Décidabilité et complexité

- le problème de satisfaisabilité d'un concept est décidable :
  - PSPACE complet si la TBox est acyclique
  - EXPTIME complet en général

$\Rightarrow$ suite : procédure de décision via tableaux pour la satisfaisabilité d'une ABox

$\Rightarrow$ subsume toutes les autres tâches de raisonnement dans le cas d'une TBox acyclique

La méthode des tableaux

- entrée : ABox $\mathcal{A}$
- sortie : 'oui' si $\mathcal{A}$ est satisfaisable, 'non' sinon
- hypothèse : $\mathcal{A}$ en forme normale négative
  - négations seulement devant les atomes
- notions et notations :
  - configuration du tableau = ensemble fini d'ABox'es S
    - initialisation : $S = \{\mathcal{A}\}$
  - $S, \mathcal{A}$ à la place de $S \cup \{\mathcal{A}\}$
  - $\mathcal{A}[X]$ = "X est un sous-ensemble de $\mathcal{A}$"
  - format des règles :

$$\frac{S,\ \mathcal{A}[X]}{S,\ \mathcal{A}[Y_1], \ldots, \mathcal{A}[Y_n]}$$

    - si $X \subseteq \mathcal{A}$ alors ajouter Y_i à $\mathcal{A}$
    - applicable si $Y_1 \not\subseteq \mathcal{A}, \ldots$ et $Y_n \not\subseteq \mathcal{A}$

Règles de tableau pour ALC

- règle pour $\sqcap$:

$$\frac{S,\ \mathcal{A}[(\mathtt{C} \sqcap \mathtt{D})(\mathtt{a})]}{S,\ \mathcal{A}[\mathtt{C}(\mathtt{a}), \mathtt{D}(\mathtt{a})]}$$

- règle pour $\sqcup$:

$$\frac{S,\ \mathcal{A}[(\mathtt{C} \sqcup \mathtt{D})(\mathtt{a})]}{S,\ \mathcal{A}[\mathtt{C}(\mathtt{a})],\ \mathcal{A}[\mathtt{D}(\mathtt{a})]}$$

- règle pour $\exists$:

$$\frac{S,\ \mathcal{A}[(\exists \mathrm{R}.\mathrm{C})(\mathrm{a})]}{S,\ \mathcal{A}[\mathrm{R}(\mathrm{a}, \mathrm{b}), \mathrm{C}(\mathrm{b})]} \quad ((\mathrm{b}) \notin \mathcal{A})$$

b = nouveau individu

- règle pour $\forall$:

$$\frac{S,\ \mathcal{A}[(\forall \mathrm{R}.\mathrm{C})(\mathrm{a}), \mathrm{R}(\mathrm{a}, \mathrm{b})]}{S,\ \mathcal{A}[\mathrm{C}(\mathrm{b})]}$$

Règles de tableau pour ALC

- règle pour $\sqcap$:

$$\frac{S,\ \mathcal{A}[(\mathtt{C} \sqcap \mathtt{D})(\mathtt{a})]}{S,\ \mathcal{A}[\mathtt{C}(\mathtt{a}), \mathtt{D}(\mathtt{a})]}$$

- règle pour $\sqcup$:

$$\frac{S,\ \mathcal{A}[(\mathtt{C} \sqcup \mathtt{D})(\mathtt{a})]}{S,\ \mathcal{A}[\mathtt{C}(\mathtt{a})],\ \mathcal{A}[\mathtt{D}(\mathtt{a})]}$$

- règle pour $\exists$:

$$\frac{S,\ \mathcal{A}[(\exists \mathtt{R}.\mathtt{C})(\mathtt{a})]}{S,\ \mathcal{A}[\mathtt{R}(\mathtt{a}, \mathtt{b}), \mathtt{C}(\mathtt{b})]} \quad ((\mathtt{b}) \notin \mathcal{A})$$

b = nouveau individu

- règle pour $\forall$:

$$\frac{S,\ \mathcal{A}[(\forall \mathtt{R}.\mathtt{C})(\mathtt{a}), \mathtt{R}(\mathtt{a}, \mathtt{b})]}{S,\ \mathcal{A}[\mathtt{C}(\mathtt{b})]}$$

Tableaux : contradictions manifeste

Une ABox $\mathcal{A}$ contient une contradiction manifeste (*clash*) si il existe un a tel que

- $\perp(\mathtt{a}) \in \mathcal{A}$, ou
- $\mathtt{C}(\mathtt{a}) \in \mathcal{A}$ et $\neg\mathtt{C}(\mathtt{a}) \in \mathcal{A}$

Sinon $\mathcal{A}$ est *ouvert*.

