Université de M'sila

Faculté de Mathématiques et d'Informatique

Socle Commun

Analyse 2

Exercices résolus

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\int f(x)dx$$

Présenté par :

Dr. Dahmane BOUAFIA

Année Universitaire :2020-2022

Table des matières

Notation

Nous introduisons les notations et les définitions nécessaires qui sont utilisées par la suite.

$\mathcal{V}(x_0)$: voisinage de x_0.
$f = o(g)$. : f est négligeable devant g au voisinage de x_0.
$f \sim_{x_0} g$: f et g sont équivalentes au voisinage de x_0.
$f \in C^n(I, \mathbb{R})$: La fonction f de classe C^n sur I, $(n \in \mathbb{N})$.
$f'_d(x_0)$, $f'_g(x_0)$: La dérivée à droite et à gauche en point x_0 (respectivement).
f^{-1} : La fonction réciproque de f.
$D.L$: Développements limités.
$R_n(x)$: Le reste dans la formule de Taylor d'ordre n.
$P_n(x)$: Fonction polynôme d'ordre n.
arcsin : Fonction arcsinus.
arccos : Fonction arccosinus.
arctan : Fonction arctangente.
sh, ch et th : Fonctions sinus, cosinus et tangente hyperboliques(respectivement).
$argsh, argch$: Fonctions argument (sinus, cosinus) hyperboliques,(respectivement).
$argth$: Fonctions argument tangente hyperboliques.
$deg(P)$: dégré d'un polynôme P.
$\sigma = (x_k)_{0\leq k\leq n}$: Subdivision finie du segment $[a, b]$.
$\xi([a, b], \mathbb{R})$: L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs réelles.
$f \in B[a, b]$: Les fonctions f est bornée sur $[a, b]$.
$f \in R[a, b]$: Les fonctions f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.
$s_\sigma(f) \quad := \sum_{k=1}^{k=n} m_k \Delta x$ la somme de Darboux inférieure de f où $m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$.
$s_\sigma(f) \quad := \sum_{k=1}^{k=n} M_k \Delta x$ la somme de Darboux supérieure de f où $M_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$.
$R_{\sigma,t}(f) \quad := \sum_{k=1}^{k=n} (x_k - x_{k-1}) f(t_k)$ La somme de Riemann de f associée à σ où $t = (t_k)_{1\leq k\leq n}$ tels que $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$.
$\int_a^b f(x)dx := [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ l'intégrale limité de f où F est une primitive de f sur $[a, b]$.
$\int f(x)dx \ := F(x) + c$ l'intégrale illimité de f sur $[a, b]$ où F est une primitive de f et c est une constante quelconque.
(EDL) : Equation différentielle linéaire.
$(E.H)$: Equation différentielle homogène.
$PPCM(.,.)$: Le plus petit commun multiple.

Introduction

Cette polycopié est une tentative de donner un coup de main à nos étudiants, en résolvant en détail certains exercices d'Analyse 2 et dans tous les chapitres liés à la polycopié comme le développement limités, l'intégration de Riemann, le calcule de primitives et les équations différentielles ordinaires, qu'elles soient du premier ou second degré.
De plus, nous n'avons généralement pas résolu les exercices notés par une étoile $(\star)$ ou les exercices supplémentaires et avons laissé le soin au lecteur.
Ce travail, et comme tout travail humain, il n'est pas exempt d'erreurs et de manquements, nous vous demandons donc de nous conseiller et de corriger nos erreurs si possible.

Chapitre 1

Formules de Taylor et Développements Limités

Sommaire

Remarque 1.1. Les exercices notés par $(\star)$ ou supplémentaires ne sera pas corrigé dans cette polycopié, ils laisant au lecteur.

1.1 Série d'exercices N :1

Exercice 1.1. Donner un développement limité des fonctions suivantes à l'ordre n au voisinage de 0

1. $f(x) = e^x, \quad n = 3.$
2. $f(x) = \cos x, \quad n = 4.$
3. $f(x) = \sin x, \quad n = 5.(*)$
4. $f(x) = shx, \quad n = 5.$

Exercice 1.2. 1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Donner un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de fonction f définie par $f(x) = (1+x)^\alpha$.

2 En déduire le D.L à l'ordre 4 au voisinage de 0 des fonctions suivantes

a) $f(x) = \sqrt{1+x}.$

b) $f(x) = \sqrt[3]{1+x}.$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}.$

d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}.$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}.$

f) $f(x) = (1+x)^{\frac{2}{3}}.(*)$

Exercice 1.3. Soit la fonction f définie par, $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{7}{3}} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1 Étudier la continuité et la dérivabilité de f en point 0.

2 Étudier l'exixtence de dévellopememnt limité de f au voisinage de 0.

Exercice 1.4. Donner la formule de Taylor-Mac-Laurent des fonctions suivantes à l'ordre n au voisinage de 0

1. $f(x) = e^{2x}, \quad n = 3.$
2. $f(x) = \cos(4x), \quad n = 4.$
3. $f(x) = ch4x, \quad n = 4.(*)$
4. $f(x) = sh3x, \quad n = 5.$
5. $f(x) = \ln(2 - x^3), \quad n = 4.$
6. $f(x) = \sin(2 + x^2), \quad n = 3.(*)$

Exercice 1.5. Donner le D.L à d'ordre 3 en point $x_0 = 0$ des fonctions suivantes

1. $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}}.$
2. $f(x) = e^{\cos x}.$
3. $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}.$
4. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x + x^2}.$
5. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}.$
6. $f(x) = (1 + \sqrt{1 + x^2})^{\frac{1}{2}}.(*)$

Exercice 1.6. Donner un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 des fonctions suivantes

1. $f(x) = \sqrt{x}, \quad n = 3, \ x_0 = 1.$
2. $f(x) = e^{\sqrt{x}}, \quad n = 4, \ x_0 = 1.(*)$
3. $f(x) = \sin x, \quad n = 5, \ x_0 = \dfrac{\pi}{3}.$
4. $f(x) = \tan x, \quad n = 3, \ x_0 = \dfrac{\pi}{4}.(*)$

