

Chapitre 4

Performances des systèmes asservis linéaires

1. Introduction

L'étude complète d'un système est composée de deux parties : son étude temporelle et son étude fréquentielle. En ce qui concerne l'étude temporelle, nous nous intéresserons ici à identifier les réponses $s(t)$ des systèmes étudiés à des signaux d'entrée $e(t)$ relativement simples, appelés entrées canoniques, qui sont l'impulsion de Dirac $\delta(t)$, l'échelon unitaire $u(t)$ et la rampe unitaire $v(t)$. La réponse d'un système à une impulsion de Dirac est appelée réponse impulsionnelle ; la réponse d'un système à un échelon unitaire est appelée réponse indicielle.

L'étude fréquentielle sera menée en construisant systématiquement les diagrammes de Bode et de Nyquist des systèmes étudiés.

2. Réponses temporelles des systèmes linéaires

2.1. Systèmes du premier ordre

2.1.1. Définition

Un système linéaire invariant à temps continu d'ordre un est régi par une équation différentielle du premier degré à coefficients constants telle que :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = k \cdot e(t) \quad (4.1)$$

τ : la constante de temps du système

k : le gain statique

$$k = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p)$$

d'où la fonction de transfert :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{1 + \tau p} \quad (4.2)$$

Exemple

Soit le circuit RC suivant (Fig 4.1) :

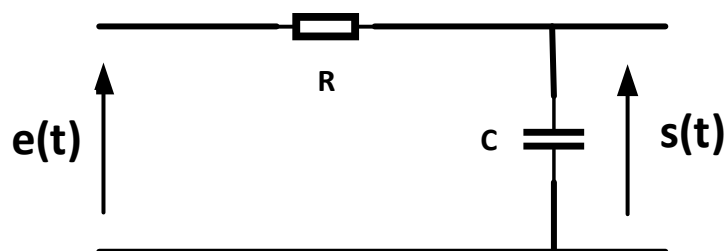


Figure 4.1. Circuit RC.

2.1.2. Réponse impulsionnelle

Dans ce cas, nous avons : $e(t) = \delta(t)$ où $\delta(t)$: impulsion unitaire $E(p) = 1$

$$\text{Donc } S_3(p) = \frac{K}{1+Tp} = \frac{K}{T} \frac{1}{p + \frac{1}{T}}, \quad \text{d'où : } s_3(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T}$$

On met ainsi en évidence la constante de temps sur le graphique (Fig.4.2).

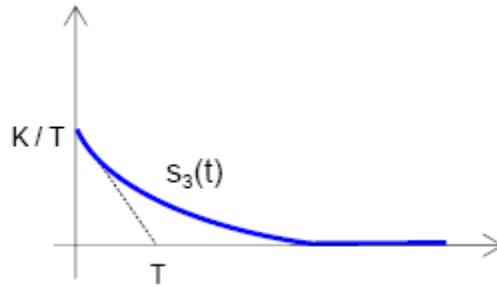


Figure 4.2. Réponse impulsionnelle d'un système du 1er Ordre.

2.1.3. Réponse indicielle

La réponse indicielle nous renseignera sur le comportement du système en régime transitoire.

$$S(p) = \frac{K}{1+\tau p} E(p) \quad (4.3)$$

$$\text{ici } E_1(p) = \frac{1}{p} \quad (4.4)$$

$$S_1(p) = \frac{K}{p(1+\tau p)} \quad (4.5)$$

En consultant une table de Transformée de Laplace, on voit que l'originale $s_1(t)$ de $S_1(p)$ est :

$$s_1(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} s_1(t) = K \quad (4.6)$$

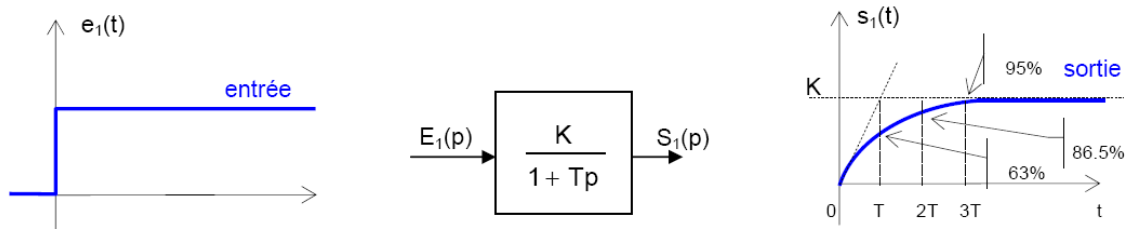


Figure 4.3. Réponse indicielle d'un système du 1er Ordre.

On peut définir, à partir de cette figure 4.3., le temps de réponse t_r du système, par le temps au bout duquel la sortie atteint sa valeur asymptotique (on dit aussi de sa valeur à l'infini) à 5% près. Il est facile de vérifier que ce temps de réponse est de l'ordre de 3τ .

Temps de réponse

On a :
$$s(t_r) = K \left(1 - e^{-\frac{t_r}{\tau}}\right) = 0.95K$$

d'où :
$$\left(1 - e^{-\frac{t_r}{\tau}}\right) = 0.95$$

soit :
$$e^{-\frac{t_r}{\tau}} = 0.05$$

et finalement :
$$t_r = -\tau \ln(0.05) \approx 3\tau$$

par ailleurs :
$$s(\infty) = K(1 - e^{-\infty}) \approx 0.63K$$

Temps de montée

C'est le temps mis pour que la sortie du processus atteigne 90% de la valeur finale du régime établi. On a donc alors :

$$0.9K = K(1 - e^{-\frac{t_m}{\tau}}), \text{ d'où } t_m = 2.3\tau$$

2.1.4. Réponse à une rampe

Le système de premier ordre est excité par une rampe unitaire $e(t) = r(t)$. Elle est appelée aussi réponse en vitesse, sa transformée de Laplace vaut

$$e(t) = e_0.t.U(t) \quad \Rightarrow \quad E(p) = \frac{e_0}{p^2}$$

D'où la sortie :

$$S(p) = \frac{K.e_0}{p^2.(1 + \tau.p)} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p^2} + \frac{\gamma}{(1 + \tau.p)} = \frac{\alpha.p.(1 + \tau.p) + \beta.(1 + \tau.p) + \gamma.p^2}{p^2.(1 + \tau.p)} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -K.e_0.\tau \\ \beta = K.e_0 \\ \gamma = K.e_0.\tau^2 \end{cases}$$

$$S(p) = K.e_0. \left[\frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{p} + \frac{\tau^2}{1 + \tau.p} \right] \quad \Rightarrow \quad s(t) = K.e_0.U(t). [t - \tau + \tau.e^{-t/\tau}]$$