- exemple :
  $\mathcal{A} = \{\mathtt{Personne} \sqcap (\exists \mathtt{parentDe.Personne}) \sqcap \forall \mathtt{parentDe}.\perp(\mathtt{a})\}$
  1. déjà en forme normale négative
  2. $\{\{\mathtt{Personne}(\mathtt{a}), \exists\mathtt{parentDe.Personne}(\mathtt{a}), \forall\mathtt{parentDe}.\perp(\mathtt{a})\}\}$
     (règle pour $\sqcap$)
  3. $\{\{\mathtt{Personne}(\mathtt{a}), \exists\mathtt{parentDe.Personne}(\mathtt{a}), \forall\mathtt{parentDe}.\perp(\mathtt{a}), \mathtt{Personne}(\mathtt{b}), \mathtt{parentDe}(\mathtt{a}, \mathtt{b})\}\}$
     (règle pour $\exists$)
  4. $\{\{\mathtt{Personne}(\mathtt{a}), \exists\mathtt{parentDe.Personne}(\mathtt{a}), \forall\mathtt{parentDe}.\perp(\mathtt{a}), \mathtt{Personne}(\mathtt{b}), \mathtt{parentDe}(\mathtt{a}, \mathtt{b}), \perp(\mathtt{b})\}\}$
     (règle pour $\forall$)
  5. contradiction manifeste : $\perp(\mathtt{b})$

Tableaux : contradictions manifeste

Une ABox $\mathcal{A}$ contient une contradiction manifeste (*clash*) si il existe un a tel que

- $\bot(a) \in \mathcal{A}$, ou
- $C(a) \in \mathcal{A}$ et $\neg C(a) \in \mathcal{A}$

Sinon $\mathcal{A}$ est *ouvert*.

- exemple :
  $\mathcal{A} = \{\mathtt{Personne} \sqcap (\exists \mathtt{parentDe.Personne}) \sqcap \forall \mathtt{parentDe}.\bot(a)\}$
  1. déjà en forme normale négative
  2. $\{\{\mathtt{Personne}(a), \exists \mathtt{parentDe.Personne}(a), \forall \mathtt{parentDe}.\bot(a)\}\}$
     (règle pour $\sqcap$)
  3. $\{\{\mathtt{Personne}(a), \exists \mathtt{parentDe.Personne}(a), \forall \mathtt{parentDe}.\bot(a),$
     $\mathtt{Personne}(b), \mathtt{parentDe}(a, b)\}\}$
     (règle pour $\exists$)
  4. $\{\{\mathtt{Personne}(a), \exists \mathtt{parentDe.Personne}(a), \forall \mathtt{parentDe}.\bot(a),$
     $\mathtt{Personne}(b), \mathtt{parentDe}(a, b), \bot(b)\}\}$
     (règle pour $\forall$)
  5. contradiction manifeste : $\bot(b)$

Raisonnement : exercice complet (1)

$$\boxed{\{A \sqsubseteq \exists R.B\} \cup \{A(a)\} \models^{?} (\exists R.B)(a)}$$

(tâche = inférence de propriétés)

1. transformation en le problème de satisfaisabilité d'une ABox :

   $\boxed{\{A(a)\} \cup \{(\neg\exists R.B)(a)\} \text{ satisfaisable p.r.à } \{A \sqsubseteq \exists R.B\} \text{ ?}}$

2. éliminer $\sqsubseteq$:

   $\boxed{\{A(a), (\neg\exists R.B)(a)\} \text{ satisfaisable p.r.à } \{A \equiv A' \sqcap \exists R.B\} \text{ ?}}$

   $\Rightarrow$ TBox acyclique !

