

Filtrage numérique des images

4.1 Introduction sur le filtrage numérique

Le filtrage est une opération qui a pour but d'extraire une information ou d'améliorer l'aspect de l'image, par exemple en éliminant un bruit ou en améliorant les contours d'une image floue. Le traitement local d'une image utilise la notion de filtre (filtrage spatial). Ces filtres peuvent s'écrire sous la forme d'un produit de convolution entre une matrice (ou noyau de convolution) et d'une image. Malheureusement, en appliquant de gros masques de convolution, on peut constater que le temps de calcul devient très important. Pour cela, on peut appliquer les masques dans l'espace des fonctions de Fourier (filtrage spectral) qui rendront les calculs beaucoup plus rapides car il existe un algorithme de calcul de la transformée très rapide (FFT).

Les sources de bruit :

- ✓ Bruits liés aux conditions de prise de vues : Ce sont des événements vérifiant les conditions d'acquisition du signal : le bougé, problèmes liés à l'éclairage de la scène observée...
- ✓ Bruits liés au capteur : Capteur mal réglé, capteur de mauvaise qualité (distorsion de la gamme des niveaux de gris ou en flou)...
- ✓ Bruits liés à l'échantillonnage : Ces bruits reflètent essentiellement des problèmes de quantification (CCD).
- ✓ Bruits liés à la nature de la scène : Nuage sur les images satellitaires, poussières dans les scènes industrielles, brouillard pour les scènes routières...

4.2 Filtrage spatial et convolution 2D

Dans le traitement local le nouveau niveau de gris en un point est fonction de l'ancien niveau de gris du pixel considéré et de ses voisins. L'opération de voisinage fait appel à un domaine associé à un point $p(x, y)$ limité par un contour de taille fixe appelé voisinage de p (neighbourhood en anglais). Le résultat (niveau de gris) est calculé en considérant l'ensemble des niveaux de gris inclus dans le voisinage; ce résultat est affecté au point de coordonnées (x, y) de l'image résultat.

Le calcul de l'image résultat consiste donc à prendre chacun des points de l'image source, à leur associer le voisinage et à effectuer le calcul. Cette méthode de calcul est donc beaucoup plus coûteuse en temps de calcul que l'opération ponctuelle.

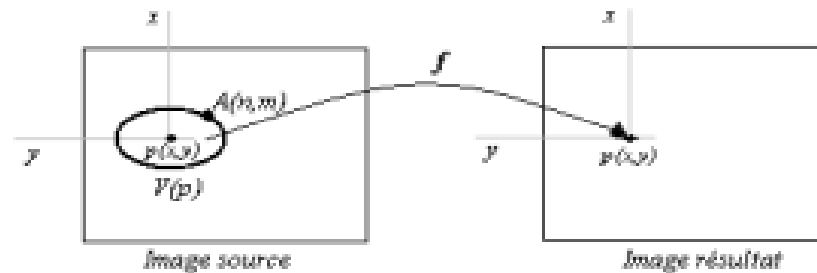


Figure 4.1. Principe de l'opération de voisinage

4.2.1 Voisinage

Un pixel $I(x, y)$ possède quatre voisins horizontaux et verticaux qui forment ce qu'on appelle le 4-voisinage de $I(x, y)$. Si on considère un pixel comme un carré élémentaire, les pixels présentant un côté commun avec $I(x, y)$ sont appelés les 4-voisins de (x, y) . Le pixel $I(x, y)$ possède aussi quatre voisins diagonaux, ce sont les pixels qui ont un sommet commun avec (x, y) . L'ensemble des huit voisins du pixel (x, y) représentent ce qu'on appelle les 8-voisins (8-voisinage). Ces huit voisins forment la fenêtre 3x3 du pixel $I(x, y)$. On dit aussi que ces pixels sont 8-adjacents de (x, y) .

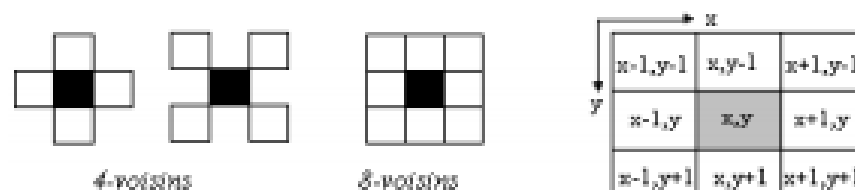


Figure 4.2. Exemples de voisinage

4.2.2 Produit de convolution

Le produit de convolution est une opération très courante en traitement d'images. Il sert d'opération de voisinage linéaire et invariante par translation. Cette opération fait donc appel aux outils disponibles pour respecter la convolution:

- multiplication du niveau de gris d'un point par une constante.
- addition des niveaux de gris des points d'une image; dans le cas continu, cette addition des niveaux se traduit sous forme d'une intégrale de surface.

1. Définition de la convolution dans l'espace continu

Soit F une image une image continue caractérisée par un niveau de gris f et G l'image résultat de niveau de gris g . Le produit de convolution $g = f * h$ est défini par :

$$g(x,y) = f * h \Big|_{x,y} = \iint_{(V)} f(x-u, y-v) h(u,v) du dv$$

h est la réponse impulsionnelle de l'opération de convolution.