Exercice 1.7. Calculer les limites suivantes en utilisant soit les fonctions équivalente ou le D.L

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{3 + \cos x} - 2}{x^2}.$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 1) e^{\frac{1}{x^2}}.(*)$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(e^x - 1)\sin x}{1 - \cos x}.(*)$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$

Exercice 1.8.
1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au point 0 de $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + x + x^2}.$
2. Déduire les dérivées successives, $f(0), \ f'(0), \ f''(0)$ et $f^{(3)}(0).$

Exercice 1.9.
1. Calculer le développement limité à l'ordre 4 au point 0 de $f(x) = e^{\cos x}.$
2. En déduire $f(0), \ f'(0), \ f''(0)$ et $f^{(3)}(0).$

Exercice 1.10. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\sqrt[3]{1 - \dfrac{1}{x}}.$

1. Donner le D.L à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty.(*)$) de f.
2. Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique quand x tend vers $\pm\infty$.
3. Préciser sa position relative par rapport à cette asymptote.$(*)$

Exercice 1.11. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2}.$

1. Donner le D.L à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty.(*)$) de f.

2 Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique quand x tend vers $\pm\infty$.

3 Préciser sa position relative par rapport à cette asymptote.$(*)$

Exercice 1.12. **1** Donner le D.L la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3. Puis deduire le D.L de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ au $\mathcal{V}(0)$ à l'ordre 4.

2 D'après quqstion 1, deduire le D.L de la fonction $f(x) = \arctan(x)$, au $\mathcal{V}(0)$ à l'ordre 5.

Exercice supplémentaire 1.1. Étudier au voisinage de x_0, les fonctions f définies ci-dessous (tangente, position par rapport à la tangente)

1 $f(x) = \dfrac{e^{-x}-1}{x}$, $x_0 = 0$,

2 $f(x) = x + 2\sqrt{x} - \sqrt{3+x}$, $x_0 = 1$.

3 $f(x) = \dfrac{1}{x}\left(e^x - \dfrac{6}{6-x^3}\right)$, $x_0 = 0$, $(\star)$

1.2 Correction de série d'exercices N :1

Correction d'exercice 1.1. **1** Soit la fonction $f(x) = e^x$, on cherche le développement limité, (D.L) de f au voisinage de 0, i.e., $(\mathcal{V}(0))$ à l'ordre $n = 3$. On a, $\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(x) = e^x$. Donc, $f^{(0)}(0) = f^{(1)}(0) = f^{(2)}(0) = f^{(3)}(0) = 1$. Comme, $f(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$. Alors, on obtient

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3).$$

2 Le D.L de $f(x) = \cos x$, au $\mathcal{V}(0)$ à l'ordre $n = 4$.
On a $\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{\pi n}{2})$. Donc $f^{(0)}(0) = 1,\ f^{(1)}(0) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0,\ f^{(2)}(0) = \cos(\pi) = -1,\ f^{(3)}(0) = \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0,\ f^{(4)}(0) = \cos(2\pi) = 1$.
Comme, $f(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dfrac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + o(x^4)$. Alors, on trouve

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4).$$

3 Le D.L de $f(x) = \sin x$, au $\mathcal{V}(0)$ à l'ordre $n = 5$.
On a $\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{\pi n}{2})$. Donc, $f^{(0)}(0) = 0,\ f^{(1)}(0) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1,\ f^{(2)}(0) = \sin(\pi) = 0,\ f^{(3)}(0) = \sin(\frac{3\pi}{2}) = -1,\ f^{(4)}(0) = \sin(2\pi) = 0,\ f^{(5)}(0) = \sin(\frac{5\pi}{2}) = 1$.
Comme, $f(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dfrac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dfrac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + o(x^4)$. D'où,

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5).$$

4 Le D.L de $f(x) = shx$, au $\mathcal{V}(0)$ à l'ordre $n = 3$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(x) = \begin{cases} shx, & \text{si } n \text{ paire} \\ chx, & \text{si } n \text{ impaire.} \end{cases}$ Donc,
$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ paire} \\ 1, & \text{si } n \text{ impaire.} \end{cases}$ Alors, par substitution, on trouve,

$$shx = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5).$$

Correction d'exercice 1.2 (1). **1** Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Le D.L de $f(x) = (1+x)^\alpha$, au $\mathcal{V}(0)$ à l'ordre $n = 3$.

$$\begin{cases} f(0) = 1, \\ f^{(1)}(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \\ f^{(2)}(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \\ f^{(3)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1, \\ f^{(1)}(0) = \alpha, \\ f^{(2)}(0) = \alpha(\alpha-1), \\ f^{(3)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2). \end{cases}$$

Donc, par substitution dans la formule de Taylor et Mac-Laurant, on trouve,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o(x^3). \qquad (1.1)$$

2 a Dans le cas où $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ c'est à dire $\alpha = \frac{1}{2}$. Alors, d'après l'équation (1.1), on obtient

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3).$$

b Si $f(x) = f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ c'est à dire $\alpha = \frac{1}{3}$. Par conséquent, on trouve

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + o(x^3).$$

c Si $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$, $\alpha = -\frac{1}{3}$. Par substitution dans l'équation (1.1), on aura

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3).$$

d Dans le cas, où $f(x) = \frac{1}{1+x}$. On peut écrire f comme suit $f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$, c'est à dire $\alpha = -1$. Par l'équation (1.1), on a

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3). \qquad (1.2)$$

e Si $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = (1+t)^{-1}$. Tel que $t = -x$, et $\alpha = -1$. Alors
$\begin{cases} t \to 0, \\ si \\ x \to 0, \end{cases}$

Donc, par substitution, dans l'équation (1.2), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= (1+t)^{-1} = 1 - t + t^2 - t^3 + o(t^3) \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

f Reste comme exercice.

Correction d'exercice 1.3. 1 a Comme $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, alors f est continue en point 0.

b Par la définition de la dérivabilité, on trouve,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x^{\frac{4}{3}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Donc f est dérivable en point 0.

