Chapitre 2 : Représentation d'état des systèmes multivariables

1. Introduction

Lorsqu'on cherche à Controller un système, la première étape consiste à le modéliser. La modélisation c'est l'opération d'élaboration d'une représentation mathématique qui permet de décrire et prédire le comportement du système lorsqu'il est soumis à des excitations externes (signaux d'entrées et perturbations).

2. Les différentes représentations mathématiques

Tout système linéaire peut être représenté par différents modèles mathématique. On distingue plusieurs représentations mathématiques, les plus connues en automatique des systèmes linéaires sont :

- L'équation différentielle.
- La fonction de transfert ou matrice fonction de transfert dans le cas multivariable.
- La représentation d'état.

2.1. L'équation différentielle

L'équation différentielle d'un système consiste à écrire les équations liant les variables d'entrée et leurs dérivées aux variables de sortie et leurs dérivées à l'exclusion de toutes les autres variables. Dans le cas général, le modèle prend la forme d'un système d'équations différentielles entrées-sorties.

$$\begin{aligned} &f_1(y_1, \cdots, y_1^{n1}, \cdots, y_r, \cdots, y_r^{nr}) = g_1(u_1, \cdots, u_1^{p1}, \cdots, u_m, \cdots, u_m^{pm}) \\ &\quad \ldots \\ &f_s(y_1, \cdots, y_1^{n1}, \cdots, y_r, \cdots, y_r^{nr}) = g_s(u_1, \cdots, u_1^{p1}, \cdots, u_m, \cdots, u_m^{pm}) \end{aligned} \qquad (1)$$

Du fait de la difficulté à les manipuler mathématiquement, ces modèles sont très peu utilisés excepté dans des cas particuliers tels que les modèles LTI où l'on obtient un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants.

2.1.1. Cas des systèmes monovariables :

Le cas particulier des systèmes possédant une seule entrée et une seule sortie (SISO) est très important parce qu'il possède de nombreuses propriétés que l'on ne retrouve pas dans le cas MIMO. Soit un système LTI mono-entrée, u(t), mono-sortie, y(t). Il peut alors être décrit par l'équation différentielle à coefficients constants suivante :

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \cdots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t) \qquad (2)$$

et si la transformée de Laplace est appliquée aux signaux d'entrée et de sortie, on obtient :

$$[a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0]\, Y(p) = [b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0]\, U(p) \qquad (3)$$

Fonction de transfert

Sous l'hypothèse des conditions initiales nulles, le rapport entre la transformée de Laplace du signal de sortie et la transformée de Laplace du signal d'entrée d'un système LTI est la fonction de transfert de ce système.

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0} \qquad (4)$$

3. Obtention de l'équation d'état à partir de l'équation différentielle

Considérons le modèle général d'un système linéaire invariant représenté par une équation différentielle d'ordre n.

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+ a_1y^{(1)}(t)+ a_0y(t) = b_nu^{(n)}(t)+b_{n-1}u^{(n-1)}(t)+\ldots+ b_1u^{(1)}(t)+ b_0u(t) \quad (5)$$

Afin d'obtenir une procédure systématique permettant de transformer une équation différentielle d'ordre n

en un modèle d'état, nous allons d'abord nous intéresser à une version simplifiée de (5) où les dérivées de l'entrée u n'interviennent pas :

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+ a_1y^{(1)}(t)+ a_0y(t) = u(t) \qquad (6)$$

Introduisons maintenant le changement de variables suivant :

$$\begin{array}{l} x_1=y \\ x_2=y^{(1)} \\ \ldots\ldots \qquad (7) \\ x_n=y^{(n-1)} \end{array}$$

Alors, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n, \\ \dot{x}_n &= -a_0x_1-\ldots-a_{n-1}x_n+u. \end{aligned} \qquad (8)$$

Cette écriture peut se réécrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{B} u,$$

$$y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

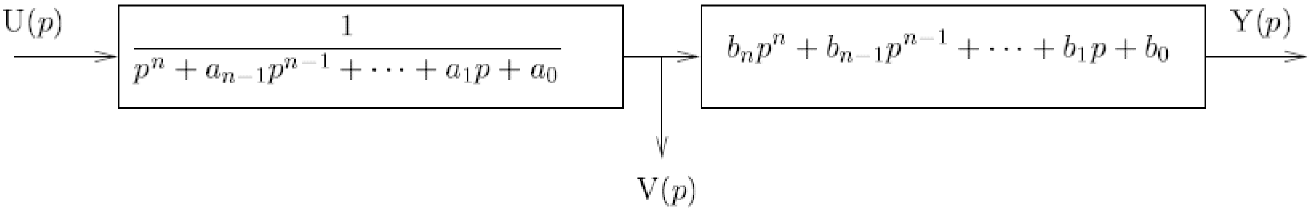
Cette représentation d'état est connue sous le nom de **forme canonique de commandabilité**.

