Série d’exercices n° 3

Exercice n° 1

- Soit la terminologie :
- $\text{Parent} \equiv \exists \text{aEnfant}.\top$
- $\text{ParentDeFamilleNombreuse} \equiv \text{Parent} \sqcap \geq 3\ \text{aEnfant}$
- Prouver :

$$\geq 2\ \text{aEnfant} \sqsubseteq \text{Parent}$$

$$\geq 4\ \text{aEnfant} \sqsubseteq \text{ParentDeFamilleNombreuse}$$

Solutions

$\geq 2\ aEnfant \sqsubseteq Parent$

$\geq 2aEnfan \sqcap \neg Parent \sqsubseteq \perp$

$\geq 2aEnfan \sqcap \neg \exists aEnfant.T$

$\geq 2aEnfan \sqcap \forall aEnfant.\perp$

$(\geq 2aEnfan \sqcap \forall aEnfant.\perp)(a)$

$Règle \sqcap: (\geq 2aEnfan)(a), (\forall aEnfant.\perp)(a)$

$Règle \geq: aEnfant(a, y1), aEnfant(a, y2), y1 \neq y2$

$Règle \forall : \perp(y1), \perp(y2)$

$Clash$

Solutions

$\geq 4\ aEnfant \sqsubseteq ParentDeFamilleNombreuse$

$$\geq 4aEnfan \sqcap \neg ParentDeFamilleNombreuse \sqsubseteq \perp$$

$$\geq 4aEnfan \sqcap \neg(Parent \sqcap \geq 3aEnfant)$$

$$\geq 4aEnfan \sqcap \neg(\exists aEnfant.T \sqcap \geq 3aEnfant)$$

$$\geq 4aEnfan \sqcap \left(\forall aEnfant.\perp \sqcup \leq 2aEnfant.\perp\right)$$

$$\left(\geq 4aEnfant \sqcap \left(\forall aEnfant.\perp \sqcup \leq 2aEnfant.\perp\right)\right)(a)$$

$$Règle \sqcap : (\geq 4aEnfant)(a), \left(\forall aEnfant.\perp \sqcup \leq 2aEnfant.\perp\right)(a)$$

$$Règle \sqcup : (\forall aEnfant.\perp)(a); (\leq 2aEnfant.\perp)(a)$$

$$Règle \geq : aEnfant(a, y1), aEnfant(a, y2), aEnfant(a, y3), aEnfant(a, y4), y1 \neq y2 \neq y3 \neq y4$$

$$Règle \forall : \perp(y1), \perp(y2), \perp(y3), \perp(y3)$$

$$Clash(fermée)$$

$$Règle \leq : y1 = y2; y1 = y3; y2 = y3$$

$$Clash(fermée)$$

Exercice n° 2

- Soit la terminologie :

$$\mathit{Plante} \equiv \mathit{Vivant} \sqcap \exists \mathit{aime}.\mathit{Plante}$$
$$\exists \mathit{aime}.\top \sqsubseteq \mathit{Animal}$$

- Prouver :

$$\mathit{Plante} \sqsubseteq \mathit{Animal}$$

Solution

- Il faudra d'abord transformer tout axiome d'inclusion de la forme $C \sqsubseteq D$ en un axiome équivalent $T \sqsubseteq \neg C \sqcup D$

- Dans la preuve par tableau, on pourra alors, pour tout individu a qui y est introduit, ajouter le fait

$$(\neg C \sqcup D)(a)$$

$\exists aime.T \sqsubseteq \sqcup Animal$

$T \sqsubseteq \neg\exists aime.T \sqcup Animal$

$T \sqsubseteq \forall aime.\bot \sqcup Animal$

prouver l'insatisfaisabilité de $Plante \sqcap \neg Animal$

$(Vivant \sqcap \exists aime.Plante \sqcap \neg Animal)(a)$

$Règle \sqcap : Vivant(a), \exists aime.Plante(a), \neg Animal(a)$

$Règle \exists : aime(a,b), Plante(b)$

$\Rightarrow (\forall aime.\bot \sqcup Animal)(a)$

$Règle \sqcup : (\forall aime.\bot)(a); Animal(a)$

$Clash : \neg Animal(a), Animal(a)$

$Règle \forall : \bot(b) \Rightarrow Clash$

Exercice n° 3

- Soit la base de connaissances suivante :

$$R(a, b)$$
$$(\forall R.(\exists S.C) \sqcap \leq 1R)(a)$$
$$(\forall R.(\forall S.D))(a)$$

- Prouvez que l'assertion suivante est une conséquence logique de cette base de connaissances :

$$(\exists S.(C \sqcap D))(b)$$

Solution

$(\neg\exists S.(C \sqcap D))(b) \Rightarrow (\forall S.(\neg C \sqcup \neg D))(b)$

$R(a,b)$

$(\forall R.(\exists S.C) \sqcap \leq 1R)(a)$

$(\forall R.(\forall S.D))(a)$

$(\forall S.(\neg C \sqcup \neg D))(b)$

$Règle \sqcap : \forall R.(\exists S.C)(a), (\leq 1R)(a)$

$Règle \forall : \exists S.C(b), \forall S.D(b)$

$Règle \exists : S(b,c), C(c)$

$Règle \forall : D(c), (\neg C \sqcup \neg D)(c)$

$Règle \sqcup : \neg C(c); \neg D(c)$

$Branche 1 : C(c), \neg C(c) \Rightarrow Clash$

$Branche 2 : D(c), \neg D(c) \Rightarrow Clash$