2. Définition de la convolution dans l'espace discret

Soit F une image discrète caractérisée par un niveau de gris f et G l'image résultat de niveau de gris g . La convolution discrète est un calcul linéaire de voisinage:

$$g(m,n) = f * h \Big|_{m,n} = \sum_{i=k1}^{k1} \sum_{j=k2}^{k2} f(m-i, n-j) h(i,j), \quad k1 = \frac{K-1}{2}, k2 = \frac{L-1}{2}$$

où le domaine de définition de la réponse impulsionnelle $h(i,j)$ est restreint à une matrice de dimension (K,L) . Exemple pour $K=L=3$, $k1=k2=1$. La convolution de l'image f par un filtre de réponse impulsionnelle h représenté par un noyau fini (éventuellement tronqué) peut être calculée directement par balayage des pixels de f et calcul de la somme des valeurs des voisins de chaque pixel pondérées par les valeurs du noyau de convolution. Le mécanisme de la convolution discrète est facilement visualisable.

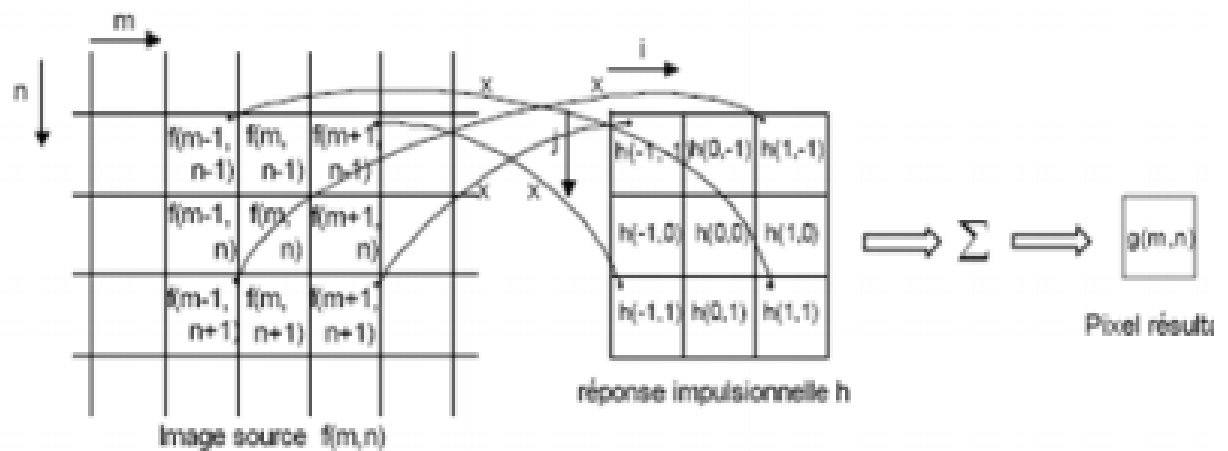


Figure 4.3. Principe de calcul de la convolution discrète à partir de la réponse impulsionnelle

On notera que le calcul met en correspondance les points de f avec les points symétriques de h . Cette remarque conduit à définir la notion de masque de convolution à partir d'une symétrie centrale appliquée à h .

$$\tilde{h}(m,n) = h(-m,-n)$$

Remarquer que le voisinage de calcul de f est strictement celui du masque.

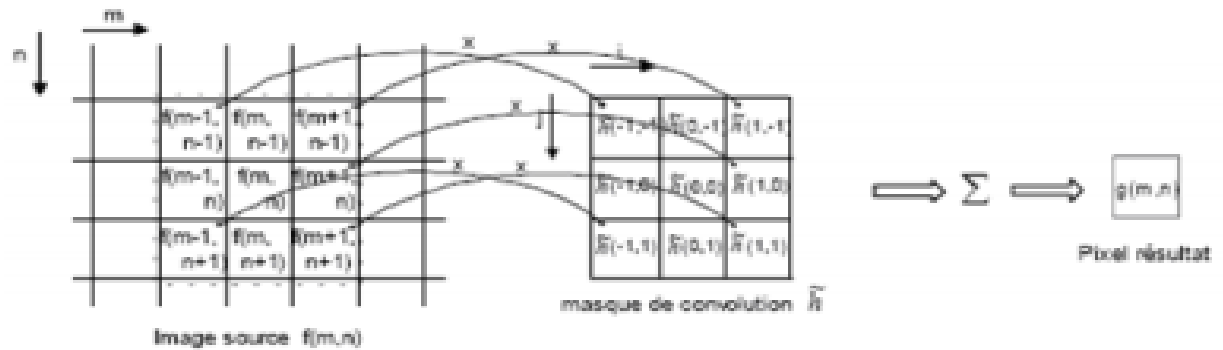


Figure 4.4. Principe de calcul de la convolution discrète par application d'un masque.

Le plus souvent, les opérateurs discrets seront donnés sous forme de masque.