3. expansion de la ABox par la TBox : $A^{\{A \equiv A' \sqcap \exists R.B\}} = A' \sqcap \exists R.B$

   $\boxed{\{(A' \sqcap \exists R.B)(a)\} \cup \{(\neg\exists R.B)(a)\} \text{ satisfaisable ?}}$

4. mise en forme normale négative :

   $\boxed{\{(A' \sqcap \exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\} \text{ satisfaisable ?}}$

5. construction d'un tableau . . .

Raisonnement : exercice complet (1)

$$\boxed{\{A \sqsubseteq \exists R.B\} \cup \{A(a)\} \models^{?} (\exists R.B)(a)}$$

(tâche = inférence de propriétés)

1. transformation en le problème de satisfaisabilité d'une ABox :

   $\boxed{\{A(a)\} \cup \{(\neg\exists R.B)(a)\}\text{ satisfaisable p.r.à }\{A \sqsubseteq \exists R.B\}\text{ ?}}$

2. éliminer $\sqsubseteq$:

   $\boxed{\{A(a), (\neg\exists R.B)(a)\}\text{ satisfaisable p.r.à }\{A \equiv A' \sqcap \exists R.B\}\text{ ?}}$

   $\Rightarrow$ TBox acyclique !

3. expansion de la ABox par la TBox : $A^{\{A \equiv A' \sqcap \exists R.B\}} = A' \sqcap \exists R.B$

   $\boxed{\{(A' \sqcap \exists R.B)(a)\} \cup \{(\neg\exists R.B)(a)\}\text{ satisfaisable ?}}$

4. mise en forme normale négative :

   $\boxed{\{(A' \sqcap \exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\}\text{ satisfaisable ?}}$

5. construction d'un tableau . . .

Raisonnement : exercice complet (1)

$$\boxed{\{A \sqsubseteq \exists R.B\} \cup \{A(a)\} \models^{?} (\exists R.B)(a)}$$

(tâche = inférence de propriétés)

1. transformation en le problème de satisfaisabilité d'une ABox :

   $\{A(a)\} \cup \{(\neg\exists R.B)(a)\}$ satisfaisable p.r.à $\{A \sqsubseteq \exists R.B\}$?

2. éliminer $\sqsubseteq$:

   $\{A(a), (\neg\exists R.B)(a)\}$ satisfaisable p.r.à $\{A \equiv A' \sqcap \exists R.B\}$?

   $\Rightarrow$ TBox acyclique !

3. expansion de la ABox par la TBox : $A^{\{A \equiv A' \sqcap \exists R.B\}} = A' \sqcap \exists R.B$

   $\{(A' \sqcap \exists R.B)(a)\} \cup \{(\neg\exists R.B)(a)\}$ satisfaisable ?

4. mise en forme normale négative :

   $\{(A' \sqcap \exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\}$ satisfaisable ?

5. construction d'un tableau ...

Raisonnement : exercice complet (1)

$$\boxed{\{\mathtt{A} \sqsubseteq \exists \mathtt{R.B}\} \cup \{\mathtt{A(a)}\} \models^{?} (\exists \mathtt{R.B})(\mathtt{a})}$$

(tâche = inférence de propriétés)

1. transformation en le problème de satisfaisabilité d'une ABox :

   $\boxed{\{\mathtt{A(a)}\} \cup \{(\neg\exists \mathtt{R.B})(\mathtt{a})\} \text{ satisfaisable p.r.à } \{\mathtt{A} \sqsubseteq \exists \mathtt{R.B}\} \text{ ?}}$

2. éliminer $\sqsubseteq$:

   $\boxed{\{\mathtt{A(a)}, (\neg\exists \mathtt{R.B})(\mathtt{a})\} \text{ satisfaisable p.r.à } \{\mathtt{A} \equiv \mathtt{A'} \sqcap \exists \mathtt{R.B}\} \text{ ?}}$

   $\Rightarrow$ TBox acyclique !