2 L a fonction f admet une dévellopement limité à l'ordre 2, car $f(x) = x^2\varepsilon(x)$ telle que $\varepsilon(x) = x^{\frac{1}{3}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x\to 0}\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

On remarque que $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^n}$, n'existe pas pour tout $n \geq 3$. Donc, f n'admet pas un D.L au voisinage de 0 d'ordre $n \geq 3$.

Correction d'exercice 1.4. On donnant la formule de Taylor-Mac-Laurent pour les fonctions suivantes à l'ordre n au voisinage de 0

1 Soit $f(x) = e^{2x}$, et $\quad n = 3$. Alors, la formule de Taylor-Mac-Laurent est $f(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$. Telles que

$$\begin{cases} f(0) = 1, \\ f^{(1)}(x) = 2e^{2x}, \\ f^{(2)}(x) = 4e^{2x}, \\ f^{(3)}(x) = 8e^{2x}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1, \\ f^{(1)}(0) = 2, \\ f^{(2)}(0) = 4, \\ f^{(3)}(0) = 8. \end{cases}$$

D'où le résultat $f(x) = e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \dfrac{4}{3}x^3 + o(x^3)$.

2 Si $f(x) = \cos(4x)$, et $\quad n = 4$. Alors, on a :

$$\begin{cases} f(0) = 1, \\ f^{(1)}(x) = -4\sin(4x), \\ f^{(2)}(x) = -16\cos(4x), \\ f^{(3)}(x) = 48\sin(4x), \\ f^{(4)}(x) = 64\cos(4x), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1, \\ f^{(1)}(0) = 0, \\ f^{(2)}(0) = -16, \\ f^{(3)}(0) = 0. \\ f^{(4)}(0) = 64. \end{cases}$$

Par conséquent, on obtient $f(x) = \cos(4x) = 1 - 8x^2 + \dfrac{32}{3}x^4 + o(x^4)$.

3 Laisse au lecteur

4 Dans le cas où $f(x) = sh3x, \quad n = 5$. Alors, on a

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ f^{(1)}(x) = 3ch(3x), \\ f^{(2)}(x) = 9sh(3x), \\ f^{(3)}(x) = 27ch(3x), \\ f^{(4)}(x) = 81sh(3x), \\ f^{(5)}(x) = 243ch(3x), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0, \\ f^{(1)}(0) = 3, \\ f^{(2)}(0) = 0, \\ f^{(3)}(0) = 27. \\ f^{(4)}(0) = 0. \\ f^{(5)}(0) = 243, \end{cases}$$

Donc, on trouve,

$$f(x) = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^3 + \frac{81}{40}x^3 + o(x^6).$$

5 Pour $f(x) = \ln(2 - x^3), \quad n = 4$. Nous avons donc que,

$f(x) = \ln(2 - x^3) = \ln 2 + \ln(1 - \frac{1}{2}x^3)$. Posons $t = \frac{1}{2}x^3$, donc, $\begin{cases} t \to 0, \\ si \\ x \to 0, \end{cases}$

Par la formule de Mac-Laurant de $\ln(1 - t)$ on trouve,

$$\begin{aligned} \ln(1 - t) &= -t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^3) \\ \Rightarrow \ln(2 - x^3) &= \ln(2) - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

6 Reste comme exercice

Correction d'exercice 1.5. Le D.L d'ordre 3 en point $x_0 = 0$ des fonctions suivantes

1 Soit la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}}$. Alors, f est multiplication de deux fonctions suivantes :

$g(x) = e^x$ et $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$. D'après, exercice 1.2, on a

$$\begin{aligned} g(x) = e^x &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) \\ h(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Par conséquent, on trouve,

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \times \frac{1}{\sqrt{1+x}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)\right) \\ &= 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{11}{48}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

2 Si $f(x) = \dfrac{1}{1 + x + x^2}$. Posons $t = x + x^2$, donc, $\begin{cases} t \to 0, \\ si \\ x \to 0, \end{cases}$

et comme $\dfrac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + o(t^3)$. Alors par substitution, on aura,

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{1+x+x^2} &= 1 - (x+x^2) + (x+x^2)^2 - (x+x^2)^3 + o(x^9) \\ &= 1 - x + x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

3 Dans le cas où $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$. On a $e^x = 1 + \dfrac{1}{1!}x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$. Donc,

$f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{1}{12}x^3 + o(x^3)}.$

Posons $t = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{1}{12}x^3 + o(x^3)$, par suite on a $\begin{cases} t \to 0, \\ si \\ x \to 0, \end{cases}$

Donc, on trouve,

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + o(t^3),$$

et

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)\right) + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)\right)^2 \\ &- \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)^3 + o(x^9)\right)\Big) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

4 Si $f(x) = e^{\cos x}$. Alors, f est composition de deux fonctions $g(x) = \cos x$ et $h(x) = e^x$ respectivements, et comme $\liminf\limits_{x\to 0} g(x) = 1 \neq 0$. Alors, il faut faire un changement de variable pour retour à zéro. Comme,

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4).$$

Donc, posons $t = -\dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{4!}x^4 + o(x^4)$, alors, $\begin{cases} t \to 0, \\ si \\ x \to 0, \end{cases}$

Par conséquent, on aura,

$$\begin{aligned} f(x) = e^{\cos x} &= e \times e^t \\ &= e \times \left(1 + \frac{1}{1!}t + \frac{1}{2!}t^2 + o(t^2)\right) \\ &= e + \frac{e}{1!}(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)) + \frac{e}{2!}(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4))^2 + o(x^3) \\ &= e - \frac{e}{2}x^2 + o(x^3). \end{aligned}$$

5 Pour $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$. On sait que,

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) \\ \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Donc, on a,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{4}x^4+o(x^4)}{x-\dfrac{1}{3!}x^3+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)} \\
&= \left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+o(x^3)\right)\times\frac{1}{1-\dfrac{1}{6}x^2+o(x^3)} \\
&= \left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+o(x^3)\right)\left(1-\frac{1}{6}x^2+o(x^3\right) \\
&= 1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3).
\end{aligned}$$