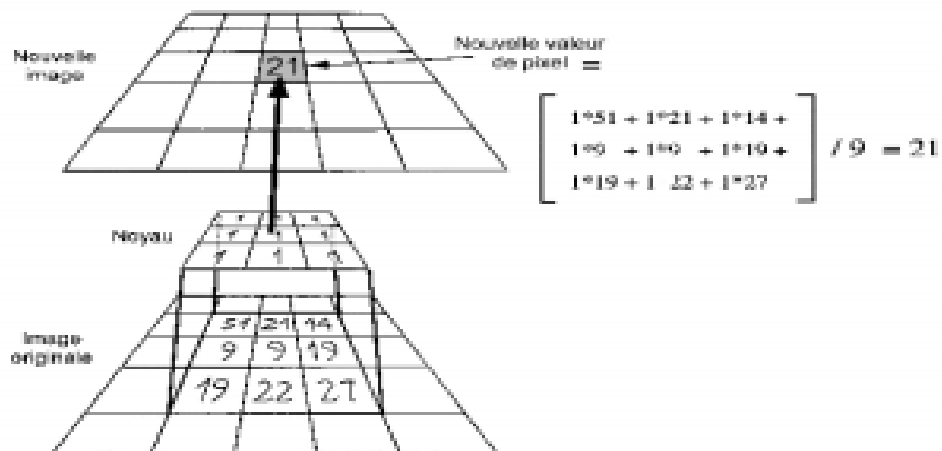


Figure 4.5. Exemple de calcul de la convolution par application d'un masque .

4.2.3 Traitement des points de bordure

Il y a plusieurs façons de gérer les points de bordure. Nous ne présenterons que les 3 méthodes suivantes :

1. **La méthode des zéros** : Dans cette approche, on considère que tous les points qui ne font pas partie de l'image ont le niveau de gris 0. On remplit donc de zéros les points extérieurs voisins des points de bordure, avant de faire la convolution. Le nombre de points extérieurs à considérer est fonction de la taille du masque de convolution. La figure suivante montre un exemple pour un masque de taille 3 x 3.
2. **La méthode symétrique** : Dans cette approche, on attribue aux points extérieurs les niveaux de gris de leurs symétriques se trouvant dans l'image.
3. **La méthode de la symétrie circulaire** : Dans cette approche, on agit comme si l'image se refermait sur elle-même, et les points extérieurs sont vus comme s'ils se retrouvaient de l'autre côté de l'image. Il convient de noter que cette approche n'est pas réaliste sur le plan pratique, puisque la nature des pixels se trouvant sur un bord de la scène peut être complètement différente de celle des pixels se trouvant à l'autre extrémité.

4.2.4 Séparabilité d'un filtre de convolution

Un filtre de convolution est dit séparable si $h(x, y) = h_x(x) \cdot h_y(y)$

Cette structure de filtre simplifie grandement les calculs. Le premier calcul conduit à faire une convolution h_y selon les colonnes puis à faire une convolution h_x selon les lignes.

La décomposition du filtre h en deux sous filtres h_x et h_y formant des noyaux à 1 dimension permet de ramener un traitement bidimensionnel à un traitement selon x suivi d'un traitement selon y .

$$g(m, n) = \sum_{i=-k1}^{k1} \sum_{j=-k2}^{k2} f(m-i, n-j) h(i, j) = \sum_{i=-k1}^{k1} h_x(i) \sum_{j=-k2}^{k2} h_y(j) f(m-i, n-j)$$

Pratiquement, le filtre séparable est obtenu comme suit :

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\alpha & b\alpha & c\alpha \\ a\beta & b\beta & c\beta \\ a\gamma & b\gamma & c\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}. \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\otimes$: produit tensoriel

4.2.5 Classification des filtres

La plupart des opérations que l'on peut réaliser sur une image utilisent la notion de filtre. Ils peuvent servir à corriger une image, à détecter des contours ou encore à améliorer la qualité visuelle de l'image. Dans le filtrage global, chaque pixel de la nouvelle image est calculé en prenant en compte la totalité des pixels de l'image de départ en utilisant des transformations du domaine spatial au domaine fréquentiel.

Dans le filtrage local, chaque pixel de la nouvelle image est calculé en prenant en compte seulement un voisinage du pixel correspondant dans l'image d'origine. Chaque filtre cherche à atténuer un type de défaut bien précis. Il n'y a pas de filtre universel capable de corriger tous les défauts, il faut choisir les bons filtres suivant les défauts que vous désirez corriger. Ces filtres peuvent être classés suivant leurs nature (linéaire - non linéaire) et leur fonction (lissage – différentiation)

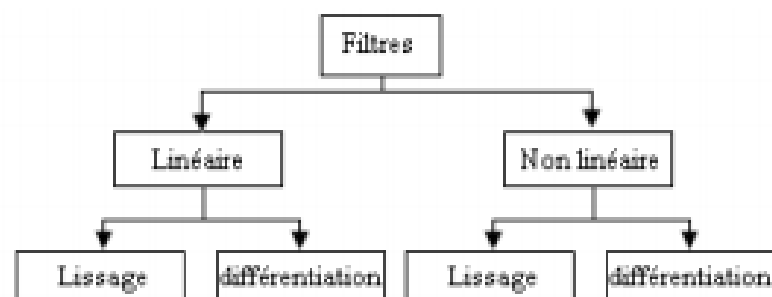


Figure 4.6. Classification des filtres

4.3 Filtres de Lissage

L'objectif du filtrage de lissage est de réduire les variations d'intensité au sein de chaque région de l'image tout en respectant l'intégrité des scènes : les transitions entre régions homogènes, les éléments significatifs de l'image doivent être préservés au mieux. Différentes méthodes de filtrage ont été développées suivant le type et l'intensité du bruit, ou les applications auxquelles on destine l'image. Les premières et les plus simples de ces méthodes sont basées sur le filtrage linéaire de lissage qui consiste à mélanger les niveaux de gris dans un voisinage, donc d'engendrer du flou sur l'image.