3. expansion de la ABox par la TBox : $\mathtt{A}^{\{\mathtt{A} \equiv \mathtt{A'} \sqcap \exists \mathtt{R.B}\}} = \mathtt{A'} \sqcap \exists \mathtt{R.B}$

   $\boxed{\{(\mathtt{A'} \sqcap \exists \mathtt{R.B})(\mathtt{a})\} \cup \{(\neg\exists \mathtt{R.B})(\mathtt{a})\} \text{ satisfaisable ?}}$

4. mise en forme normale négative :

   $\boxed{\{(\mathtt{A'} \sqcap \exists \mathtt{R.B})(\mathtt{a}), (\forall \mathtt{R}.\neg \mathtt{B})(\mathtt{a})\} \text{ satisfaisable ?}}$

5. construction d'un tableau . . .

Raisonnement : exercice complet (1)

$$\boxed{\{\mathtt{A} \sqsubseteq \exists \mathtt{R.B}\} \cup \{\mathtt{A(a)}\} \models^{?} (\exists \mathtt{R.B})(\mathtt{a})}$$

(tâche = inférence de propriétés)

1. transformation en le problème de satisfaisabilité d'une ABox :

   $\boxed{\{\mathtt{A(a)}\} \cup \{(\neg\exists \mathtt{R.B})(\mathtt{a})\} \text{ satisfaisable p.r.à } \{\mathtt{A} \sqsubseteq \exists \mathtt{R.B}\} \text{ ?}}$

2. éliminer $\sqsubseteq$:

   $\boxed{\{\mathtt{A(a)}, (\neg\exists \mathtt{R.B})(\mathtt{a})\} \text{ satisfaisable p.r.à } \{\mathtt{A} \equiv \mathtt{A}' \sqcap \exists \mathtt{R.B}\} \text{ ?}}$

   $\Rightarrow$ TBox acyclique !

3. expansion de la ABox par la TBox : $\mathtt{A}^{\{\mathtt{A}\equiv\mathtt{A}'\sqcap\exists\mathtt{R.B}\}} = \mathtt{A}' \sqcap \exists \mathtt{R.B}$

   $\boxed{\{(\mathtt{A}' \sqcap \exists \mathtt{R.B})(\mathtt{a})\} \cup \{(\neg\exists \mathtt{R.B})(\mathtt{a})\} \text{ satisfaisable ?}}$

4. mise en forme normale négative :

   $\boxed{\{(\mathtt{A}' \sqcap \exists \mathtt{R.B})(\mathtt{a}), (\forall \mathtt{R}.\neg \mathtt{B})(\mathtt{a})\} \text{ satisfaisable ?}}$

5. construction d'un tableau . . .

Raisonnement : exercice complet (2)

$\boxed{\{(A' \sqcap \exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\} \text{ satisfaisable ?}}$

construction du tableau :

1. $\{\{(A' \sqcap \exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\}\}$
2. $\{\{A'(a), (\exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\}\}$ (règle pour $\sqcap$)
3. $\{\{A'(a), (\exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a), R(a,b), B(b)\}\}$
   (règle pour $\exists$; b nouveau)
4. $\{\{A'(a), (\exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a), R(a,b), B(b), (\neg B)(b)\}\}$
   (règle pour $\forall$)

$\Rightarrow$ contradiction manifeste

$\Rightarrow$ la ABox $\{(A' \sqcap \exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\}$ est insatisfaisable

$\Rightarrow$ de la KB $\{A \equiv A' \sqcap \exists R.B\} \cup \{A(a)\}$ on peut inférer $(\exists R.B)(a)$:

$$\{A \equiv A' \sqcap \exists R.B\} \cup \{A(a)\} \models (\exists R.B)(a)$$

Raisonnement : exercice complet (2)

$\{(A' \sqcap \exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\}$ satisfaisable ?

construction du tableau :

1. $\{\{(A' \sqcap \exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\}\}$
2. $\{\{A'(a), (\exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\}\}$ (règle pour $\sqcap$)
3. $\{\{A'(a), (\exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a), R(a,b), B(b)\}\}$ (règle pour $\exists$; b nouveau)
4. $\{\{A'(a), (\exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a), R(a,b), B(b), (\neg B)(b)\}\}$ (règle pour $\forall$)

