Rappel : la logique du premier ordre FOL

- langage :
  - variables objet x, y,...
  - prédicats : $P(t_1, \ldots, t_n)$
    - t_i : termes, construits à partir de variables et fonctions
    - un prédicat particulier : $egal(t_1, t_2)$, écrit $t_1 = t_2$
  - formules complexes : construites avec $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\exists$, $\forall$

    $(\exists y \forall x P(x, y)) \rightarrow (\forall x \exists y P(x, y))$
- interprétations $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, (.)^{\mathcal{I}})$:
  - domaine $\Delta^{\mathcal{I}}$ (non vide)
  - interprétation d'une variable: $(x)^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$
  - interprétation d'un prédicat n-aire : $(P)^{\mathcal{I}} \subseteq (\Delta^{\mathcal{I}})^n$
    - où on a toujours : $egal^{\mathcal{I}} = \{(d, d) \ : \ d \in \Delta^{\mathcal{I}}\}$
- conditions de vérité :
  - $(\Delta^{\mathcal{I}}, (.)^{\mathcal{I}}) \Vdash_{FOL} P(t_1, \ldots, t_n)$ ssi $((t_1)^{\mathcal{I}}, \ldots, (t_n)^{\mathcal{I}}) \in (P)^{\mathcal{I}}$
  - $(\Delta^{\mathcal{I}}, (.)^{\mathcal{I}}) \Vdash_{FOL} \forall x \varphi$ ssi $(\Delta^{\mathcal{I}}, (.)^{\mathcal{I}_x}) \Vdash_{FOL} \varphi$ pour toute variante $\mathcal{I}_x$ de $\mathcal{I}$ en x
  - ...
- formule φ est valide ssi $(\Delta^{\mathcal{I}}, (.)^{\mathcal{I}}) \Vdash_{FOL} \varphi$, pour tout $(\Delta^{\mathcal{I}}, (.)^{\mathcal{I}})$

  formule φ est satisfaisable ssi ...

Traduction de ALC en FOL

$$\boxed{\text{concept } \mathtt{C} \longmapsto \text{formule } \Phi(\mathtt{C}, x) \text{ de FOL}}$$

- le résultat de la traduction $\Phi(\mathtt{C}, x)$ a une seule variable libre : x ("l'individu actuel")
- définition récursive :

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathtt{A}, x) &= \mathtt{A}(x) \\
\Phi(\top, x) &= \top \\
\Phi(\bot, x) &= \bot \\
\Phi(\neg\mathtt{C}, x) &= \neg\Phi(\mathtt{C}, x) \\
\Phi(\mathtt{C} \sqcap \mathtt{D}, x) &= \Phi(\mathtt{C}, x) \wedge \Phi(\mathtt{D}, x) \\
\Phi(\mathtt{C} \sqcup \mathtt{D}, x) &= \Phi(\mathtt{C}, x) \vee \Phi(\mathtt{D}, x) \\
\Phi(\forall\mathtt{R}.\mathtt{C}, x) &= \forall y\, (\mathtt{R}(x, y) \rightarrow \Phi(\mathtt{C}, y)) \\
\Phi(\exists\mathtt{R}.\mathtt{C}, x) &= \ldots
\end{aligned}$$

Traduction de ALC en FOL (suite)

Proposition

Pour tout concept $\mathtt{C}$ *et pour toute interprétation* $(\Delta^{\mathcal{I}}, (.)^{\mathcal{I}})$ *:*

$$C^{\mathcal{I}} = \left\{ a \in \Delta^{\mathcal{I}} \;:\; \mathcal{I} \Vdash_{FOL} \Phi(\mathtt{C}, a) \right\}$$

démonstration par induction sur la forme de $\mathtt{C}$; on montre :

$$\boxed{\text{pour tout } a \in \Delta^{\mathcal{I}} \;:\; a \in C^{\mathcal{I}} \;\text{ ssi }\; \mathcal{I} \Vdash_{FOL} \Phi(\mathtt{C}, a)}$$