Car,

$$\frac{1}{1-\frac{1}{6}t^2}=1+\frac{1}{6}t^2+o(t^2).$$

6 Reste comme rxercice $(\star)$.

Remarque 1.2. Pour la fonction f qui définie par $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$. On peut utiliser la méthode de division suivant les puissances croissantes, comme suit,

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3) \\
\sin x &= x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{3}x^3+o(x^3).
\end{aligned}$$

Donc, $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}=\dfrac{1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{1}{4}x^3+o(x^3)}{1-\frac{1}{6}x^2+o(x^3)}$. Par conséquent, on a

$$\begin{array}{l|l}
x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3 & 1-\dfrac{1}{6}x^2 \\ \cline{2-2}
\underline{1-\frac{1}{6}x^2} & 1-\dfrac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3 \\
\quad -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^3 & \\
\quad \underline{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^3} & \\
\qquad \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3 & \\
\qquad \underline{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4} & \\
\qquad -\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{12}x^4 & \\
\qquad \underline{-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{18}x^5} & \\
\qquad \frac{1}{12}x^4-\frac{1}{18}x^5 &
\end{array}$$

D'où $f(x)=1-\dfrac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$.

Correction d'exercice 1.6. Le D.L de la fonction f à l'ordre n au $(V)(x_0)$, telles que

1 Si $f(x)=\sqrt{x},\ n=3,\ x_0=1.$

On faisons la changement $t=x-1$, donc, $\begin{cases} t\to 0, \\ si \\ x\to 1, \end{cases}$

Par conséquent, on trouve

$$\begin{aligned}\sqrt{x}=(1+t)^{\frac{1}{2}} &= 1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{16}t^3+o(t^3)\\ &= 1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}(x-1)^3+o((x-1)^3).\end{aligned}$$

2 Reste comme exercice

3 Pour $f(x)=\sin x,\quad n=5,\ x_0=\frac{\pi}{3}$.

On pose $t=x-\frac{\pi}{3}$, donc, $\begin{cases} t\to 0, \\ si \\ x\to\frac{\pi}{3},\end{cases}$

Par conséquent, et d'après les formules trigonométriques, on trouve

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin(\frac{\pi}{3}+t)\\ &= \frac{1}{2}\sin(t)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(t).\end{aligned}$$

Mais, $t\to 0$, (i.e., t au voisinage de 0). Alors, d'après la formule de Mac-Laurant, on a,

$$\begin{aligned}\sin t &= t-\frac{1}{3!}t^3+\frac{1}{5!}t^5+o(t^5),\\ \cos t &= 1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4+o(t^4).\end{aligned}$$

Par substitution, on trouve,

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{1}{2}\Big(t-\frac{1}{3!}t^3+\frac{1}{5!}t^5+o(t^5)\Big)+\frac{\sqrt{3}}{2}\Big(1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4+o(t^4))\Big)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}t-\frac{\sqrt{3}}{4}t^2-\frac{1}{12}t^3+\frac{\sqrt{3}}{48}t^4+\frac{1}{120}t^5+o(t^5)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-\frac{\pi}{3})^2-\frac{1}{12}(x-\frac{\pi}{3})^3+\frac{\sqrt{3}}{48}(x-\frac{\pi}{3})^4\\ &\quad +\frac{1}{120}(x-\frac{\pi}{3})^5+o((x-\frac{\pi}{3})^5)\end{aligned}$$

4 Reste comme exercice

Correction d'exercice 1.7. On utilisant le D.L pour on calcule les limites suivantes

1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2}=\frac{0}{0}$, Forme indéterminée

Au voisinage de zéro, on a, $\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^5)$. Donc, par ce qui précède, on a

$\sqrt{3+\cos x}=2\Big(1-\frac{x^2}{8}+\frac{1}{48}x^4+o(x^5)\Big)^{\frac{1}{2}}$. On pose $t=-\frac{x^2}{8}+\frac{1}{48}x^4+o(x^5)$,

donc, $\begin{cases} t \to 0, \\ si \\ x \to 0, \end{cases}$
et comme

$$\begin{aligned}
(1+t)^{\frac{1}{2}} &= 1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{16}t^3+o(t^3) \\
&= 1+\frac{1}{2}(-\frac{x^2}{8}+\frac{1}{48}x^4+o(x^5))-\frac{1}{8}(-\frac{x^2}{8}+\frac{1}{48}x^4+o(x^5))^2 \\
&\qquad +\frac{1}{16}(-\frac{x^2}{8}+\frac{1}{48}x^4+o(x^5))^3+o(x^{12}) \\
&= 1-\frac{1}{16}x^2-\frac{5}{1536}x^4++o(x^5).
\end{aligned}$$

Donc, on trouve

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{2\Big(1-\frac{1}{16}x^2-\frac{5}{1536}x^4+o(x^5)\Big)-2}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\Big(-\frac{1}{8}-\frac{5}{1536}x^2+o(x^3)\Big)=-\frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

2 Reste comme exercice

3 Reste aussi comme exercice

4 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\frac{0}{0}, \ (F.I).$

Au voisinage de zéro, on a, $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$. Donc, par conséquent on a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\Big(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x+o(x)\Big)=-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Correction d'exercice 1.8. **1**

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+t} &= 1-t+t^2-t^3+o(t^2) \qquad (1.3)\\
\cos x &= 1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3).
\end{aligned}$$

En mettant $t=x+x^2$, dans l'équation (1.3), on trouve donc, $t\to 0$ si $x\to 0$, et par substitution, on a aussi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+t} &= \frac{1}{1+x+x^2}=1-(x+x^2)+(x+x^2)^2-(x+x^2)^3+o(x^3) \\
&= 1-x-x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

Puis, on fait la multiplication en omettant les termes de degré strictement supèrieur à dégré 3. Alors,

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\cos x}{1+x+x^2} &= \cos x \times \frac{1}{1+x+x^2} \\ &= \Big(1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3)\Big) \times \Big(1 - x - x^3 + o(x^3)\Big) \\ &= 1 - x - \frac{1}{2}^2 + \frac{3}{2}x^3 + o(x^3). \end{aligned} \tag{1.4}$$

2 Maintenant, d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au $\mathcal{V}(0)$, on a

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + o(x^3).$$

Pat la comparaion les coefficients on peut conclure que

$$f(0) = 1,\ f'(0) = -1,\ f''(0) = -1,\ \text{et } f^{(3)}(0) = 9.$$

Car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, $f^{(n)}(0) = n! \times a_n$ tels que a_n sont les coefficients de polynôme dans 1.4.