$\Rightarrow$ contradiction manifeste

$\Rightarrow$ la ABox $\{(A' \sqcap \exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\}$ est insatisfaisable

$\Rightarrow$ de la KB $\{A \equiv A' \sqcap \exists R.B\} \cup \{A(a)\}$ on peut inférer $(\exists R.B)(a)$:

$$\{A \equiv A' \sqcap \exists R.B\} \cup \{A(a)\} \models (\exists R.B)(a)$$

Raisonnement : exercice complet (2)

$\boxed{\{(A' \sqcap \exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\} \text{ satisfaisable ?}}$

construction du tableau :

1. $\{\{(A' \sqcap \exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\}\}$
2. $\{\{A'(a), (\exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\}\}$ (règle pour $\sqcap$)
3. $\{\{A'(a), (\exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a), R(a, b), B(b)\}\}$ (règle pour $\exists$; b nouveau)
4. $\{\{A'(a), (\exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a), R(a, b), B(b), (\neg B)(b)\}\}$ (règle pour $\forall$)

$\Rightarrow$ contradiction manifeste

$\Rightarrow$ la ABox $\{(A' \sqcap \exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\}$ est insatisfaisable

$\Rightarrow$ de la KB $\{A \equiv A' \sqcap \exists R.B\} \cup \{A(a)\}$ on peut inférer $(\exists R.B)(a)$:

$$\{A \equiv A' \sqcap \exists R.B\} \cup \{A(a)\} \models (\exists R.B)(a)$$

Raisonnement : exercice complet (2)

$\boxed{\{(A' \sqcap \exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\} \text{ satisfaisable ?}}$

construction du tableau :

1. $\{\{(A' \sqcap \exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\}\}$
2. $\{\{A'(a), (\exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\}\}$ (règle pour $\sqcap$)
3. $\{\{A'(a), (\exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a), R(a,b), B(b)\}\}$
   (règle pour $\exists$; b nouveau)
4. $\{\{A'(a), (\exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a), R(a,b), B(b), (\neg B)(b)\}\}$
   (règle pour $\forall$)

$\Rightarrow$ contradiction manifeste

$\Rightarrow$ la ABox $\{(A' \sqcap \exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\}$ est insatisfaisable

$\Rightarrow$ de la KB $\{A \equiv A' \sqcap \exists R.B\} \cup \{A(a)\}$ on peut inférer $(\exists R.B)(a)$:

$$\{A \equiv A' \sqcap \exists R.B\} \cup \{A(a)\} \models (\exists R.B)(a)$$

Raisonnement : exercice complet (2)

$\{(A' \sqcap \exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\}$ satisfaisable ?

construction du tableau :

1. $\{\{(A' \sqcap \exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\}\}$
2. $\{\{A'(a), (\exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\}\}$ (règle pour $\sqcap$)
3. $\{\{A'(a), (\exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a), R(a, b), B(b)\}\}$ (règle pour $\exists$; b nouveau)
4. $\{\{A'(a), (\exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a), R(a, b), B(b), (\neg B)(b)\}\}$ (règle pour $\forall$)

$\Rightarrow$ contradiction manifeste

$\Rightarrow$ la ABox $\{(A' \sqcap \exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\}$ est insatisfaisable

$\Rightarrow$ de la KB $\{A \equiv A' \sqcap \exists R.B\} \cup \{A(a)\}$ on peut inférer $(\exists R.B)(a)$:

$$\{A \equiv A' \sqcap \exists R.B\} \cup \{A(a)\} \models (\exists R.B)(a)$$

Raisonnement : exercice complet (2)

$\{(A' \sqcap \exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\}$ satisfaisable ?

construction du tableau :