1. si $\mathtt{C}$ est un concept atomique $\mathtt{A}$ alors :
$$\begin{array}{lll} a \in \mathtt{A}^{\mathcal{I}} & \text{ssi} & \mathcal{I} \Vdash_{FOL} \mathtt{A}(a) \\ & \text{ssi} & \mathcal{I} \Vdash_{FOL} \Phi(\mathtt{A}, a) \end{array}$$
2. si $\mathtt{C}$ est de la forme $\top$ alors ...
3. si $\mathtt{C}$ est de la forme $\bot$ alors ...
4. si $\mathtt{C}$ est de la forme $\neg\mathtt{D}$ alors :
$$\begin{array}{llll} a \in (\neg\mathtt{D})^{\mathcal{I}} & \text{ssi} & a \notin \mathtt{D}^{\mathcal{I}} & \\ & \text{ssi} & \mathcal{I} \nVdash_{FOL} \Phi(\mathtt{D}, a) & \text{(par H.I.)} \\ & \text{ssi} & \mathcal{I} \Vdash_{FOL} \Phi(\neg\mathtt{D}, a) & \end{array}$$
5. si ...

Traduction de ALC en FOL (suite)

Proposition

Pour tout concept $\mathtt{C}$ *et pour toute interprétation* $(\Delta^{\mathcal{I}}, (.)^{\mathcal{I}})$ *:*

$$C^{\mathcal{I}} = \left\{ a \in \Delta^{\mathcal{I}} \ : \ \mathcal{I} \Vdash_{FOL} \Phi(\mathtt{C}, a) \right\}$$

démonstration par induction sur la forme de $\mathtt{C}$; on montre :

$$\boxed{\text{pour tout } a \in \Delta^{\mathcal{I}} \ : \ a \in C^{\mathcal{I}} \ \text{ ssi } \ \mathcal{I} \Vdash_{FOL} \Phi(\mathtt{C}, a)}$$

1. si $\mathtt{C}$ est un concept atomique $\mathtt{A}$ alors :
$$\begin{array}{lll} a \in \mathtt{A}^{\mathcal{I}} & \text{ssi} & \mathcal{I} \Vdash_{FOL} \mathtt{A}(a) \\ & \text{ssi} & \mathcal{I} \Vdash_{FOL} \Phi(\mathtt{A}, a) \end{array}$$
2. si $\mathtt{C}$ est de la forme $\top$ alors ...
3. si $\mathtt{C}$ est de la forme $\bot$ alors ...
4. si $\mathtt{C}$ est de la forme $\neg\mathtt{D}$ alors :
$$\begin{array}{llll} a \in (\neg\mathtt{D})^{\mathcal{I}} & \text{ssi} & a \notin \mathtt{D}^{\mathcal{I}} & \\ & \text{ssi} & \mathcal{I} \nVdash_{FOL} \Phi(\mathtt{D}, a) & \text{(par H.I.)} \\ & \text{ssi} & \mathcal{I} \Vdash_{FOL} \Phi(\neg\mathtt{D}, a) & \end{array}$$
5. si ...

Traduction de ALC en FOL : exercices

$$
\begin{aligned}
\Phi(\mathtt{A}, x) &= \mathtt{A}(x) \\
\Phi(\top, x) &= \top \\
\Phi(\bot, x) &= \bot \\
\Phi(\neg \mathtt{C}, x) &= \neg \Phi(\mathtt{C}, x) \\
\Phi(\mathtt{C} \sqcap \mathtt{D}, x) &= \Phi(\mathtt{C}, x) \wedge \Phi(\mathtt{D}, x) \\
\Phi(\mathtt{C} \sqcup \mathtt{D}, x) &= \Phi(\mathtt{C}, x) \vee \Phi(\mathtt{D}, x) \\
\Phi(\forall \mathtt{R}.\mathtt{C}, x) &= \forall y\, (\mathtt{R}(x, y) \rightarrow \Phi(\mathtt{C}, y)) \\
\Phi(\exists \mathtt{R}.\mathtt{C}, x) &= \exists y\, (\mathtt{R}(x, y) \wedge \Phi(\mathtt{C}, y))
\end{aligned}
$$