4. Passage de la fonction de transfert vers un modèle d'état

Pour simplifier les calculs, nous ne considérerons que le cas mono-entrée, mono-sortie. Considérons donc la fonction de transfert d'un système mono-entrée, mono-sortie.

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}. \qquad (10)$$

Pour ce système, nous introduisons une variable auxiliaire (état partiel) $V(p)$ tel que $H(p)$ se décompose de la façon suivante :



$$\frac{V(p)}{U(p)} = \frac{1}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0},$$
$$\frac{Y(p)}{V(p)} = b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \cdots + b_1 p + b_0. \qquad (10)$$

Dans le domaine temporel, on écrit :

$$y(t) = b_n v^{(n)}(t) + \cdots + b_1 \dot{v}(t) + b_0 v(t).$$

$$u(t) = v^{(n)}(t) + a_{n-1}v^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 v(t),$$

$$v^{(n)}(t) = -a_{n-1}v^{(n-1)}(t) - \cdots - a_0 v(t) - u(t). \qquad (11)$$

On posant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & v, \\ x_2 & = & \dot{v}, \\ & \vdots & \\ x_n & = & v^{(n-1)}. \end{array} \right. \qquad (12)$$

On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & x_2, \\ \dot{x}_2 & = & x_3, \\ & \vdots & \\ \dot{x}_n & = & v^{(n)} = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + u. \end{array} \right. \qquad (13)$$

La sortie $y(t)$ prend la forme :

$$y = (b_0 - b_n a_0)x_1 + (b_1 - b_n a_1)x_2 + \cdots + (b_{n-1} - b_n a_{n-1})x_n + b_n u, \qquad (14)$$

Soit, sous forme matricielle :

$$y = \begin{pmatrix} b_0 - b_n a_0 & b_1 - b_n a_1 & \cdots & b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + b_n u. \qquad (15)$$

5. Passage d'un modèle d'état vers la fonction de transfert

Considérons la représentation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned} \qquad (16)$$

En appliquant la transformée de Laplace à (15), il vient que :

$$\begin{aligned} &pX(p) - x(0^+) = AX(p) + BU(p) \\ &\quad \Rightarrow X(p) = (pI_n - A)^{-1}x(0) + (pI_n - A)^{-1}BU(p), \\ &Y(p) = CX(p) + DU(p) \\ &\quad \Rightarrow Y(p) = C(pI_n - A)^{-1}x(0) + \left[C(pI_n - A)^{-1}B + D\right]U(p). \end{aligned} \qquad (17)$$

Pour des conditions initiales nulles (hypothèse de base pour le calcul des fonctions de transfert), nous obtenons :

$$Y(p) = \left[C(pI_n - A)^{-1}B + D\right]U(p). \qquad (18)$$

On posant :

$$H(p) = C(pI_n - A)^{-1}B + D \qquad (19)$$

Alors : Y(p) = H(p) U(p)

Où H(p) est désigné par Matrice **fonction de transfert du système**.

$$H(p) = \begin{bmatrix} H_{11}(p) & \cdots & H_{1m}(p) \\ \vdots & H_{ij}(p) & \vdots \\ H_{r1}(p) & \cdots & H_{rm}(p) \end{bmatrix}. \qquad (20)$$

6. Résolution de l'équation d'état

Quelle que soit la forme adoptée pour la représentation d'état, un système linéaire invariant est décrit par un ensemble de n équations différentielles du premier ordre.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du. \end{aligned} \qquad (21)$$

Le problème de la commande classique est de déterminer $u(t)$ afin que $x(t)$, et par conséquent $y(t)$, suive une loi prédéfinie. Il est donc nécessaire d'étudier le comportement de $x(t)$ et $y(t)$. Or $y(t)$ est lié à $x(t)$ par l'équation algébrique (21.2), ainsi pour obtenir le comportement de $y(t)$ il est nécessaire de résoudre l'équation différentielle du premier ordre (21.1) autrement dit de déterminer $x(t)$.

6.1. Le cas scalaire

Considérons l'équation différentielle scalaire du premier ordre :

$$\dot{x} = ax + bu, \quad (22)$$

avec la condition initiale $x(t_0)$.