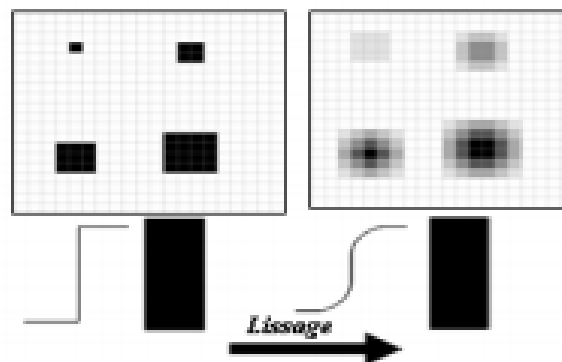


Figure 4.7. Lissage idéal / Lissage réel

Un masque de lissage doit obligatoirement avoir des coefficients non négatifs et leur somme doit être égale à 1. En générale, les coefficients d'un masque de lissage peuvent être donnés manuellement, ou par une fonction mathématique.

4.3.1 Filtres linéaires

Le filtre local est dit linéaire si la valeur du nouveau pixel est une combinaison linéaire des valeurs des pixels du voisinage. Cette combinaison linéaire est usuellement représentée par un masque.

Filtre moyennneur : $\frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$

$$\frac{1}{25} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Filtre moyennneur pondéré : $\frac{1}{16} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

- *Diffuse le bruit (atténuation).*
- *Perte des fortes transitions (élimine les hautes fréquences).*
- *Plus la taille du filtre est grand, plus le lissage sera important, et plus l'image filtrée perd les détails de l'image originale.*

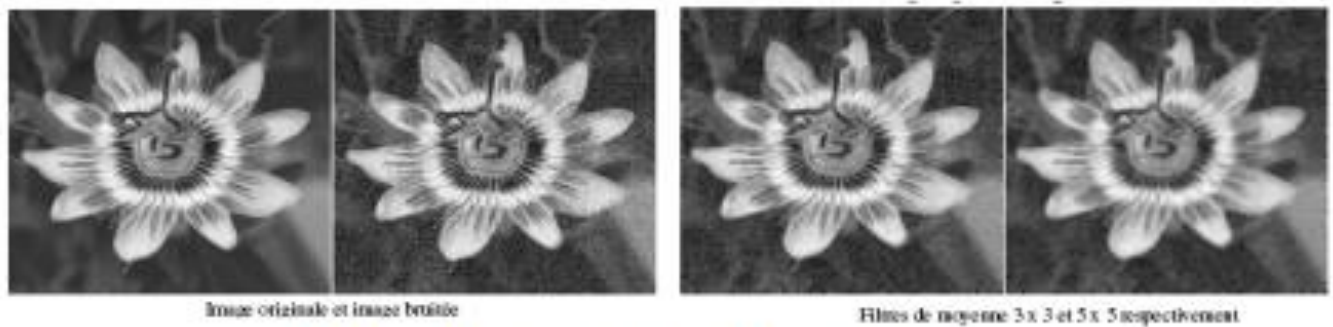


Figure 4.8. Effet de la taille du filtre moyennneur

Filtre gaussien : Le noyau gaussien centré et d'écart-type σ est défini par :

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\left(\frac{-(x^2+y^2)}{2\sigma^2}\right)}$$

Si par exemple $\sigma = 0,8$, on a le filtre 3x3 suivant :
environ

$\sigma = 1$ pour un filtre 5x5 donne

$$\begin{bmatrix} G(-1, -1) & G(0, -1) & G(1, -1) \\ G(-1, 0) & G(0, 0) & G(1, 0) \\ G(-1, 1) & G(0, 1) & G(1, 1) \end{bmatrix} \simeq \frac{1}{16} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{300} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 18 & 30 & 18 & 4 \\ 6 & 30 & 48 & 30 & 6 \\ 4 & 18 & 30 & 18 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

- *Accorde plus d'importance au pixel central*
- *Filtre séparable: Économie de calcul, exemple: filtre 5x5 nécessite 5x5 multiplications + 24 additions par pixel, alors un filtre séparé nécessite 5x2 multiplications + 4x2 additions par pixel.*
- *Atténuation du bruit*

L'effet de ce filtre sur l'image est assez similaire au filtre moyenne, mais la moyenne est pondérée en ce sens où les pixels près du centre ont un effet ou un "poids" plus important que ceux qui sont situés plus loin.

En général un filtre Gaussien avec un $\sigma < 1$ est utilisé pour réduire le bruit, et si $\sigma > 1$, le filtre sert à engendrer une image floue pour simuler la defocalisation. Il faut noter que plus le σ est grand, plus la cloche Gaussienne est large et plus le flou appliqué à l'image sera marqué.

Filtre binomial : Les coefficients de ce filtre sont obtenus par le binôme de Newton. Un filtre 1D binomial d'ordre 4 est un filtre donné par le vecteur

$v = \frac{1}{16} [1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1]$. Un filtre 2D binomial d'ordre 4 est le filtre

séparable donné par $v^T v$:

$$\frac{1}{256} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Les filtres de lissage linéaires montrent des limites dans deux aspects :

- *Le bruit impulsionnel*
- *Le respect des frontières.*

Ces limitations ont conduit au développement des filtres non linéaires.

4.3.2 Filtres non linéaires

Si le filtre ne peut pas être exprimé par une combinaison linéaire, il est appelé " non linéaire ". Les filtres non linéaires sont plus complexes à mettre en œuvre que les filtres linéaires. Cependant les résultats obtenus avec les filtres non linéaires sont très souvent de meilleure qualité que ceux obtenus par les filtres linéaires.