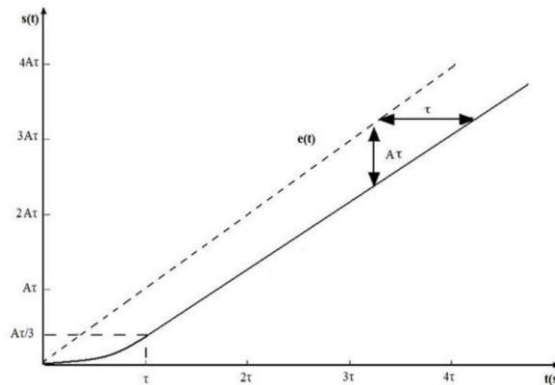


Figure 4.4. Réponse à une rampe d'un système du premier ordre.

2.2. Systèmes du second ordre

2.2.1. Définition

Le comportement d'un système du second ordre est caractérisé par une équation différentielle du second ordre à coefficients constants :

$$s(t) + \frac{2\zeta}{\omega_0} \cdot \frac{ds(t)}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{d^2s(t)}{dt^2} = K \cdot e(t) \quad (4.7)$$

On appelle :

- K : gain statique,
- ζ : coefficient d'amortissement ($\zeta > 0$),
- ω_0 : pulsation naturelle ou pulsation propre non amortie ($\omega_0 > 0$).

La transformée de Laplace conduit, lorsque les conditions initiales sont toutes nulles, à :

$$S(p) + \frac{2\zeta}{\omega_n} pS(p) + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot p^2 \cdot S(p) = K \cdot E(p) \quad (4.8)$$

La fonction de transfert s'écrit donc :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2} \quad (4.9)$$

Exemple

Considérons un filtre passe-bas du deuxième ordre illustré à la figure 4.5, la fonction de transfert de ce circuit RLC en cascade peut être définie comme le rapport de la transformée de Laplace de la tension de sortie, $V_{out}(p)$, à travers le condensateur et la tension de la source d'entrée $V_{in}(p)$, tel que: $G(p) = \frac{V_{out}(p)}{V_{in}(p)}$

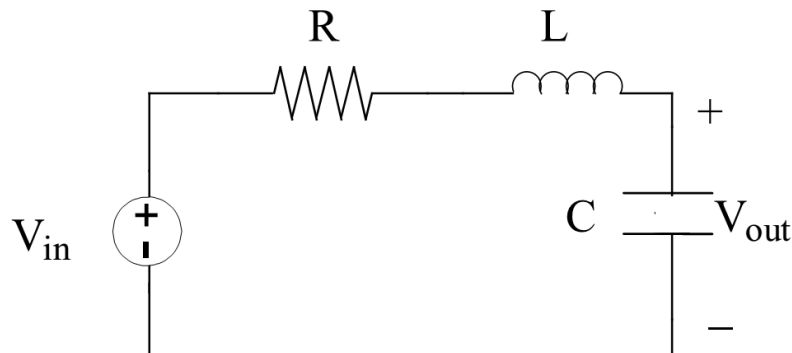


Figure 4.5. Circuit RLC.

Il est facile pour les étudiants de trouver la fonction de transfert en termes d'éléments RLC tels que :

$$G(p) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\frac{1}{LC}}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}} \quad (4.10)$$

La fonction de transfert du système standard du deuxième ordre est présentée comme suit :

$$G(p) = \frac{V_{out}(p)}{V_{in}(p)} = \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2} \quad (4.11)$$

La relation entre les éléments du circuit RLC et ζ et ω_n peut être déterminée, par exemple :

$$\omega_n = \frac{\sqrt{LC}}{LC} \text{ et } \zeta = \frac{R\sqrt{LC}}{2L}$$

2.2.2. Réponse impulsionnelle

Pour obtenir la réponse à une impulsion unitaire ($L(\delta(t)) = 1$), on décompose en éléments simples la fonction de transfert. En notant p_1 et p_2 , les deux pôles du système il vient :

$$Y(p) = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2} = \frac{K\omega_n^2}{p_1 - p_2} \left(\frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2} \right) \quad (4.12)$$

Les racines du polynôme du second degré qui dépendent du signe du discriminant $\Delta = \frac{1}{\omega_n^2}(\zeta^2 - 1)$. On distingue les trois cas :

Cas 1 : Amortissement fort : réponse amortie (régime apériodique)

Si l'amortissement est important ($\zeta > 1$), alors $\Delta > 0$ et il y a deux racines réelles, autrement dit : le dénominateur admet deux racines réelles : $p_{1,2} = -\zeta \cdot \omega_n \pm \omega_n \cdot \sqrt{\zeta^2 - 1}$.

Donc la réponse s'écrit sous la forme :

$$Y(p) = \frac{K\omega_n^2}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}} \left(\frac{1}{p+\zeta\omega_n-\sqrt{\zeta^2-\omega_n^2}} - \frac{1}{p+\zeta\omega_n+\sqrt{\zeta^2-\omega_n^2}} \right) \quad (4.14)$$

En utilisant les tables de transformées de Laplace, il vient :

$$y(t) = \frac{K\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}} e^{-\zeta\omega_n t} (e^{\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t} - e^{-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}t}) \quad (4.15)$$

Cas 2 : Amortissement critique : réponse amortie (régime apériodique critique)

Si l'amortissement est critique ($\zeta = 1$), alors $\Delta = 0$ et il y a une racine réelle, double, dans ce cas, le dénominateur admet une racine double $p_0 = -\omega_0$. La réponse est alors :

$$Y(p) = \frac{K\omega_n^2}{(p+\omega_n)^2} \quad (4.16)$$

Autrement dit la réponse temporelle est définie par :

$$y(t) = K\omega_n^2 t e^{-\omega_n t} \quad (4.17)$$

Cas 3 : Amortissement faible : réponse oscillante amortie (régime pseudo-périodique)

Si l'amortissement est faible ($\zeta < 1$), alors $\Delta < 0$, dénominateur admet deux racines complexes conjuguées :

$$p_1 = -\zeta\omega_n + j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$$

$$p_2 = -\zeta\omega_n - j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$$