Résolution du problème homogène : $\dot{x} = ax \Rightarrow \frac{\dot{x}}{x} = a$ **(23)**

En intégrant les deux parties de l'équation (23) de t_0 jusqu'à **t** on obtient :

$$[ln(x(t))]_{t_0}^{t} = a[t]_{t_0}^{t} \quad (24)$$

$$\Rightarrow ln(x(t)) - ln(x(t_0)) = a(t - t_0) \quad (25)$$

$$\Rightarrow ln\left(\frac{x(t)}{x(t_0)}\right) = a(t - t_0) \quad (26)$$

$$\Rightarrow e^{ln\left(\frac{x(t)}{x(t_0)}\right)} = e^{a(t-t_0)} \quad \mathbf{(27)}$$

$$\Rightarrow \frac{x(t)}{x(t_0)} = e^{a(t-t_0)} \quad \mathbf{(28)}$$

$$x(t) = x(t_0)e^{a(t-t_0)} \quad \mathbf{(29)}$$

L'équation (29) représente la solution de l'équation homogène.

Résolution du problème avec second membre :

On utilise la méthode de la variation de la constante, c'est-à-dire que l'on cherche une solution pour (22) sous la forme : $x(t) = z(t)e^{a(t-t_0)}$ **(30)**

$$\dot{x}(t) = az(t)e^{a(t-t_0)} + \dot{z}(t)e^{a(t-t_0)} = ax(t) + \dot{z}(t)e^{a(t-t_0)} \quad (31)$$

$$\dot{x}(t) = ax(t) + \dot{z}(t)e^{a(t-t_0)} = ax(t) + bu(t) \quad (32)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{z}(t)e^{a(t-t_0)} = bu(t) \quad (33)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{z}(t) = bu(t)e^{-a(t-t_0)} \quad (34)$$

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} bu(\tau)e^{-a(\tau-t_0)}\,d\tau \quad (35)$$

$$x(t) = z(t)e^{a(t-t_0)} = [z(t_0) + \int_{t_0}^{t} bu(\tau)e^{-a(\tau-t_0)}\,d\tau]e^{a(t-t_0)} \quad (36)$$

$$x(t) = z(t)e^{a(t-t_0)} = z(t_0)e^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} bu(\tau)e^{a(t-\tau)}\,d\tau \quad (37)$$

Et comme on a : $z(t_0) = x(t_0)$, alors en déduit la **Forme générale de** $x(t)$:

:

$$x(t) = x(t_0)e^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} bu(\tau)e^{a(t-\tau)}\,d\tau \quad (38)$$

La première partie de cette équation représente la solution libre (régime autonome) .

La seconde partie représente la solution forcée (régime forcé ou commandé) .

6.2. L'équation de transition

Généralisation au cas d'un système quelconque :

On considère maintenant le système représenté par l'équation d'état :

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \quad \mathbf{(39)}$$

La solution de cette équation s'obtient par généralisation du résultat précédent (pour t_0=0):

$$x(t) = \underbrace{e^{At}x(0)}_{\text{Solution libre}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\text{Solution forcée}} \quad (40)$$

Dans cette écriture, le terme e^{At} représente une matrice exponentielle que l'on note en générale $\phi(t)$ et que l'on appelle ***matrice de transition*** du système. Si on connait l'état du système à un instant **t_1 non nul**, on peut calculer son état à un instant **t** quelconque :

$$x(t) = e^{A(t-t_1)}x(t_1) + \int_{t_1}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \qquad (41)$$

Le problème de la résolution des équations d'état se ramène au problème de calcul de la matrice de transition.

6.3. Calcul de la matrice de transition

L'opération la plus délicate dans la résolution des équations d'état, consiste à calculer la matrice de transition Pour cela de nombreuses méthodes existent Les plus classiques sont les suivantes :

- ✓ Méthode 1 : La méthode de la transformée de Laplace
- ✓ Méthode 2 :La méthode de diagonalisation
- ✓ Méthode 3 : La méthode de Cayley-Hamilton
- ✓ Méthode 4 : La méthode de calcul direct (développement de Tylor)

Méthode 1 : La méthode de la transformée de Laplace :

$$\mathbf{x'(t) = Ax(t)+Bu(t)}$$
$$\mathbf{pX(p)-x(0) = AX(p)+BU(p)}$$
$$\mathbf{[pI - A]X(p) = x(0)+BU(p)}$$

I : Matrice d'identité *(nxn)*

$$X(p) = [pI - A]^{-1} x(0)+[pI-A]^{-1}BU(p)$$

Il apparaît clairement, en confrontant cette expression à la solution générale déterminée précédemment, soit :

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

que la matrice de transition e^{At} possède pour transformée de Laplace la matrice $[pI-A]^{-1}$

$\boldsymbol{\phi(t)} = e^{At} = L^{-1}[(pI-A)^{-1}]$

Il suffit alors d'inverser la matrice [pI-A], ce qui conduit à une matrice rationnelle en *p* dont on calcule la transformée de Laplace élément par élément.