Correction d'exercice 1.9. On utilise les développements limités en 0 pour la fonction e^x et $\cos x$. Lorsque x tend vers 0, comme $\cos x$ tend vers 1 donc il faut la ramener à 0. Alors, On a

1

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + o(x^2) \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons que

$$e^{\cos x} = e^{1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)} = e \times e^{-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)}.$$

Posons $t = -\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)$, donc, $t \to 0$ si $x \to 0$, et on trouve

$$\begin{aligned} e^t &= 1 + \frac{1}{1!}t + \frac{1}{2!}t^2 + o(t^2) \\ &= 1 + \frac{1}{1!}\Big(- \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)\Big) + \frac{1}{2!}\Big(- \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)\Big)^2 + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Puis, on obtient

$$f(x) = e^{\cos x} = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^4). \tag{1.5}$$

2 Maintenant on utilise la formule de Taylor-Young à l'ordre 4 au $\mathcal{V}(0)$,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + o(x^4).$$

En comparant les coefficients on peut conclure que

$$f(0) = e,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -e,\ f^{(3)}(0) = 0,\ \text{et } f^{(4)}(0) = 4e.$$

Car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, $f^{(n)}(0) = n! \times a_n$ tels que a_n sont les coefficients de polynôme dans 1.5.

Correction d'exercice 1.10. **1** **a** Au voisinage de $+\infty$. On a $f(x) = x\sqrt[3]{1 - \dfrac{1}{x}}$.

On pose $t = \frac{1}{x}$, donc, $\begin{cases} t \to 0, \\ si \\ x \to +\infty. \end{cases}$ Par le D.L de la fonction $\sqrt[3]{1-t}$ au $\mathcal{V}(0)$. On obtient, donc,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1-t} = (1-t)^{\frac{1}{3}} &= 1 - \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}t^2 + o(t^2) \\ &= 1 - \frac{1}{3x} - \frac{1}{9x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big) \end{aligned}$$

Par conséquent, on trouve,

$$\begin{aligned} f(x) &= x\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} \\ &= x\Big(1 - \frac{1}{3x} - \frac{1}{9x^2} + o(\frac{1}{x^2})\Big) \\ &= x - \frac{1}{3} - \frac{1}{9x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big) \end{aligned}$$

b La même méthode au $\mathcal{V}(-\infty)$, on trouve, donc $f(x) = x - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big)$.

2 En deduit, d'après qui ce précède que, $(\Delta)\ :\ y = x - \dfrac{1}{3}$ est un assymptôte oblique au $\mathcal{V}(+\infty)$. Car,

$$\lim_{x \to 0+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to 0+\infty} \Big(\frac{1}{9x} + o((\frac{1}{x}))\Big) = 0.$$

3 Au au $\mathcal{V}(+\infty)$. On a la signe de $(f(x) - x)$ est

$$\forall x \in]0 + \infty[:\ (f(x) - x) = \Big(\frac{1}{9x} + o((\frac{1}{x}))\Big) > 0.$$

Alors, la courbe de f est sur la droite assymptôte oblique (Δ).
De même manière, on a (C_f) la courbe de f est situé au-dessous de (D) : $y = x - \dfrac{1}{3}$, l'assymptôte oblique au $\mathcal{V}(-\infty)$.

Correction d'exercice 1.11. 1 a Au voisinage de $+\infty$. On a $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} = x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$. Pose $t = \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$, donc, $\begin{cases} t \to 0, \\ si \\ x \to +\infty, \end{cases}$

On utilisant le D.L de la fonction $\sqrt{1+t}$ au $\mathcal{V}(0)$. On obtient, donc,

$$\begin{aligned}\sqrt{1+t} &= 1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+o(t^2)\\ &= 1+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\Big)-\frac{1}{8}\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\Big)^2+o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\\ &= 1+\frac{1}{2x}-\frac{3}{8x^2}+o(\frac{1}{x^2})\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}f(x) &= x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\\ &= x\Big(1+\frac{1}{2x}-\frac{3}{8x^2}+o(\frac{1}{x^2})\Big)\\ &= x+\frac{1}{2}-\frac{3}{8x}+o\Big(\frac{1}{x}\Big)\end{aligned}$$

b La même méthode au $\mathcal{V}(-\infty)$. telle que on a $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} = -x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$. On pose $t = \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$, donc, $\begin{cases} t \to 0, \\ si \\ x \to +\infty, \end{cases}$

D'après le D.L de Mac-Laurant de la fonction $\sqrt{1+t}$, on trouve

$$\begin{aligned}\sqrt{1+t} &= 1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+o(t^2)\\ &= 1+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\Big)-\frac{1}{8}\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\Big)^2+o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\\ &= 1+\frac{1}{2x}-\frac{3}{8x^2}+o\Big((\frac{1}{x^2}\Big)\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons que

$$\begin{aligned}f(x) &= -x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\\ &= -x\Big(1+\frac{1}{2x}-\frac{3}{8x^2}+o(\frac{1}{x^2})\Big)\\ &= -x-\frac{1}{2}+\frac{3}{8x}+o\Big(\frac{1}{x}\Big)\end{aligned}$$

2 En deduit, d'après qui ce précède que, $(\Delta):\ y = x+\dfrac{1}{2}$ est un assymptôte oblique au $\mathcal{V}(+\infty)$. Car,

$$\lim_{x\to 0+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to 0+\infty}\Big(-\frac{3}{8x}+o((\frac{1}{x}))\Big).$$

3 Au au $\mathcal{V}(+\infty)$. On a la signe de $(f(x)-x)$ est

$$\forall x \in]0+\infty[: \ (f(x)-x) = \Big(-\frac{3}{8x} + o((\frac{1}{x}))\Big) < 0.$$

Alors, la courbe de f est sous la droite assymptôte oblique (Δ).
De même manière, on a $(D): \ y = -x - \frac{1}{2}$ l'assymptôte oblique au $\mathcal{V}(-\infty)$ est situé au-dessus la courbe de f.