L'étude est très similaire au cas 1. La transformée de Laplace de la réponse s'écrit sous la forme :

$$Y(p) = \frac{K\omega_n^2}{2j\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}} \left(\frac{1}{p+\zeta\omega_n-j\sqrt{1-\omega_n\zeta^2}} - \frac{1}{p+\zeta\omega_n+j\sqrt{1-\omega_n\zeta^2}} \right) \quad (4.18)$$

En utilisant les tables de transformées de Laplace, il vient :

$$y(t) = \frac{K\omega_n}{2j\sqrt{1-\zeta^2}} \left(e^{-(\zeta\omega_n-j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n)t} - e^{-(\zeta\omega_n+j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n)t} \right) \quad (4.19)$$

Nous avons donc finalement :

$$y(t) = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t) \quad (4.20)$$

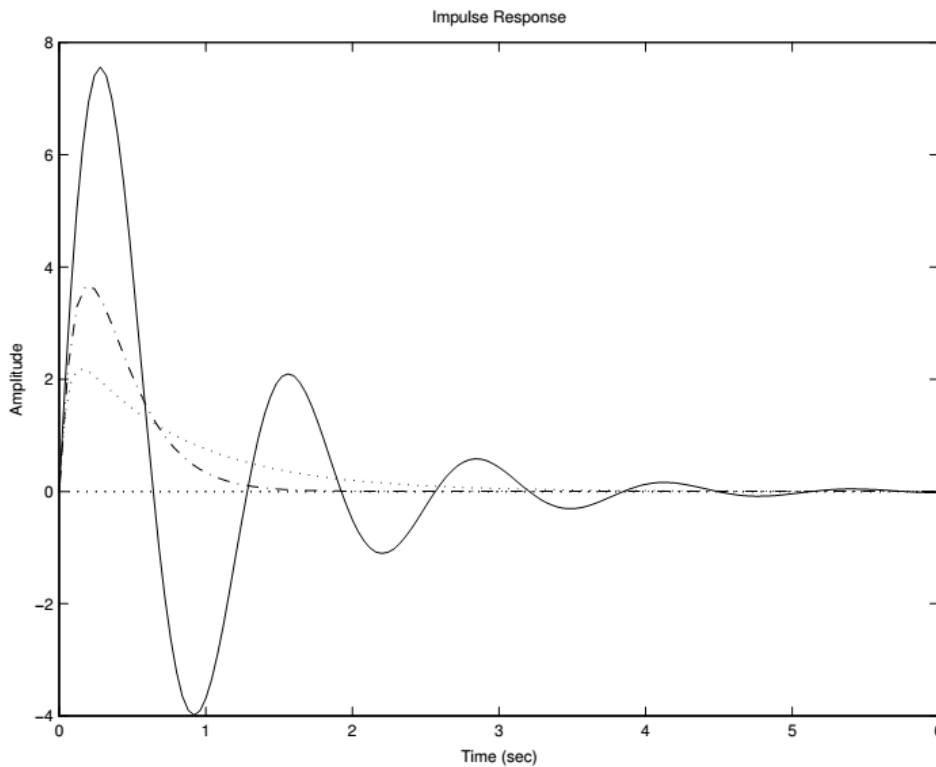


Figure 4.6. Réponses impulsionnelles de systèmes du second ordre.

La figure 4.6 illustre les différents types de réponses impulsionnelles d'un système du second ordre. Les paramètres sont fixés par $K = 2$, $\omega_n = 5$. Le tracé en pointillés correspond au cas 1 ($\xi = 2$), le tracé alterné points-tirets représente le cas 2, et le tracé continu illustre le cas 3 ($\xi = 0.2$).

2.2.3. Réponse indicielle

Soit en entrée du système du second ordre la fonction $e(t) = e_0.U(t)$. La transformée de Laplace s'écrit $E(p) = \frac{e_0}{p}$ et la sortie dans le domaine de Laplace devient :

$$S(p) = \frac{Ke_0}{p(1+\frac{2\zeta}{\omega_n}p+\frac{1}{\omega_n^2}p^2)} \quad (4.21)$$

Comme dans le paragraphe précédent, il faut distinguer trois cas.

Cas 1 : $\xi > 1$. Le dénominateur a trois racines : une nulle, et deux autres en :

La décomposition en éléments simples donne :

$$\begin{aligned} p_1 &= -\zeta\omega_n + \sqrt{\zeta^2 - \omega_n} \\ p_2 &= -\zeta\omega_n - \sqrt{\zeta^2 - \omega_n} \end{aligned}$$

La décomposition en éléments simples donne :

$$Y(p) = U_0 K \omega_n^2 \left(\frac{1}{p-p_1} + \frac{1}{p-p_2} + \frac{1}{p} \right) \quad (4.22)$$

$$Y(p) = \frac{U_0 K \omega_n^2}{p_1 p_2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1 - p_2} \left(\frac{p_2}{p-p_1} - \frac{p_1}{p-p_2} \right) \right) \quad (4.23)$$

En observant que $p_1 p_2 = \omega_n^2$, et en appliquant la transformation de Laplace inverse, nous obtenons :

$$y(t) = U_0 K + U_0 K \frac{\omega_n (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) e^{(-\zeta\omega_n + \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n)t} - \omega_n (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) e^{(-\zeta\omega_n - \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n)t}}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (4.24)$$

donc finalement :

$$y(t) = U_0 K \left(1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left((-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) e^{\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t} - (\sqrt{\zeta^2 - 1} - \zeta) e^{-\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t} \right) \right) \quad (4.25)$$

La réponse est composée d'un terme échelon, et de deux modes exponentiels amortis, $y(t)$ tend vers sa valeur finale KU_0 , par valeurs inférieures.

Le graphe de la figure 4.7 présente l'évolution de $y(t)$ pour diverses valeurs de ξ .