1. $\{\{(A' \sqcap \exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\}\}$
2. $\{\{A'(a), (\exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\}\}$ (règle pour $\sqcap$)
3. $\{\{A'(a), (\exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a), R(a,b), B(b)\}\}$ (règle pour $\exists$; b nouveau)
4. $\{\{A'(a), (\exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a), R(a,b), B(b), (\neg B)(b)\}\}$ (règle pour $\forall$)

$\Rightarrow$ contradiction manifeste

$\Rightarrow$ la ABox $\{(A' \sqcap \exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\}$ est insatisfaisable

$\Rightarrow$ de la KB $\{A \equiv A' \sqcap \exists R.B\} \cup \{A(a)\}$ on peut inférer $(\exists R.B)(a)$:

$$\{A \equiv A' \sqcap \exists R.B\} \cup \{A(a)\} \models (\exists R.B)(a)$$

Raisonnement : exercice complet (2)

$\{(A' \sqcap \exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\}$ satisfaisable ?

construction du tableau :

1. $\{\{(A' \sqcap \exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\}\}$
2. $\{\{A'(a), (\exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\}\}$ (règle pour $\sqcap$)
3. $\{\{A'(a), (\exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a), R(a,b), B(b)\}\}$ (règle pour $\exists$; b nouveau)
4. $\{\{A'(a), (\exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a), R(a,b), B(b), (\neg B)(b)\}\}$ (règle pour $\forall$)

$\Rightarrow$ contradiction manifeste

$\Rightarrow$ la ABox $\{(A' \sqcap \exists R.B)(a), (\forall R.\neg B)(a)\}$ est insatisfaisable

$\Rightarrow$ de la KB $\{A \equiv A' \sqcap \exists R.B\} \cup \{A(a)\}$ on peut inférer $(\exists R.B)(a)$:

$$\{A \equiv A' \sqcap \exists R.B\} \cup \{A(a)\} \models (\exists R.B)(a)$$

Raisonnement : un autre exercice complet (1)

$$\boxed{\{\mathtt{A} \equiv (\exists \mathrm{R}.\mathrm{B}_1) \sqcap (\exists \mathrm{R}.\mathrm{B}_2)\} \models^? \mathtt{A} \sqsubseteq \exists \mathrm{R}.(\mathrm{B}_1 \sqcap \mathrm{B}_2)}$$

(tâche = subsomption de concepts p.r.à une TBox)

1. transformation en problème de satisfaisabilité de concept p.r.à une TBox :

   $\boxed{\mathtt{A} \sqcap \neg\exists \mathrm{R}.(\mathrm{B}_1 \sqcap \mathrm{B}_2) \text{ satisfaisable p.r.à } \{\mathtt{A} \equiv (\exists \mathrm{R}.\mathrm{B}_1) \sqcap (\exists \mathrm{R}.\mathrm{B}_2)\} \text{ ?}}$

2. expansion du concept par la TBox (qui est acyclique) :

   $\boxed{(\exists \mathrm{R}.\mathrm{B}_1) \sqcap (\exists \mathrm{R}.\mathrm{B}_2) \sqcap \neg\exists \mathrm{R}.(\mathrm{B}_1 \sqcap \mathrm{B}_2) \text{ satisfaisable ?}}$

3. transformation en problème de satisfaisabilité d'une ABox :

   $\boxed{\{((\exists \mathrm{R}.\mathrm{B}_1) \sqcap (\exists \mathrm{R}.\mathrm{B}_2) \sqcap \neg\exists \mathrm{R}.(\mathrm{B}_1 \sqcap \mathrm{B}_2))(a)\} \text{ satisfaisable ?}}$

4. mise en forme normale négative :

   $\boxed{\{((\exists \mathrm{R}.\mathrm{B}_1) \sqcap (\exists \mathrm{R}.\mathrm{B}_2) \sqcap \forall \mathrm{R}.(\neg \mathrm{B}_1 \sqcup \neg \mathrm{B}_2))(a)\} \text{ satisfaisable ?}}$

5. construction d'un tableau . . .