Filtre médian : Le filtre médian est utilisé pour atténuer des pixels isolés, d'une valeur très différente de leur entourage.

Principe : le filtrage médian procède tout d'abord par un tri des valeurs de niveau de gris du voisinage suivi d'une sélection de l'élément milieu du tri, c-à-d remplacer la valeur du pixel central par la valeur médiane de la répartition (luminances triées dans l'ordre croissant) des niveaux de gris des pixels situés à l'intérieur de cette fenêtre.

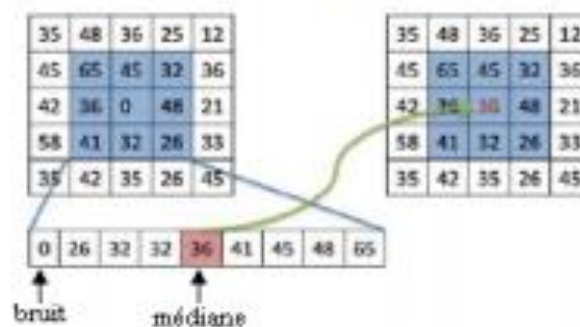


Figure 4.9. Principe du filtre median

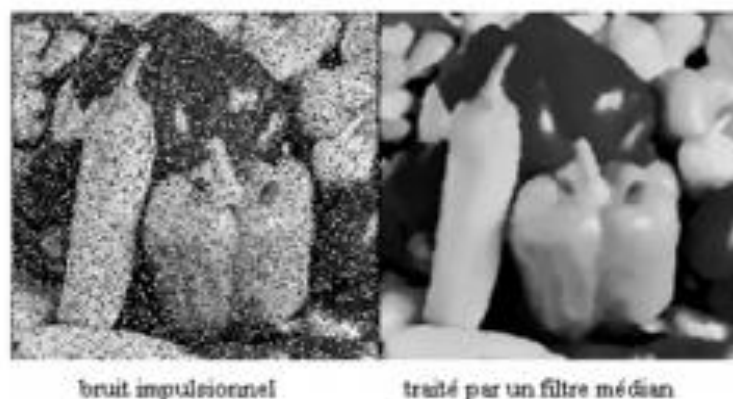


Figure 4.10. Exemple de filtrage par le filtre median

- *Très adapté au bruit type "poivre et sel" (faux "blanc" et "noir" dans l'image)*
- *Préserve les contours*
- *Réduit le bruit additif uniforme ou gaussien (lissage de l'image)*

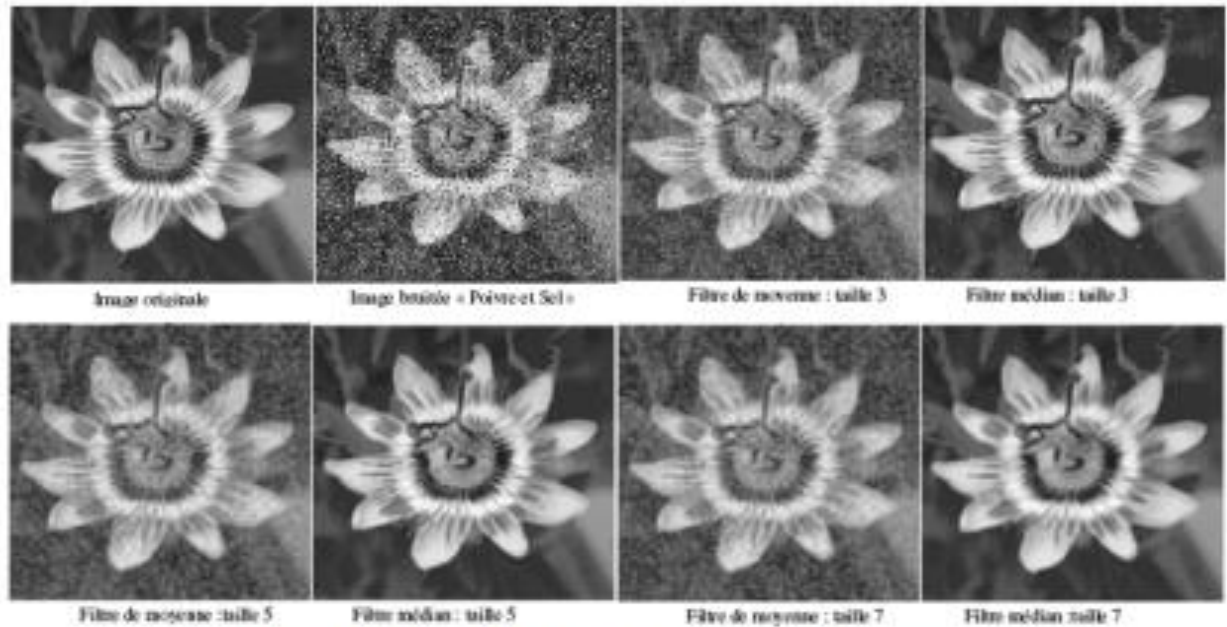


Figure 4.11. Comparaison filtres de moyenne et filtres médians

Filtre de Nagao : Le filtre de Nagao examine la fenêtre 5x5 centrée sur chaque pixel. 9 domaines sont définis dans cette fenêtre. On calcule pour chaque domaine D_i la moyenne μ_i et la variance $v_i = \sum_{k=1}^9 (\mu_i - x_k)^2$. Le résultat de l'opérateur est la moyenne du domaine qui présente la plus faible variance.