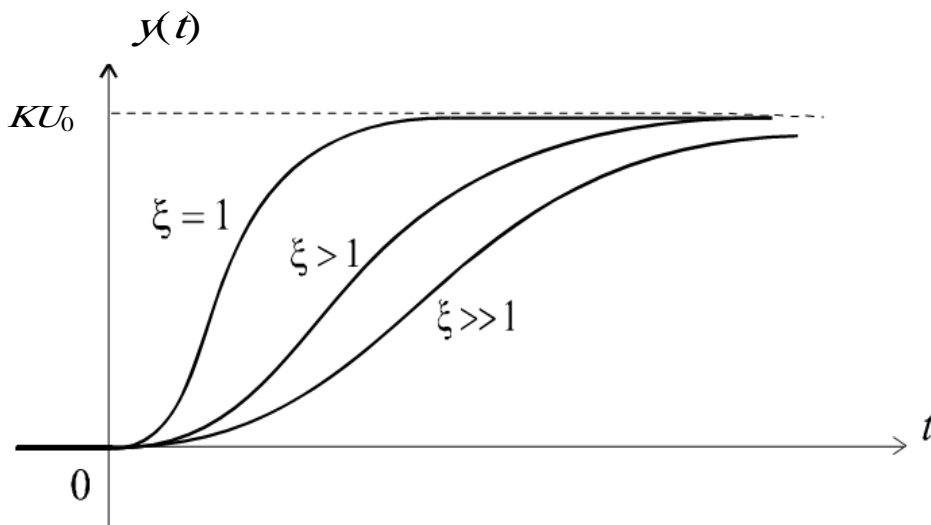


Figure 4.7. Réponse indicielle d'un système du second ordre à coefficient d'amortissement supérieur à 1.

Cas 2 : $\xi = 1$. Le dénominateur a une racine nulle, et une racine double $p_1 = -\omega_n$. La transformée de Laplace de la réponse est :

$$Y(p) = \frac{KU_0\omega_n^2}{p(p-p_1)^2} \quad (4.26)$$

La décomposition en éléments simples donne :

$$Y(p) = U_0K \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\omega_n} - \frac{\omega_n}{(p+\omega_n)^2} \right) \quad (4.27)$$

Prenons la transformée inverse de Laplace pour finalement obtenir la réponse temporelle :

$$y(t) = KU_0(1 - (1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t}) \quad (4.28)$$

Dans ce cas aussi, la réponse $y(t)$ tend vers sa valeur finale par valeurs inférieures.

Cas 3 : $\xi < 1$. Le dénominateur a deux racines complexes conjuguées :

$$p_1 = -\zeta\omega_n + j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$$

$$p_2 = -\zeta\omega_n - j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$$

En reprenant l'expression de $Y(p)$ du cas 1, nous avons :

$$Y(p) = \frac{U_0K\omega_n^2}{p_1p_2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1-p_2} \left(\frac{p_2}{p-p_1} - \frac{p_1}{p-p_2} \right) \right) \quad (4.29)$$

donc, dans le domaine temporel, nous obtenons :

$$y(t) = U_0K + \frac{U_0Ke^{-\zeta\omega_n t}}{2\sqrt{1-\zeta^2}} \left((-\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2}) e^{j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t} - (-\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2}) e^{-j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t} \right) \quad (4.30)$$

$$y(t) = U_0K \left(1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{2\sqrt{1-\zeta^2}} \left(-\zeta \sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t) - \sqrt{1-\zeta^2} \cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t) \right) \right) \quad (4.31)$$

Posons : $\tan(\phi) = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ il vient alors : $\cos(\phi) = \zeta$, et $\sin(\phi) = \sqrt{1-\zeta^2}$. En reportant cela dans $y(t)$, nous obtenons finalement :

$$y(t) = U_0K \left(1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{2\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \phi) \right), \text{ pour } \phi = \text{Atan} \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \quad (4.32)$$

La réponse tend vers la valeur finale KU_0 , mais contrairement aux autres cas, présente des oscillations amorties, de pulsation : $\omega_p = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$, appelée *pseudo-pulsation*.

Le graphe de $y(t)$ possède donc une asymptote vers la constante K lorsque t tend vers l'infini et le signal tend vers cette asymptote en présentant un régime dit *oscillatoire amorti* (figure 4.8).

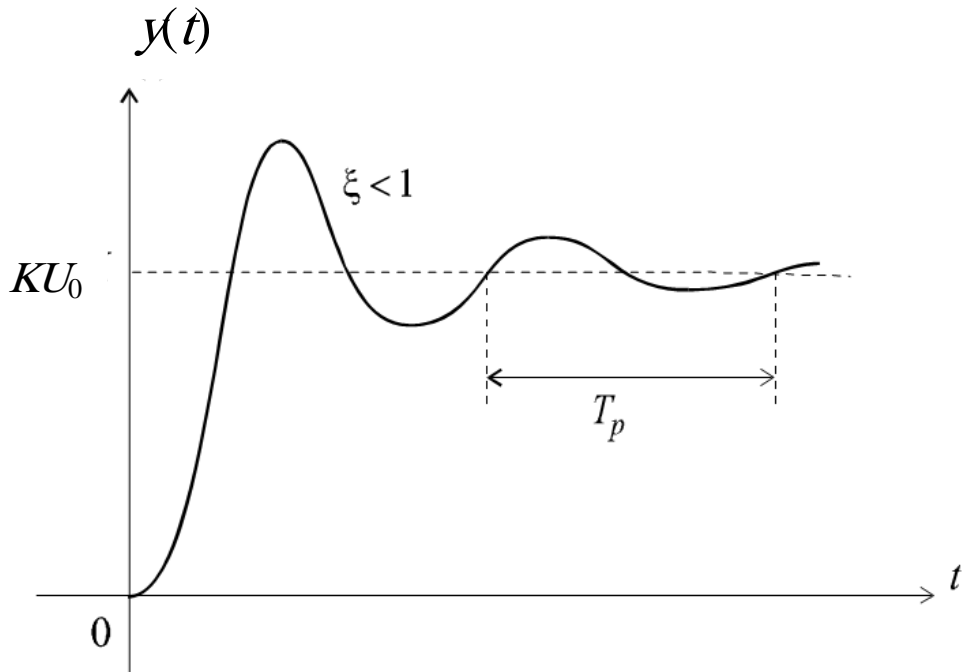


Figure 4.8. Réponse indicielle d'un système du second ordre à coefficient d'amortissement inférieur à 1.