Raisonnement : un autre exercice complet (2)

$\{((\exists R.B_1) \sqcap (\exists R.B_2) \sqcap \forall R.(\neg B_1 \sqcup \neg B_2))(a)\}$ satisfaisable ?

construction du tableau :

1. $\{ \{(\exists R.B_1) \sqcap (\exists R.B_2) \sqcap \forall R.(\neg B_1 \sqcup \neg B_2)(a)\} \}$
2. $\{ \{((\exists R.B_1)(a), (\exists R.B_2)(a), (\forall R.(\neg B_1 \sqcup \neg B_2))(a)\} \}$

   (règle pour $\sqcap$, deux fois)
3. $\{ \{(\exists R.B_1)(a), (\exists R.B_2)(a), (\forall R.(\neg B_1 \sqcup \neg B_2))(a),$
   $R(a, b_1), B_1(b_1), R(a, b_2), B_2(b_2)\} \}$ (règle pour $\exists$, deux fois)
4. $\{ \{(\exists R.B_1)(a), (\exists R.B_2)(a), (\forall R.(\neg B_1 \sqcup \neg B_2))(a),$
   $R(a, b_1), B_1(b_1), R(a, b_2), B_2(b_2),$
   $(\neg B_1 \sqcup \neg B_2)(b_1), (\neg B_1 \sqcup \neg B_2)(b_2)\} \} = \{\mathcal{A}_0\}$

   (règle pour $\forall$, deux fois)
5. $\{ \mathcal{A}_0 \cup \{(\neg B_1)(b_1)\} , \mathcal{A}_0 \cup \{(\neg B_2)(b_1)\} \}$ (règle pour $\sqcup$)
6. $\{ \mathcal{A}_0 \cup \{(\neg B_1)(b_1)\} \cup \{(\neg B_1)(b_2)\}, \mathcal{A}_0 \cup \{(\neg B_1)(b_1)\} \cup \{(\neg B_2)(b_2)\},$
   $\mathcal{A}_0 \cup \{(\neg B_2)(b_1)\} \cup \{(\neg B_1)(b_2)\}, \mathcal{A}_0 \cup \{(\neg B_2)(b_1)\} \cup \{(\neg B_2)(b_2)\} \}$

   (règle pour $\sqcup$, deux fois)

$\Rightarrow$ 3ème ABox ouverte $\Rightarrow$ satisfaisable $\Rightarrow \mathcal{T} \not\models A \sqsubseteq \exists R.(B_1 \sqcap B_2)$

Tableaux pour ALC : la grande finale

- La configuration S est satisfaisable ssi il existe une ABox $\mathcal{A}_i \in S$ et une interprétation $\mathcal{I}$ t.q. $\mathcal{I} \Vdash \mathcal{A}_i$.
- La configuration S est saturée ssi plus aucune règle ne peut être appliquée

Proposition (terminaison)

Pour toute entrée $\mathcal{A}$, la procédure de construction de tableau termine par une configuration saturée.

Proposition (adéquation)

Si la ABox $\mathcal{A}$ est satisfaisable alors toutes les configurations obtenues à partir de $\{\mathcal{A}\}$ sont ouvertes.

Proposition (complétude)

Si S est une configuration saturée et ouverte alors il existe une ABox $\mathcal{A} \in S$ tel que $\mathcal{A}$ est satisfaisable.

Tableaux pour des extensions de ALC

- ALCN
- inclusion de concepts généraux (cycliques)
  - requiert test de boucle
  - EXPTIME complet
- inclusion de rôles
- rôles transitifs
- réstrictions de cardinalité qualifiées
  - indécidable si combiné avec intersection de rôles !
  - indécidable si combiné avec rôles transitifs !
- constructeur 'un-parmi $a_1, \ldots, a_n$' : $\{a_1, \ldots, a_n\}$
  - $(\{a_1, \ldots, a_n\})^{\mathcal{I}} = \{a_1^{\mathcal{I}}, \ldots, a_n^{\mathcal{I}}\}$
  - exemple : $\texttt{Personne} \equiv \{\texttt{Alice}, \texttt{Bob}, \texttt{Charles}\}$
- domaines concrètes
  - nombres entiers : $\texttt{Adulte} \equiv \texttt{Personne} \sqcap \exists \texttt{ageDe}.{\geq}18$
  - ...