Correction d'exercice 1.12. **1** a D'après la formule de Mac-Laurant, on a

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^3 + o(x^3). \tag{1.6}$$

b Si on pose $x = t^2$ dans l'équation (1.6), et comme $\begin{cases} t \to 0, \\ si \\ x \to +\infty. \end{cases}$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+t^2} &= 1 - t^2 + t^4 + t^6 + o(t^6) \\ \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + x^4 + o(x^4). \end{aligned} \tag{1.7}$$

2 D'après quastion 1, et par l'intégration de l'équation (1.7) terme à terme entre 0 et x on aura

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt &= \int_0^x \Big(1 - t^2 + t^4 + o(t^4)\Big) dt \\ &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^5 + o(x^5) = \arctan(x). \end{aligned}$$

Correction d'exercice supplémentaire 1.1. **1** On a

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

D'où

$$f(x) = -1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2).$$

La fonction f se prolonge par continuité en zéro par la valeur 1.
L'équation de la tangente à la courbe en 0 est donnée par le D.L. d'ordre 1 suivante

$$y = -1 + \frac{1}{2}x.$$

Alors, $f(x) - y = -\frac{1}{6}x^2 + o(x^2) \sim -\frac{1}{6}x^2$, et Lorsque x tend vers 0 la différence est négative et la courbe est en dessous de sa tangente.

2 Pour $f(x) = x + 2\sqrt{x} - \sqrt{3+x}$, $x_0 = 1$. Posons $t = x - 1$, donc $t \to 0$ quand $x \to 0$ et

$$\begin{aligned} f(x) = f(t+1) &= 1 + t + 2\sqrt{1+t} + 2\sqrt{1+\frac{t}{4}} \\ &= 1 + t + 2\Big(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)\Big) \\ &- 2\Big(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{128} + o(t^2)\Big) \\ &= 1 + \frac{7t}{4} - \frac{15t^2}{64} o(t^2). \end{aligned}$$

Donc,

$$f(x) = 1 + \frac{7}{4}(x-1) - \frac{15}{64}(x-1)^2 + o((x-1)^2).$$

La courbe admet comme tangente la droite d'équation

$$y = 1 + \frac{7}{4}(x-1) = -\frac{3}{4} + +\frac{7}{4}x.$$

Alors,

$$f(x) - y = -\frac{15}{64}(x-1)^2 + o((x-1)^2) \sim -\frac{15}{64}(x-1)^2.$$

La position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de 0, est donnée par le signe de $-\frac{15}{64}(x-1)^2$. Donc, la courbe est au-dessous de sa tangente au voisinage du point de coordonnées $(1,1)$.

3 Reste comme exercice.

Chapitre 2

Intégrale de Riemann et calcul de primitives

Sommaire

2.1 Série d'exercices N :2

Exercice 2.1. En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales suivantes

1. $\int\limits_0^1 x dx.$ 2. $\int\limits_0^1 x^2 dx.$ 3. $\int\limits_0^1 x^3 dx.(*)$ 4. $\int\limits_0^1 e^x dx.(*)$

On rappelle que : $\sum\limits_{k=1}^{k=n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $\sum\limits_{k=1}^{k=n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum\limits_{k=1}^{k=n} k^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 2.2. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \sin x$.

1. En utilisant la somme de Darboux, montrer que f est intégrable sur I.
2. Même quastion pour $f : x \mapsto x^2$ et $I = [0, 1]$.

Exercice 2.3. Calculer les limites, lorsque $n \to +\infty$ des suites (définies pour $n \in \mathbb{N}^*$).

1. $\sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{n+k}$.
2. $\sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{n+k}{n^2+k^2}.(*)$
3. $\sum\limits_{k=1}^{k=n} \dfrac{k}{n^2} \sin\left(\dfrac{\pi k}{n}\right)$.
4. $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{\sqrt{n+k}}$.
5. $\dfrac{1}{n^{p+1}}(1^p+2^p+\ldots+n^p).(*)$

Exercice 2.4. Soit f une fontions définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Est ce que f est intégrable ?. Justifier votre réponse.

Exercice 2.5. Soit $I_n = \int\limits_0^1 x^n e^{-x} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$

1. Calculer I_0
2. Calculer I_n en fonction de I_{n-1} pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Application : Calculer $J = \int\limits_0^1 (3x^3 - 2x^2 + x + 1)e^{-x} dx.$
4. Recalculer cette intégrale en charchant directement une primitive de $f(x) = (3x^3 - 2x^2 + x + 1)e^{-x}$ sous la forme $F(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{-x}$, où a, b, c et d sont quatre réels à déterminer.

Exercice 2.6. En utilisant changement de variable approprié, calculer les intégrales suivantes

1. $\int \sin^2 x \cos x dx.$
2. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{3 - x^2}}.$
3. $\int \dfrac{1}{\sin^4 x} dx.$ $(*)$
4. $\int \dfrac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$
5. $\int \dfrac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx.$
6. $\int \dfrac{dx}{4 + 3x^2}.$
7. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx.$ $(*)$
8. $\int x^2 \sqrt{x - 1} dx.$
9. $\int \dfrac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x^3}} dx.$
10. $\int 3x^2 (1 + x^3)^3 dx.$
11. $\int \dfrac{x}{\sqrt{5 - x^2}} dx.$

Exercice 2.7. Calculer les les intégrales suivantes

1. $\int\limits_{-1}^{2} [x] dx.(*)$
2. $\int\limits_{-3}^{4} |x^2 - 3x + 2| dx.$

Exercice 2.8. Calculer les les intégrales suivantes

1. $\int \cos x \ln(1 + \cos x) dx.$
2. $\int x \arctan x dx.$
3. $\int \arcsin x dx.$
4. $\int (\ln x)^2 dx.(*)$