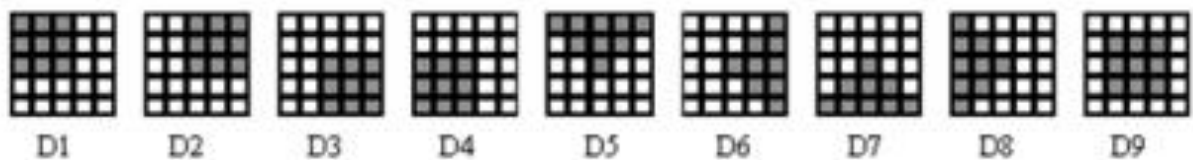


Figure 4.12. Les 9 fenêtres du filtre de Nagao

Propriétés :

- *complexité plus grande qu'un filtre linéaire,*
- *conserve la dynamique des luminances le long des contours,*
- *respecte mieux les angles des formes.*

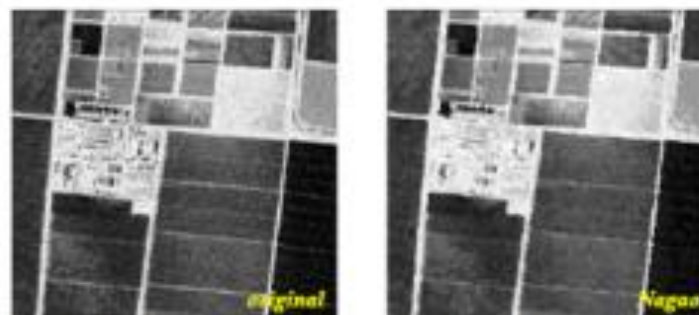


Figure 4.13. Exemple de filtrage par le filtre de NAGAO

4.4 Filtrage fréquentiel (spectral)

Dans le domaine spatial, le filtrage se fait par convolution, alors dans le domaine spectral (ou fréquentiel), il se fait par multiplication (ou masquage de l'image).

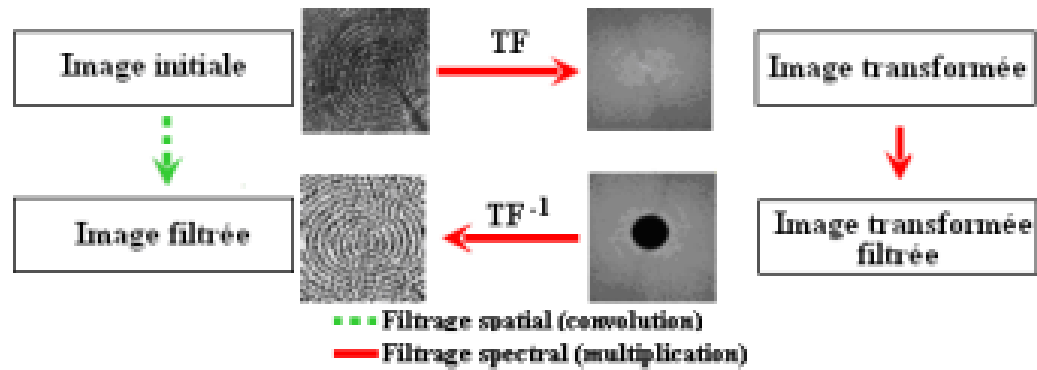


Figure 4.14. Filtrage spatial / fréquentiel

4.4.1 Représentation fréquentielle d'une image

La fréquence dans une image représente la variation de l'intensité des pixels de l'image, les basses fréquences (correspondent à des changements d'intensité lents) représentent les régions homogènes et floues, tandis que les hautes fréquences (correspondent à des changements d'intensité rapides) représentent les contours et les changements brusques d'intensité.

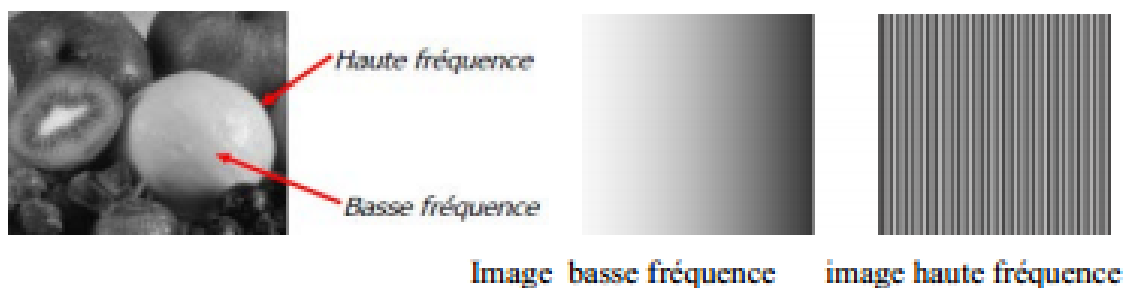


Figure 4.15. Contenu fréquentiel d'une image

4.4.2 Transformée de Fourier 2D

La transformée de Fourier permet la décomposition d'un signal image f en combinaison linéaire de sinusoides complexes, dont les coefficients $F[u, v]$ dit coefficients de Fourier, fournissent des informations sur les fréquences (u, v) et permettent des manipulations dans le domaine fréquentiel.