Les caractéristiques de cette réponse sont :

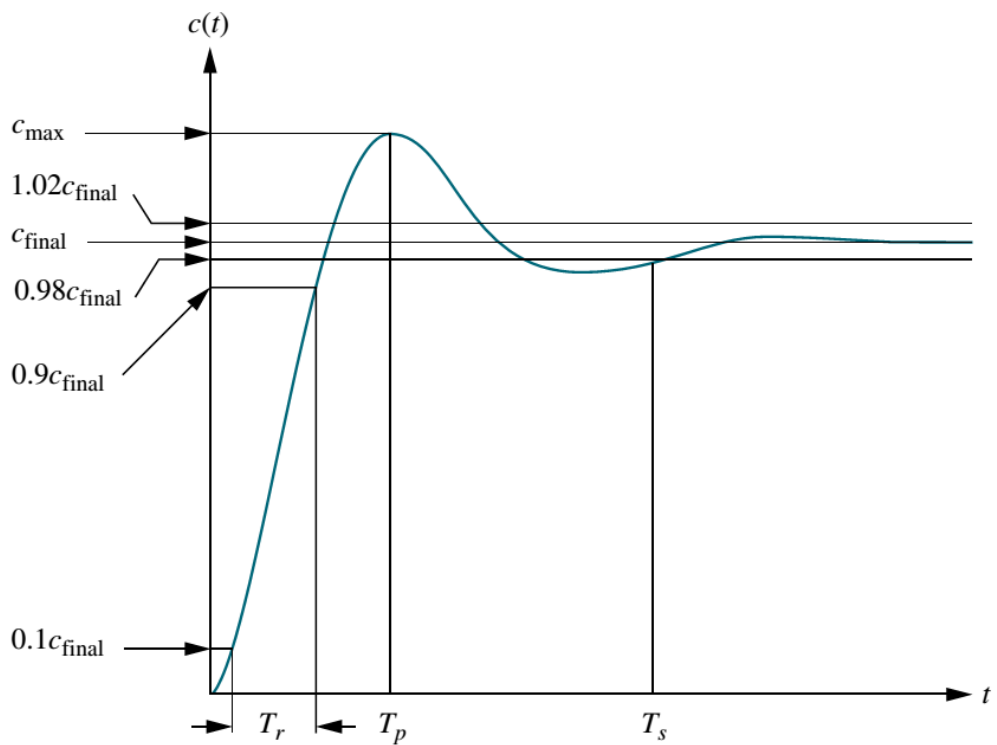


Figure 4.9. Caractéristiques de la réponse indicielle.

- régime permanent : $s_p(t) = K.U_0$
- **pulsation propre amortie** : $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$
- **temps de pic (T_p)** : $T_p = \frac{\pi}{\omega_p}$

- **Temps de stabilisation (T_s)**

Le temps de stabilisation, par définition, est le temps requis pour que l'exponentiel ait diminué jusqu'à 0.02% de sa valeur initiale. Ce qui veut dire :

$$T_s = \frac{-\ln(0.02\sqrt{1-\xi^2})}{\xi\omega_n} \quad (4.33)$$

Le terme $-\ln(0.02\sqrt{1-\xi^2})$ varie de 3.91 à 4.74 (pour $0 < \zeta < 1$). On peut réduire cette équation à : $T_s = \frac{4}{\xi\omega_n}$

- **Temps de montée, T_r**

Le temps de montée est le temps nécessaire pour que la réponse passe de 10% à 90% de sa valeur finale. Elle est donnée par la relation :

$$T_r = \frac{1}{\omega_p} (\tan)^{-1} \left(-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \quad (4.34)$$

Il existe une relation empirique pour trouver le temps de montée :

$$\omega_n T_r = 1.73\zeta^3 - 0.417\xi^2 + 1.039\xi + 1, \quad 0 < \zeta < 0.9 \quad (4.35)$$

ou, connaissant ω_n et T_r ,

$$\zeta = 0.115(\omega_n T_r)^3 - 0.883(\omega_n T_r)^2 + 2.504(\omega_n T_r) - 1.738 \quad (4.36)$$

- **Le pourcentage de dépassement** est défini comme :

$$D = \frac{y_{max} - y_{final}}{y_{final}} \times 100 \quad (4.37)$$

$$y_{final} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \quad (4.38)$$

- **Le dépassement maximal (c_{max})** est :

$$y_{max} = y(T_p) = 1 + e^{-\left(\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \quad (4.39)$$

si $y_{final} = 1$

$$\text{donc,} \quad M_p = e^{-\left(\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \times 100\% \quad (4.40)$$

Cette équation permet de trouver ζ si on connaît le dépassement maximal :

$$\xi = \frac{-\ln(M_p)}{\sqrt{\pi + \ln^2(M_p)}} \quad (4.41)$$

Exemple

Soit la fonction suivante :

$$G(p) = \frac{100}{p^2 + 15p + 100}$$

Trouver T_p , M_p et T_s .

On a :

$$\omega_n = \sqrt{100} = 10$$
$$\xi = \frac{15}{2 \cdot 10} = 0.75$$

Donc,

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = 0.475s$$

$$M_p = e^{-\left(\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)} = 2.838\%$$

$$T_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 0.533s$$

3. Réponses fréquentielles des systèmes linéaires

L'objectif de l'analyse fréquentielle est d'étudier le comportement et la réponse d'un système linéaire à une sollicitation sinusoïdale. La réponse en fréquence du système est l'étude du régime permanent. La sortie d'un système linéaire sollicité par une entrée sinusoïdale est de forme sinusoïdale de même pulsation que le signal d'entrée mais d'amplitude différente et déphasé par rapport au signal d'entrée (fig.4.10).

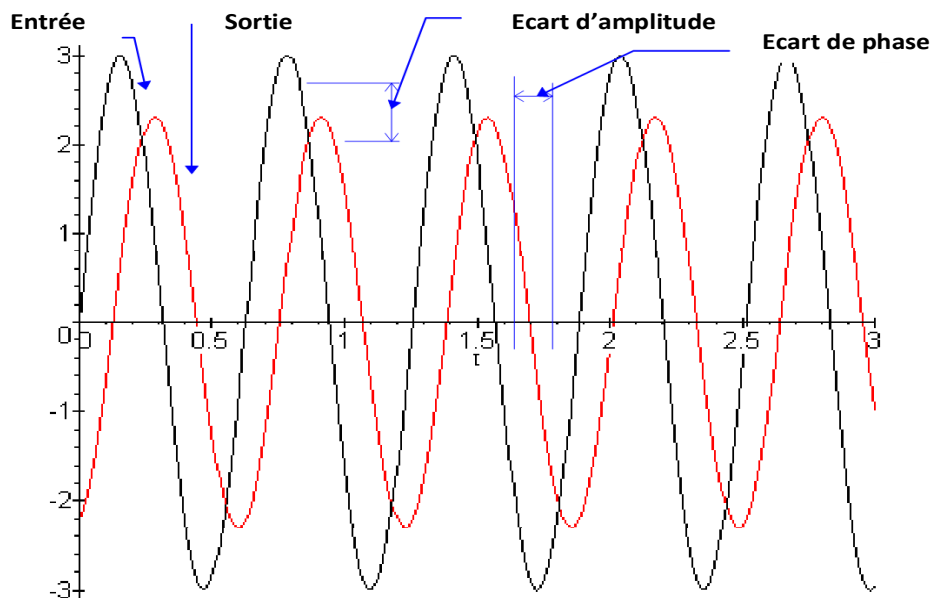


Figure 4.10. Réponse d'un système linéaire à une entrée sinusoïdale.