Exercice 2.9. Calculer les primitives

1. $\int \cos^2 x dx.$
2. $\int \dfrac{x}{1 + x^3} dx.$
3. $\int \dfrac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{x - 3} dx.$
4. $\int \dfrac{3x + 3}{(x^2 - 2x + 1)} dx$
5. $\int \dfrac{x + 3}{x^2 - x - 2} dx.$
6. $\int \dfrac{3}{(x - 2)(x^2 - 4x)} dx.($
7. $\int \dfrac{3x + 3}{(x^2 - 2x + 1)} dx.(*)$
8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 + x + x^2}}.$
9. $\int \dfrac{1}{e^x + 1} dx.$

Exercice supplémentaire 2.1. Calculer les intégrales suivantes en effectuant le changement de variables recommandé

1. $I_1 = \int\limits_0^{\pi} \dfrac{dx}{2 + \cos x},$ poser $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right).$
2. $I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin^3 x \cos x}{1 + \cos^2 x} dx,$ poser $u = \sin x.$

3. $I_3 = \int_0^1 e^{2x}\ln(1+e^x)dx$, poser $u = e^x$.

4. $I_4 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x}$, poser $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

5. $I_5 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$, poser $\sqrt{1+x} = u$.

6. $I_6 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$, poser $x = \sin t$.

7. $I_7 = \int \frac{1}{1+\cos x}dx$, poser $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.(*)

Exercice supplémentaire 2.2. Soit f une fonction Riemann-intégrable sur l'intervalle fermé $[a,b]$ tel que

$$\forall \in [a,b] : f(a+b-x) = f(x).$$

1. Montrer que $\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

2. En déduit la valeur de l'intégrale $\int_0^\pi x\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

2.2 Correction de série d'exercices N :2

Correction d'exercice 2.1. On remarque que si la fonction f est Riemann intégrable sur intervalle $[a,b]$ alors, on a

$$\begin{cases} \int_0^1 f(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty} R_n(f) \\ \vee \\ \int_0^1 f(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f) \end{cases} \quad \text{telles que} \begin{cases} R_n(f) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum\limits_{i=1}^{i=n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right) \\ \vee \\ S_n(f) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum\limits_{i=0}^{i=n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right) \end{cases}$$

1. Si $f(x) = x$. On définit la subdivision régulière $(\sigma)_i : \quad x_i = \frac{1}{n}i, \quad i \in \{0,1,...,n\}$, donc, on a $\Delta x = \frac{\pi}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Comme la fonction $x \mapsto x$ est continue, alors elle est Riemann intégrable sur $[0,1]$ et

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1-0}{n}\sum_{i=0}^{i=n} f\left(0+\frac{1-0}{n}i\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i=n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{i=n} i \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. Pour $f(x) = x^2$. On a f est continue et croissante sur $[0,1]$ donc, elle est Riemann intégrable, et d'après l'indication précédant, on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1-0}{n}\sum_{i=0}^{i=n} f\Big(0+\frac{1-0}{n}i\Big)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i=n} f\Big(\frac{i^2}{n^2}\Big) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{i=n} i^2\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{3n^3} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

3 Reste comme exercice.

4 Soit $f(x) = e^x$ et $I = [0, 1]$. Il est clair que f est Riemann intégrable. Donc, on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i=n} f\Big(\frac{1}{n}i\Big)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i=n} e^{\frac{i}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\times\frac{(1-e)}{1-e^{\frac{1}{n}}}\\ &= (e-1)\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1} = (e-1).\end{aligned}$$

Car, $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{e^t-1}{t}$, ici $t = \dfrac{1}{n} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Correction d'exercice 2.2. **1** Soit la fonction $f(x) = \sin x$. Alors, on définit la subdivision régulière $(\sigma)_i$ telle que
$(\sigma)_i \ : \ x_i = \dfrac{\pi}{2n}i, \quad i \in \{0, 1, ..., n\}$, donc, $\Delta x = \dfrac{\pi}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et pour tout $i \in \{1, ..., n\}$,

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{i=0}^{i=n} M_i\Delta x, \text{ tel que } M_i = \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)\\ s_n &= \sum_{i=0}^{i=n} m_i\Delta x, \text{ tel que } m_i = \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x).\end{aligned}$$

Comme la fonction $\sin$ est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on obtient donc,

$$\begin{aligned}M_i &= \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) = \sin x_i = \sin\frac{\pi}{2n}i\\ m_i &= \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) = \sin x_{i-1} = \frac{\pi}{2n}(i-1).\end{aligned}$$

Par conséquent, on trouve

$$\begin{aligned}S_n - s_n &= \sum_{i=0}^{i=n}\frac{\pi}{2n}(\sin\frac{\pi}{2n}i - \sin\frac{\pi}{2n}(i-1))\\ &= \frac{\pi}{2n}(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0) = \frac{\pi}{2n}.\end{aligned}$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n - s_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\pi}{2n} = 0$. C'est à dire la fonction f est intégrable sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

2 Si $(x) = x^2$ et $I = [0,1]$. Alors, on a $(\sigma)_i\ :\ \ x_i = \dfrac{1}{n}i,\ \ i \in \{0,1,...,n\}$, et, $\Delta x = \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et pour tout $i \in \{1,...,n\}$, on aura

$$M_i = \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} x^2 = \frac{1}{n^2}i^2, \quad m_i = \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} x^2 = \frac{1}{n^2}(i-1)^2.$$

Par suite

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{i=n} M_i\Delta x = \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \\ s_n &= \sum_{i=0}^{i=n} m_i\Delta x = \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{i=n}(i-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}. \end{aligned}$$

Puis, par conséquent, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}(S_n - s_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+4n+2n}{6n^3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3n} = 0.$$

Correction d'exercice 2.3. Cet exercice est basé sur la relation entre la somme de Riemann et l'intégrale d'une fonction f continue sur le domaine $[a,b]$, telles que

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=k}^{k=n} f\Big(a+\frac{b-a}{n}i\Big) \vee \int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{k=n} f\Big(a+\frac{b-a}{n}i\Big)$$