La transformée de Fourier de l'image $f(x, y)$, de largeur N et de hauteur M est donnée par :

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x, y) e^{-i2\pi(\frac{xu}{N} + \frac{yv}{M})}$$

La Transformée de Fourier se représente dans un espace fréquentiel bidimensionnel. Etant donné que la transformée est une grandeur complexe, sa représentation graphique se fait soit par le module et la phase, soit par la partie réelle et imaginaire de la transformée de Fourier.



Figure 4.16. Spectre d'amplitude et de phase d'une image

Les valeurs de l'amplitude en général présentent une très grande dynamique (les basses fréquences sont plus importantes que les hautes fréquences), le spectre d'amplitude représente le logarithme du module de la transformée de Fourier.



Figure 4.17. Visualisation du spectre d'image

La transformée inverse du domaine fréquentiel au domaine spatial est donnée par :

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} F(u, v) e^{i2\pi(\frac{ux}{N} + \frac{vy}{M})}$$

4.4.3 Interprétation de la Transformée 2D

- Hautes fréquences : loin du centre de la TF
- Basses fréquences : proche du centre de la TF
- Composante continue : centre de l'image (fréquence zéro = moyenne de l'image)

Exemples de Transformées de Fourier

1. image formée par un carré blanc
2. Image formée par une sinusoïde suivant la direction horizontale et verticale
3. Rotation d'une image formée de sinusoïdes dans la direction horizontale engendre une rotation de la TF (même angle).
4. L'image de gauche possède des lignes horizontales/verticales qu'on retrouve dans sa transformée, l'image de droite possède des lignes dans toutes les directions qu'on retrouve aussi dans sa transformée

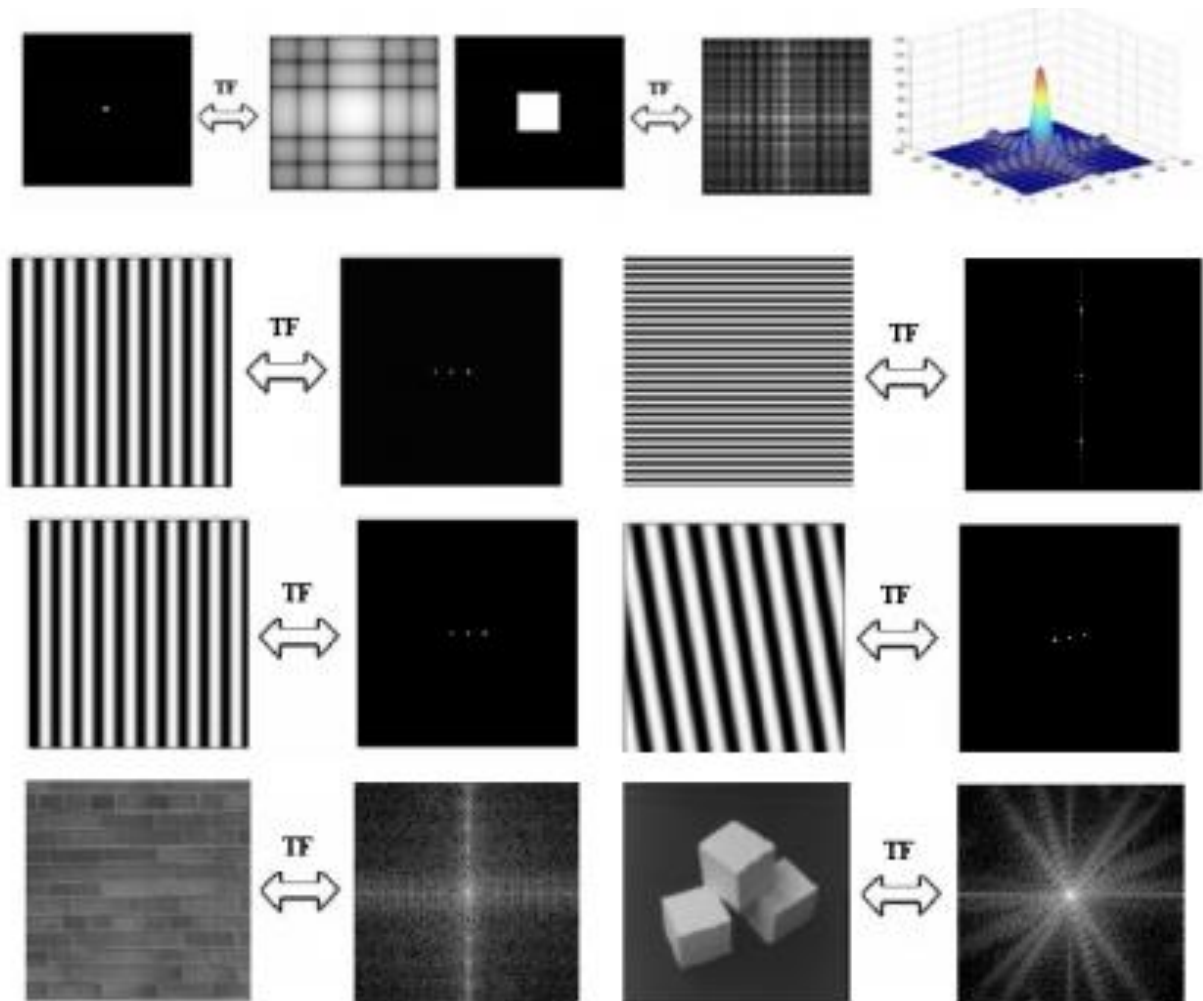


Figure 4.18. Exemples de Transformées de Fourier

Transformée de Fourier d'une convolution : La transformée de Fourier d'une convolution de deux signaux bidimensionnels est un produit des transformées de Fourier de ces deux signaux.