3.1. Fonction de transfert complexe

La fonction de transfert d'un système linéaire continu invariant dans le temps est une fonction de la forme :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \quad (4.42)$$

On appelle fonction de transfert complexe ou transmittance, la fonction obtenue en remplaçant la variable de Laplace p par le terme $j\omega$ (imaginaire pur).

$$G(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} \quad (4.43)$$

3.2. Lieu de transfert

L'étude de la fonction complexe $G(j\omega)$ peut se faire d'une manière graphique. On distingue principalement trois types de représentation : le diagramme de **Bode** et la représentation de **Nyquist**.

3.2.1 Diagramme de BODE

Le *diagramme de Bode* est constitué de deux courbes. La première donne le module de $G(j\omega)$ en décibels (dB), quand la pulsation ω varie :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log |G(j\omega)| \quad (4.44)$$

La seconde donne l'argument de $G(j\omega)$, généralement exprimé en degrés (*deg*), quand la pulsation ω varie :

$$\varphi(\omega) = \text{Arg}(G(j\omega)) \quad (4.45)$$

- l'échelle horizontale est le $\log_{10}(\omega)$;
- l'échelle pour le module est le $dB = 20 \log |G(j\omega)|$;
- l'échelle pour la phase est le degré.

3.2.1.1 Système du premier ordre

Considérons un système de fonction de transfert $G(p) = \frac{K}{1+\tau p}$.

K et T sont deux constantes positives. K est le gain statique du système, τ sa constante de temps.

On pose $\omega_c = \frac{1}{\tau}$

On a : $G(j\omega) = \frac{K}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$

D'où :

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_c})^2}} \quad (4.46)$$

$$\varphi(\omega) = -\text{Arctan}(\frac{\omega}{\omega_c}) \quad (4.47)$$

Comportement asymptotique de la réponse et diagrammes harmoniques

La description de la réponse harmonique d'un système se fait aisément en étudiant son *comportement asymptotique*. Dans un second temps, on complète cette étude par quelques valeurs permettant d'obtenir la réponse par interpolation. Le comportement asymptotique de la réponse harmonique est établi dans le tableau 4.1.

Tableau 4.1. Réponse harmonique d'un système du premier ordre.

ω	$G(j\omega)$ équivalent	Gain	Gain (dB)	Phase (deg)
$\omega \ll \omega_c$, soit $\frac{\omega}{\omega_c} \ll 1$	K	K	$20 \log_{10} K$	0
$\omega = \omega_c$, soit $\frac{\omega}{\omega_c} = 1$	$\frac{K}{1+j}$	$\frac{K}{\sqrt{2}}$	$20 \log_{10} K - 3$	-45
$\omega \gg \omega_c$, soit $\frac{\omega}{\omega_c} \gg 1$	$\frac{K}{j\frac{\omega}{\omega_c}}$	$\frac{K}{\frac{\omega}{\omega_c}}$	$20 \log_{10} K + 20 \log_{10} \omega_c - 20 \log_{10} \omega$	-90

A titre d'exemple, les diagrammes harmoniques d'un système du premier ordre de constante de temps $\tau = 0,01 \text{ s}$ et de gain statique $K = 10$ sont donnés aux figures 4.11.

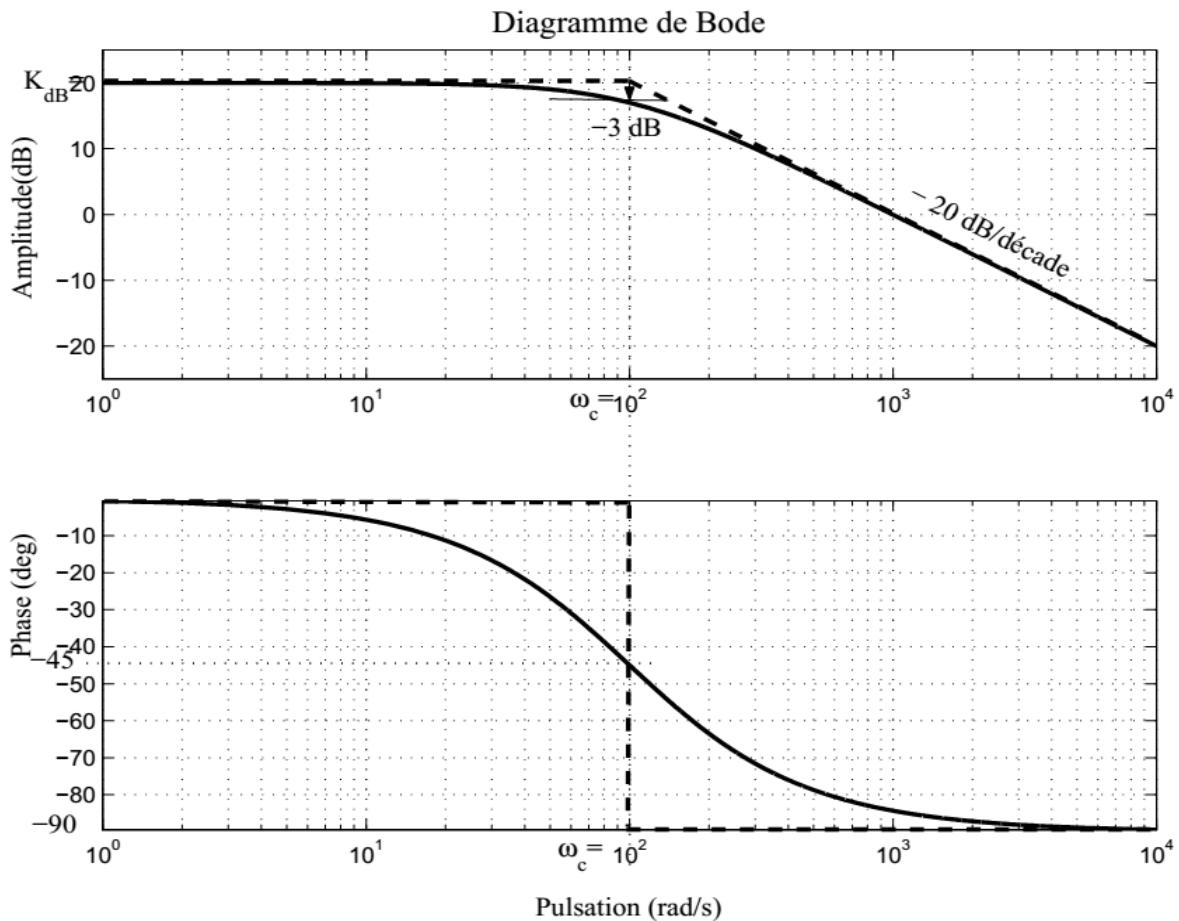


Figure 4.11. Diagramme de Bode d'un système du premier ordre de constante de temps $\tau = 0.01 \text{ s}$ et de gain statique $K = 10$.

