et leurs gradients*
3- Trouver le système discret.
4- Calculer les valeurs : a_{11}, a_{12}, a_{22}*.*

Noeuds	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
x	0	0.5	0.5	1	1	1
y	0	0.5	0	1	0.5	0

Barème :(2+1.5+1.5)+(0.5+1.5+1+2+1+2)+(1.5++3+1+1.5)

Bon courage

Exercice 01 :(06.5pts)

I- Les principes généraux de la méthode des éléments finis en 1D.

1. Costruction des éléments
2. Noeuds.
3. Choix de l'espace.
4. Choix de la base H_N

II- Problème variationnel pour chaque problème initial.

1. $V_h^1 = H_N^1 = \{v : \ v(0) = v(1) = 0, \ v^{'}(0) = v^{'}(1) = 0\} = H_0^2(]0,1[)$, donc le PV est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_h^1, \quad \text{telle que} \\ a(u,v) = \int_0^1 (u^{'}v^{'} + cuv)dx = l(v) = \int_0^1 fvdx \\ u(0) = u(1) = 0, \ u^{'}(0) = u^{'}(1) = 0. \end{cases}$$

2. $V_h^2 = H_N^2 = \{v : \ v(0) = 0\} = H^1(]0,1[)$, donc le PV est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_h^2, \quad \text{telle que} \\ a(u,v) = \int_0^1 ((1+2x^2)u^{'}v^{'} + uv)dx = l(v) = \int_0^1 x^2 vdx + 6v(1) \\ u(0) = 1, \ u^{'}(1) = 2. \end{cases}$$

3. $V_h^3 = H_N^3 = \{v : \ v_{|\partial\Omega=\Sigma_1} = 0\} = H^1(\Omega)$

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_h^3, \quad \text{telle que} \\ a(u,v) = \int_\Omega (\nabla u \nabla v + buv)dx = l(v) = \int_\Omega fvdx + \int_{\Sigma_2} vd\Sigma_2 \\ u = 0 \text{ sur } \Sigma_1, \ \frac{\partial u}{\partial x} = 1 \text{ sur } \Sigma_2 \end{cases}$$

Exercice 02 : (07pts)

1- Résoudre le problème par la méthode de Galerkin (Calculer seulement un paramètre c_1).

$$\begin{cases} -u^{''}(x) + u(x) = 0, x \in]0,2[\\ u(0) = 1, \ u(2) = 1. \end{cases}$$

1. l'espace $V_h = \{v : \ v(0) = v(1) = 0\} = H_0^1(]0,2[)$.
2. le problème variationnel

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_h, \quad \text{telle que} \\ a(u,v) = \int_0^2 (u^{'}v^{'} + uv)dx = l(v) = 0 \\ u(0) = 1, \ u(2) = 1. \end{cases}$$

   Le problème variationnel homogène est, tel que $u(x) = \widetilde{u}(x) + u_0(x)$ où $u_0(x) = 1$.

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_h, \quad \text{telle que} \\ a(\widetilde{u},v) = \int_0^2 (\widetilde{u}^{'}v^{'} + \widetilde{u}v)dx = \widetilde{l}(v) = -\int_0^2 vdx \\ \widetilde{u}(0) = \widetilde{u}(2) = 0. \end{cases}$$

3. l'espace engendré par φ_j est : $\widetilde{V}_h = span\{\varphi_j = x^{j+1} - 2x^j; j = 1,2,...,n\}$
4. la solution qpprochée est : $\widetilde{u}_{app} = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + ...+.$
   On calcul seleument le paramètre c_1, tel que $a_{11}c_1 = \widetilde{l}_1$, alors $a_{11} = \int_0^2 ((\varphi_1^{'})^2 + \varphi_1^2)dx = \frac{56}{15}$ et $\widetilde{l}(\varphi_1) = -\int_0^2 \varphi_1 dx = -\int_0^2 (x^2 - 2x)dx = -\frac{4}{3}$, donc $c_1 = \frac{\widetilde{l}_1}{a_{11}} = -\frac{5}{14}$ alors la solution approchée $u_{app} = u_0 + \widetilde{u}_{app} = 1 + c_1\varphi_1 = 1 - \frac{5}{14}(x^2 - 2x) = -\frac{5}{14}x^2 + \frac{5}{7}x + 1$.