4.4.4 Classification de filtrage fréquentiel

Il est possible d'extraire la composante fréquentielle de l'image avec des filtres passe-haut, passe-bas ou passe bande. Un filtrage passe-haut laisse passer les hautes fréquences et atténue les basses fréquences (il a pour effet de faire apparaître les détails de l'image). Un filtrage passe-bas laisse passer les basses fréquences et atténue les hautes fréquences (il a pour effet de faire disparaître les détails de l'image).

Etant donné la propriété de linéarité de la transformée de Fourier, l'image peut être décomposée comme $IMG = BF + HF$.

a- Filtrage passe-bas

Le filtrage passe bas est la multiplication dans le domaine fréquentiel par une fonction porte dont la fonction de transfert est de la forme :

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{u^2 + v^2} \leq D0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec $D0$: La distance de coupure par rapport à l'origine.

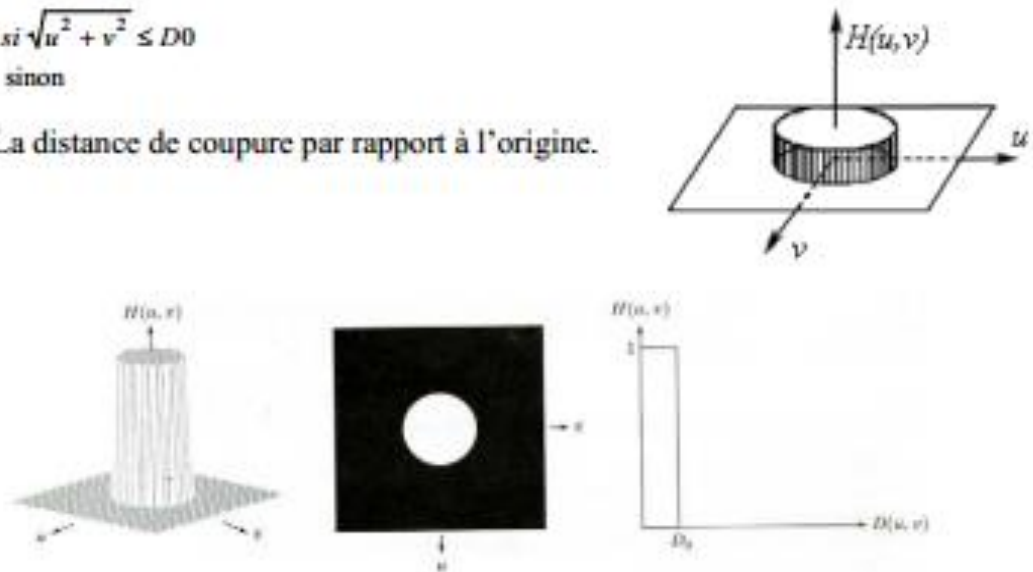


Figure 4.19. Représentation 3D du filtre idéal passe bas ; représentation 2D dans le plan (u, v) , et représentation 2D dans le plan (H, D) .



Figure 4.20. Image, son spectre et les trois images obtenues par des filtres passe bas de rayon 15,30 et 80

b- Filtres passe-haut

Le passage d'un filtre passe bas à un filtre passe haut s'obtient par la relation suivante :

$$H_{ph}(u, v) = 1 - H_{pb}(u, v)$$

Où $H_{ph}(u, v)$: Le filtre passe haut; $H_{pb}(u, v)$: Le filtre passe bas

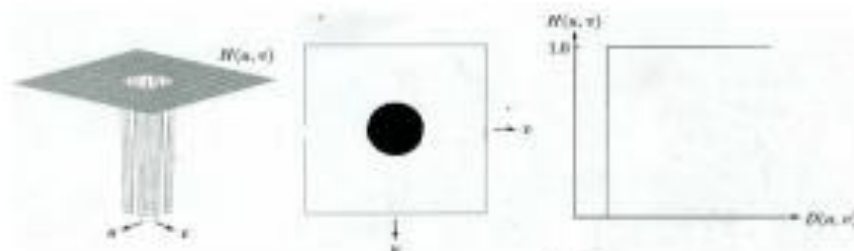


Figure 4.21. Représentation 3D du filtre idéal passe haut ; représentation 2D dans le plan (u, v) , et représentation 2D dans le plan (H, D) .

Le filtre passe-haut idéal est donné par :

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{u^2 + v^2} \geq D_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

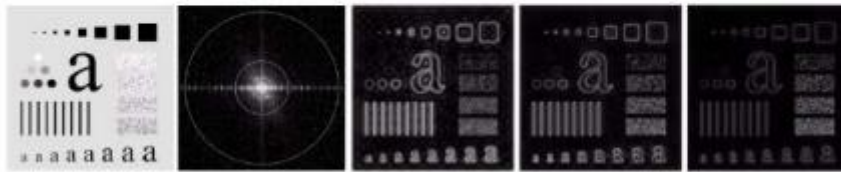
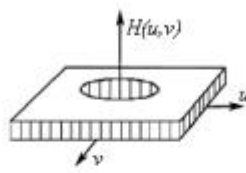


Figure 4.22. Image, son spectre et les trois images obtenues par des filtres passe haut de rayon 15,30 et 80