3.2.1.2 Système du second ordre

Considérons un système de fonction de transfert

$$G(p) = \frac{K\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\xi\omega_n p + p^2} \quad (4.48)$$

La réponse harmonique issue de $G(p)$ est :

$$G(j\omega) = \frac{K\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2j\xi\omega_n\omega - \omega^2} \quad (4.49)$$

Comportement asymptotique de la réponse et diagrammes harmoniques

Le comportement asymptotique d'un système du second ordre est établi dans le tableau 4.2.

Tableau 4.2. Réponse harmonique d'un système du second ordre.

ω	$G(j\omega)$ équivalent	Gain	Gain (dB)	Phase (deg)
$\omega \ll \omega_n$	K	K	$20 \log_{10}K$	0
$\omega = \omega_n$	$\frac{K}{2j\xi}$	$\frac{K}{2\xi}$	$20 \log_{10}K - 6 - 20 \log_{10}\xi$	-90
$\omega \gg \omega_n$	$\frac{-K\omega_n^2}{\omega^2}$	$\frac{K\omega_n^2}{\omega^2}$	$20 \log_{10}K + 20 \log_{10}\omega_n - 40 \log_{10}\omega$	-180

On remarque que pour les pulsations grandes devant la pulsation naturelle ω_n , la courbe de gain suit une direction asymptotique, qui est une droite de pente -40 dB/décade dans le diagramme de Bode (figure 4.12). On y a représenté le cas d'un système du second ordre de pulsation naturelle $\omega_n = 100 \text{ rad/s}$ et de gain statique $K = 10$, pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement ξ .

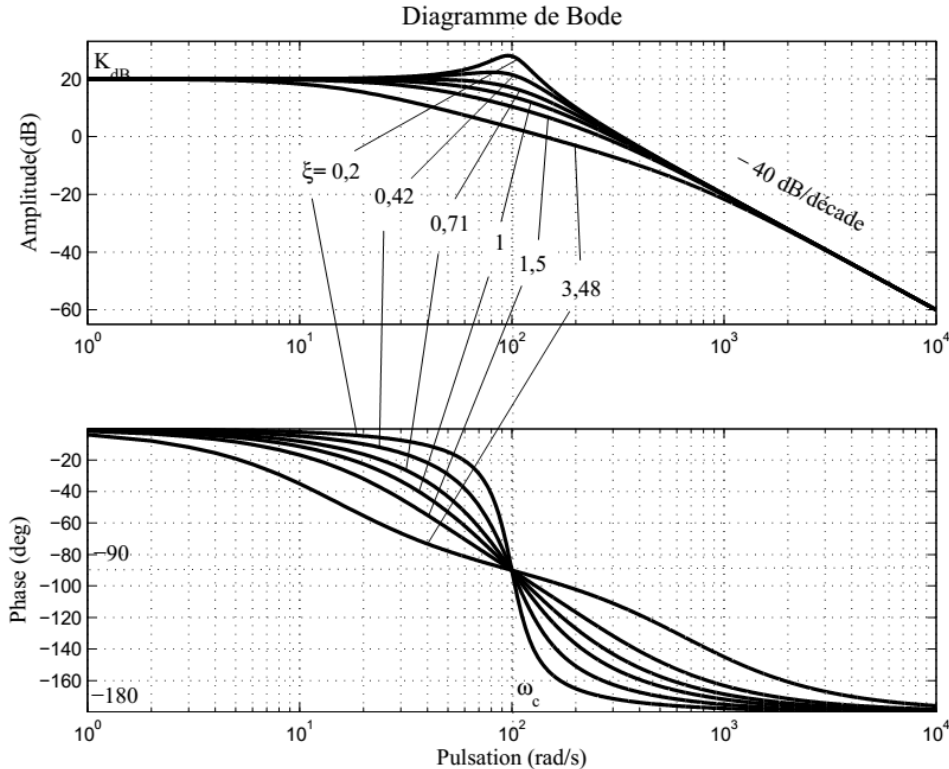


Figure 4.12. Diagramme de Bode d'un système du second ordre de gain statique $K = 10$ et de pulsation naturelle $\omega_n = 100 \text{ rad/s}$, pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement.

3.2.2 Diagramme de NYQUIST

Le diagramme de Bode constitue un moyen très efficace et facile d'accès pour représenter graphiquement le comportement fréquentiel d'un système. Toutefois, il est nécessaire de toujours effectuer deux graphes : gain et déphasage.

Le diagramme de Nyquist permet d'obtenir une représentation graphique de la fonction de transfert $G(j\omega) = Re(G(j\omega)) + Im(G(j\omega))$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$ (Figure 4.13). Ce diagramme est toujours orienté dans le sens des ω croissants.

On représente :

- **en abscisse**: la partie réelle de $H(j\omega)$
- **en ordonnée**: la partie imaginaire de $H(j\omega)$