2- Pour la méthode de Ritz.

$$\begin{cases} -\left((1+x)u^{'}(x)\right)^{'} = 0, x \in]0,1[\\ u(0)=0,\ u(1)=1. \end{cases}$$

1. l'espace $V_h = \{v:\ v(0)=0\} = H^1(]0,1[)$.
2. le problème variationnel

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_h, \quad \text{telle que} \\ a(u,v) = \int_0^1 (1+x)u^{'}v^{'}dx = l(v) = 2u^{'}(1)v(1) \\ u(0)=0,\ u(1)=1. \end{cases}$$

3. les bases qui engendre l'espace $\widetilde{V}_h = span\{\varphi_j; j=1,2,...,n\}$ avec $\varphi_j = x^j(x-1)$, tel que $\widetilde{V}_h \subset V_h$ où $\widetilde{V}_h = \{v:\ v(0)=v(1)=0\} = H_0^1(]0,1[)$.
4. la matrice $A = [a_{11}, a_{12}; a_{21}, a_{22}]$ associée au les deux paramètres c_1, c_2, est

$$a_{11} = a(\varphi_1,\varphi_1) = \int_0^1 (1+x)\varphi_1^{'}\varphi_1^{'}dx = \int_0^1 (1+x)(1-2x)^2dx = \frac{1}{2}$$

$$a_{12} = a(\varphi_2,\varphi_1) = \int_0^1 (1+x)\varphi_2^{'}\varphi_1^{'}dx = \int_0^1 (1+x)(2x-3x^2)(1-2x)dx = \frac{17}{60}$$

$$a_{21} = a(\varphi_1,\varphi_2) = \int_0^1 (1+x)\varphi_1^{'}\varphi_2^{'}dx = \int_0^1 (1+x)(1-2x)(2x-3x^2)dx = \frac{17}{60}$$

$$a_{22} = a(\varphi_2,\varphi_2) = \int_0^1 (1+x)\varphi_2^{'}\varphi_2^{'}dx = \int_0^1 (1+x)(2x-3x^2)^2dx = \frac{7}{30}$$

Exercice 03 : (06.5pts)

$$\begin{cases} -\Delta u = & 1\ ,\Omega = ABCD \\ u = & 0\ ,\ \text{sur } \Sigma_1 = \overline{3245678} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = & 1\ ,\ \text{sur } \Sigma_2 = \overline{813} \end{cases}$$

Avec $A(-h,-h), B(h,-h), C(h,h)$ et $D(-h,h)$

1. l'espace $V_h = H_N = \{v:\ v_{|\partial\Omega=\Sigma_1} = 0\} = H^1(\Omega)$.
2. le problème variationnel

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_h, \quad \text{telle que} \\ a(u,v) = \iint_\Omega \nabla u \nabla v dxdy = l(v) = \iint_\Omega fvdxdy + \int_{\Sigma_2} vd\Sigma_2 \\ u=0 \ \text{ sur } \Sigma_1,\ \frac{\partial u}{\partial x} = 1 \ \text{ sur } \Sigma_2. \end{cases}$$

3. les fonctions de base :$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ et leur gradients

$$\widehat{\lambda}_0(\widehat{x},\widehat{y}) = 1 - \frac{\widehat{x}+\widehat{y}}{h} \Rightarrow \nabla\widehat{\lambda}_0(\widehat{x},\widehat{y}) = (-\frac{1}{h}, -\frac{1}{h})$$

$$\widehat{\lambda}_1(\widehat{x},\widehat{y}) = \frac{\widehat{x}}{h} \Rightarrow \nabla\widehat{\lambda}_1(\widehat{x},\widehat{y}) = (\frac{1}{h}, 0)$$

$$\widehat{\lambda}_2(\widehat{x},\widehat{y}) = \frac{\widehat{y}}{h} \Rightarrow \nabla\widehat{\lambda}_2(\widehat{x},\widehat{y}) = (0, \frac{1}{h})$$

4. Calculons les valeurs :

$$a_{00} = 4\ , a_{11} = 2\ , a_{01} = -1\ , a_{02} = -1$$