Nous avons alors :

$$\Phi(p) = \mathcal{L}[\phi(t)] = (pI_n - A)^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}(pI_n - A)}{\det(pI_n - A)} \qquad (42)$$

où Adj(pI_n-A) représente la transposée de la matrice des cofacteurs. De la relation précédente, on en déduit donc que :

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[(pI_n - A)^{-1}\right] \qquad (43)$$

Exemple : $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$pI_n - A)^{-1} = \frac{1}{(p+1)(p+2)^2}\begin{bmatrix} (p+2)^2 & p+2 & 2p+5 \\ 0 & (p+1)(p+2) & (p+1) \\ 0 & 0 & (p+2)(p+1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{p+1} & -\frac{1}{p+2}+\frac{1}{p+1} & -\frac{1}{(p+2)^2}-\frac{3}{p+2}+\frac{3}{p+1} \\ 0 & \frac{1}{p+2} & \frac{1}{(p+2)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{p+2} \end{bmatrix}.$$

D'où par identification des transformées de Laplace sous forme éléments simples, on obtient :

$$\exp(At) = \begin{bmatrix} e^{-t} & -e^{-2t}+e^{-t} & -(t+3)e^{-2t}+3e^{-t} \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Méthode 2 : méthode de Cayley-Hamilton
Théorème de Cayley-Hamilton :
Toute matrice carrée est solution de son polynôme caractéristique.
En d'autres termes, si $P_A(\lambda)$ est le polynôme caractéristique de la matrice A c'est-à-dire

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0 \qquad (44)$$

Alors:

$$P_A(A) = A_n + a_{n-1}A_{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n = 0_{nxn} \qquad (45)$$

Donc, pour toutes matrice carrée possédant n valeurs propres distinctes, toutes puissance de A supérieure ou égale à n peut s'exprimer en fonction d'une combinaison des puissances de A inferieures à n. Donc :

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^nt^n}{n!} \qquad (46)$$

Prend la forme:

$$e^{At} = \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} + \alpha_{n-2}(t)A^{n-2} + \cdots + \alpha_1(t)A + \alpha_0(t)I \qquad (47)$$

Notons que tous les valeurs propres λi de la matrice A vérifient également cette équation, c-à-d :

$$e^{\lambda_i t} = \alpha_{n-1}(t)\,\lambda_i^{\,n-1} + \alpha_{n-2}(t)\,\lambda_i^{\,n-2} + \cdots + \alpha_1(t)\,\lambda_i + \alpha_0(t)I \qquad (48)$$

où λ_i, $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$: sont les valeurs propres **distinctes** de la matrice A. On obtient ainsi n équations algébriques linéaires déterminant de façon unique les coefficients α_i (t) :

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = \alpha_0(t) + \lambda_1\alpha_1(t) + \cdots + \lambda_1^{n-1}\alpha_{n-1}(t) \\ e^{\lambda_2 t} = \alpha_0(t) + \lambda_2\alpha_1(t) + \cdots + \lambda_2^{n-1}\alpha_{n-1}(t) \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} = \alpha_0(t) + \lambda_n\alpha_1(t) + \cdots + \lambda_n^{n-1}\alpha_{n-1}(t) \end{cases} \qquad (49)$$

Dans ce cas il suffit d'inverser la matrice de Van Der Monde.

Si les valeurs propres **ne sont pas toutes simples**, il faut obtenir des équations supplémentaires linéairement indépendantes de (48). Pour ce faire, il faut dériver cette équation par rapport à λ_i.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_i}(e^{\lambda_i t}) = te^{\lambda_i t} = \alpha_1(t) + 2\alpha_2(t)\lambda_i + \cdots + (n-1)\alpha_{n-1}(t)\lambda_i^{n-2}. \qquad (50)$$

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ te^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 0 & 1 & 2\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{pmatrix}.$$

Alors par exemple pour une matrice A ayant $\lambda 1$ comme valeur propre simple et $\lambda 2$ comme valeur propre double on a :

Méthode 3 : méthode de diagonalisation

Dans le cas où la matrice A est diagonalisable, il existe une matrice T inversible et une matrice D = diag(λ_i)

diagonale telles que : $A = TDT^{-1}$ (51)

T est calculée en utilisant les vecteurs propres. T =[V1, V2,…,Vn], les V_i sont les vecteurs propres qui sont associées aux valeurs propres λ_i, ils vérifient la relation : $\lambda_i V_i = AV_i$ (52)

Or l'expression en série de l'exponentielle fait apparaître les puissances de A :

Soit : $e^{At} = Te^{Dt}T^{-1}$ (53)