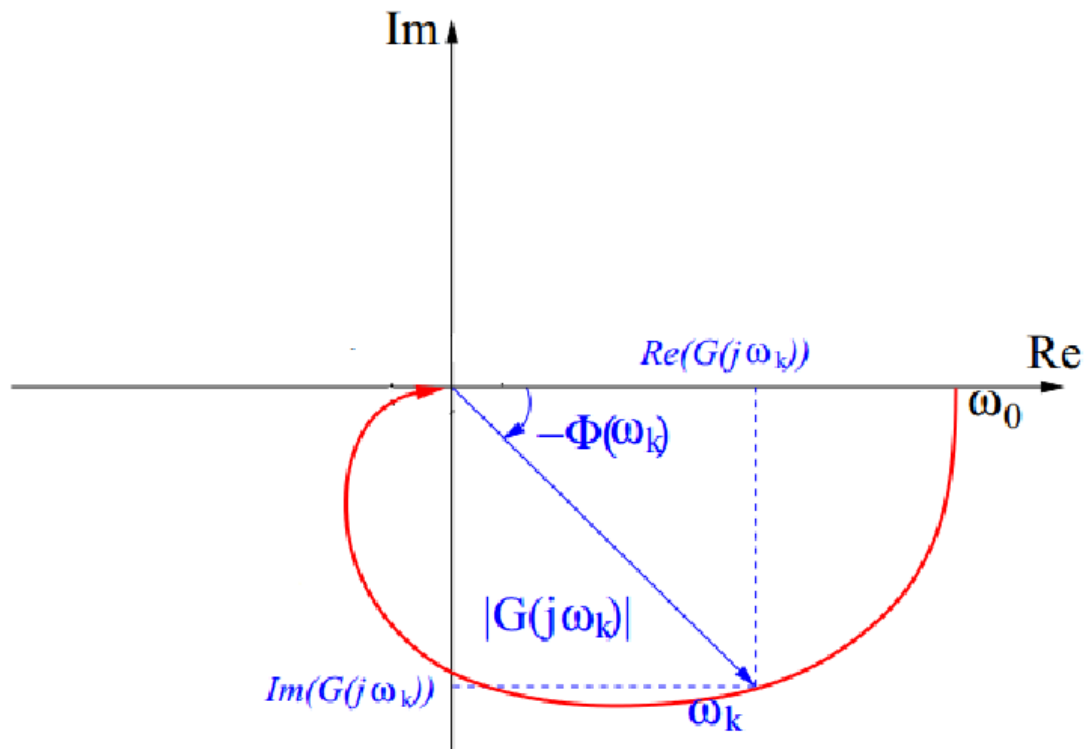


Figure 4.13. Diagramme de Nyquist.

3.2.2.1 Système du premier ordre

Pour tracer le diagramme de Nyquist, il faut décomposer $G(j\omega)$ en partie réelle et partie imaginaire, on a :

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1+j\tau\omega)} = \frac{K(1-j\tau\omega)}{(1+j\tau\omega)(1-j\tau\omega)} = \frac{K(1-j\tau\omega)}{(1+\tau^2\omega^2)} \quad (4.50)$$

soit :

$$G(j\omega) = \frac{K}{1+\tau^2\omega^2} + j \frac{-K\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2} = X + jY \quad (4.51)$$

Le lieu de Nyquist d'un système du premier ordre est un demi-cercle de centre $(K/2, 0)$ et de rayon $K/2$ comme le montre la Figure 4.14.

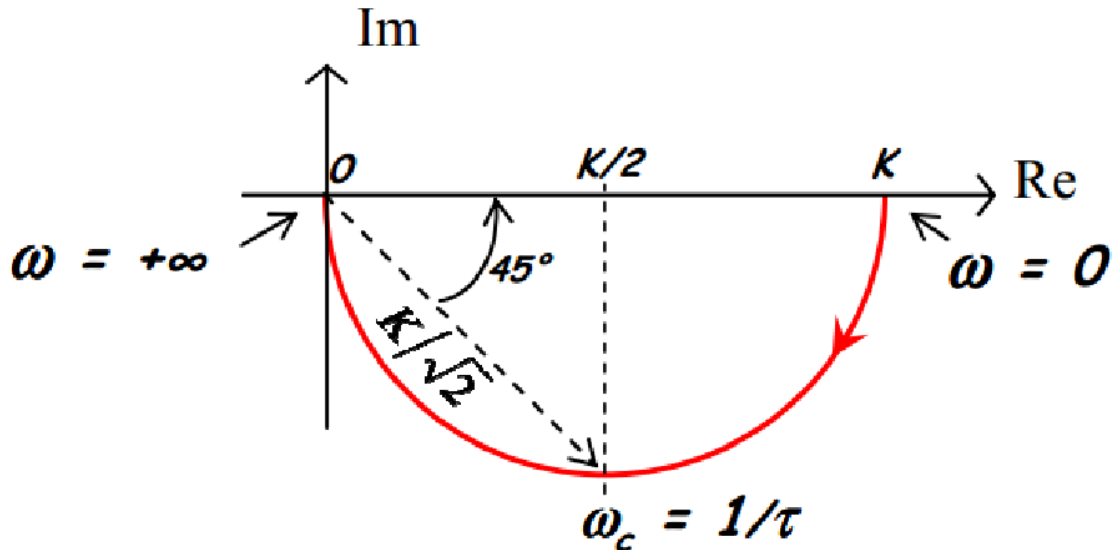


Figure 4.14. Diagramme de Nyquist d'un système du premier ordre.

A la pulsation de cassure pour $\omega = \omega_c = \frac{1}{\tau}$, $|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{2}}$, $\varphi(\omega) = -45^\circ$.

3.2.2.2 Systèmes du second ordre

Le diagramme de Nyquist d'un système du second ordre est défini à partir de l'expression suivante :

$$G(j\omega) = \frac{K(1-(\omega/\omega_n)^2)}{(1-(\omega/\omega_n)^2)^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_n)^2} - 2j \frac{K\zeta(\omega/\omega_n)}{(1-(\omega/\omega_n)^2)^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_n)^2} \quad (4.52)$$

La Figure 4.15 illustre les tracés obtenus en fonction des différents cas. On remarquera que tous les tracés ont les mêmes points de départ et d'arrivée. Aux hautes fréquences (ω tend vers l'infini), l'analyse asymptotique montre que la phase tend vers $-\pi$ c'est-à-dire la courbe est tangente à l'axe des réels, par la gauche, au point 0. Une éventuelle résonance ($\xi < 0.707$) s'observe par une courbe qui présente alors un maximum de gain (une inflexion de la courbe).

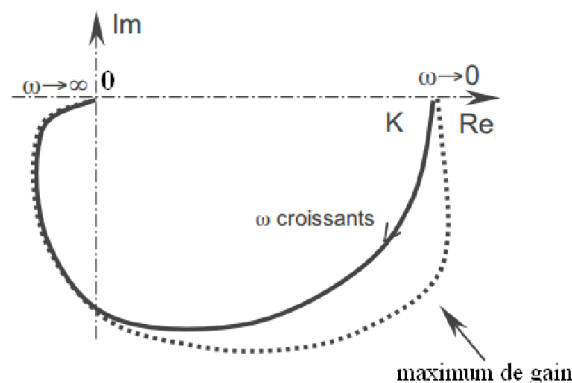


Figure 4.15. Diagramme de Nyquist d'un système du second ordre.