- traduire en FOL :
  1. $\mathtt{Personne} \sqcap \exists \mathtt{parentDe}.\exists \mathtt{parentDe}.\mathtt{Masculin}$
  2. $(\forall \mathtt{parentDe}.\mathtt{Masculin}) \sqcap (\forall \mathtt{parentDe}.\neg \mathtt{Masculin})$
  3. montrer que la traduction est satisfaisable : donner une interprétation de FOL $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, (.)^{\mathcal{I}})$ où elle est vraie

Traduction de ALCN en FOL : exercices

- compléter la traduction de ALCN en FOL

$$\Phi(\geq 2\ \mathrm{R}, x) = \ldots$$
$$\Phi(\geq n\ \mathrm{R}, x) = \ldots$$
$$\Phi(\leq n\ \mathrm{R}, x) = \ldots$$

- traduire en FOL
  1. $\mathtt{Personne} \sqcap \leq 2\ \mathtt{parentDe}$

Traduction de ALCN en FOL : solution

$$\Phi(\leq 2\ \mathrm{R}, x) = \forall y_1 \forall y_2 \forall y_3 \Big((\mathrm{R}(x, y_1) \wedge \mathrm{R}(x, y_2) \wedge \mathrm{R}(x, y_3) \rightarrow (y_1 = y_2 \vee y_1 = y_3 \vee y_2 = y_3) \Big)$$

$$\Phi(\leq n\ \mathrm{R}, x) = \forall y_1 \dots \forall y_{n+1} \left(\left(\mathrm{R}(x, y_1) \wedge \dots \wedge \mathrm{R}(x, y_{n+1}) \right) \rightarrow \left(\bigvee_{i<j\leq n+1} y_i = y_j \right) \right)$$

$$\Phi(\geq n\ \mathrm{R}, x) = \exists y_1 \dots \exists y_n \left(\mathrm{R}(x, y_1) \wedge \dots \wedge \mathrm{R}(x, y_n) \wedge \left(\bigwedge_{i<j\leq n} \neg y_i = y_j \right) \right)$$

Traduction de ALC en logique modale

- logique multimodale K_n :

$$\begin{array}{lcl} \Box_{\mathtt{R}}\varphi & = & \text{“}\varphi \text{ est vrai dans } \textit{tous} \text{ les états accessibles via } \mathtt{R}\text{”} \\ & = & \text{“}\varphi \text{ est nécessaire”} \\ & = & \ldots \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \Diamond_{\mathtt{R}}\varphi & = & \text{“}\varphi \text{ est vrai dans } \textit{quelques} \text{ les états accessibles via } \mathtt{R}\text{”} \\ & = & \text{“}\varphi \text{ est possible”} \\ & = & \ldots \end{array}$$

- fonction de traduction :

$$\begin{aligned} \mu(\mathtt{A}) &= \mathtt{A} && \text{si } \mathtt{A} \text{ est un concept atomique} \\ \mu(\top) &= \top \\ \mu(\bot) &= \bot \\ \mu(\neg\mathtt{C}) &= \neg\mu(\mathtt{C}) \\ \mu(\mathtt{C} \sqcap \mathtt{D}) &= \mu(\mathtt{C}) \wedge \mu(\mathtt{D}) \\ \mu(\mathtt{C} \sqcup \mathtt{D}) &= \mu(\mathtt{C}) \vee \mu(\mathtt{D}) \\ \mu(\forall \mathrm{R}.\mathtt{C}) &= \Box_{\mathtt{R}}\mu(\mathtt{C}) \\ \mu(\exists \mathrm{R}.\mathtt{C}) &= \Diamond_{\mathtt{R}}\mu(\mathtt{C}) \end{aligned}$$