1 Posons $S_1 = \sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{1}{n+k}$. Donc, $S_1 = \sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{1}{n+k} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{1}{1+\frac{k}{n}}$. On prend, $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ sur l'intervalle $I = [0,1]$. Par conséquent, on a

$$S_1 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \Big[\ln(x+1)\Big]_0^1 = \ln 2.$$

2 Reste comme exercice

3 Pour $S_3 = \sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{k}{n^2}\sin\left(\dfrac{\pi k}{n}\right) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{k}{n}\sin\left(\dfrac{\pi k}{n}\right)$. Ici, $f(x) = x\sin\pi x$ sur l'intervalle $I = [0,1]$. Donc,

$$S_3 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{k}{n}\sin\left(\frac{\pi k}{n}\right) = \int_0^1 x\sin\pi x dx.$$

En utilisant intégration par parties, on trouve, donc,

$$\begin{cases} u(x) = x, \\ v'(x) = \sin\pi x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1, \\ v(x) = -\dfrac{1}{\pi}\cos\pi x, \end{cases}$$

et $S_3 = \int\limits_0^1 x\sin\pi x dx = [-\frac{1}{\pi}x\cos\pi x]_0^1 + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \cos\pi x dx = 1 + [\sin\pi x]_0^1 = 1.$

4 Si $S_4 = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{k=n}\frac{1}{\sqrt{n+k}} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$. On prend $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ sur l'intervalle $I = [0,1]$. Alors, on aura, $S_4 = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}dx = [2\sqrt{1+x}]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2.$

5 $S_5 = \frac{1}{n^{p+1}}(1^p + 2^p + ... + n^p) = \frac{1}{n}\Big((\frac{1}{n})^p + (\frac{2}{n})^p + ... + (\frac{n}{n})^p\Big) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n}(\frac{1}{n})^p$. Donc, $f(x) = x^p$ et $I = [0,1]$. Par suite, $S_5 = \int\limits_0^1 x^p dx = \Big[\frac{1}{p+1}x^{p+1}\Big]_0^1 = \frac{1}{p+1}.$

Correction d'exercice 2.4. On définit la subdivision régulière $(\sigma)_i$ telle que $(\sigma)_i :\ x_i = \frac{1}{n}i,\quad i \in \{0, 1, ..., n\}$, par suite $\Delta x = \frac{1}{n}$. Alors pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, on a

$$\begin{aligned} M_i &= \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) = 1 \\ m_i &= \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) = 0. \end{aligned}$$

Car, entre deux nombres rationnels, il y a une infinité de nombresrationnels et non rationnels. Donc,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{i=n} M_i\Delta x = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i=n} 1 = 1. \\ s_n &= \sum_{i=0}^{i=n} m_i\Delta x = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i=n} 0 = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, on trouve,

$$\lim_{n\to+\infty}(S_n - s_n) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1.$$

C'est à dire la fonction f n'est pas intégrable sur $[0,1]$.

Remarque 2.1. Malgré que la fonction f est bornée, elle n'est pas intégrable. Cela montre que ce n'est pas Toute fonction bornée est intégrable.

Correction d'exercice 2.5. **1** $I_0 = \int\limits_0^1 e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} + 1.$

2 En utilisant intégration par parties, posons, donc,

$$\begin{cases} u(x) = x^n, \\ v'(x) = e^{-x}, \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = nx^{n-1}, \\ v(x) = -e^{-x}, \end{cases}$$

$I_n = \int\limits_0^1 x^n e^{-x} dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int\limits_0^1 u'(x)v(x)dx$. Par conséquent, on trouve

$$\begin{aligned} I_n &= \int\limits_0^1 x^n e^{-x} dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int\limits_0^1 u'(x)v(x)dx \\ &= [-x^n e^{-x}]_0^1 + n\int\limits_0^1 x^{n-1}e^{-x}dx \\ &= -e^{-1} + nI_{n-1}. \end{aligned}$$

3 **Application :** $J = \int\limits_0^1 (3x^3 - 2x^2 + x + 1)e^{-x}dx$. Alors, on a

$$\begin{aligned} J &= 3I_3 - 2I_2 + I_1 + I_0 \\ &= 3(-e^{-1} + I_3) - 2I_2 + I_1 + I_0 \\ &= -4e^{-1} + 7I_2 = -11e^{-1} + 14I_1 \\ &= -41e^{-1} + 14. \end{aligned}$$

4 Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $F'(x) = f(x)$, c'est à dire,
$F'(x) = \Big(-ax^3 + (3a-b)x^2 + (2b-c)x - d\Big)e^{-x} = f(x)$.
Par la comparaison les coefficients, on obtient

$$\begin{cases} -a = 3, \\ (3a-b) = -2, \\ (2b-c) = 1, \\ -d = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3, \\ b = 3a+2 = -7, \\ c = 2b-1 = -15, \\ d = -1. \end{cases}$$

D'où, $F(x) = \Big(-3x^3 - 7x^2 - 15x - 1\Big)e^{-x}$. Donc, on conclut que

$$J = \int\limits_0^1 f(x) = [F(x)]_0^1 = [(-3x^3 - 7x^2 - 15x - 1)e^{-x}]_0^1 = -26e^{-1} + 1.$$

Correction d'exercice 2.6. Par changement de variable, on trouve,

1 $I_1 = \int \sin^2 x \cos x dx$. Posons $t = \sin x$ par suite, $dt = \cos x dx$. Alors,

$$I_1 = \int \sin^2 x \cos x dx = I_1 = \int t^2 x dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

2 $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}}$. Posons $t = \frac{x}{\sqrt{3}}$ Puis, $dt = \frac{1}{\sqrt{3}}dx$.
Donc, on trouve

$$I_2 = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(t) + C = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

3 Reste comme exercice

4 $I_4 = \int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$. On faisant le changement, $t = \cos x$ ça donne, $dt = -\sin x dx$. Donc,

$$I_4 = -\int \frac{dt}{1+t^2} = -\arctan(t) + C = -\arctan(\cos) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

5 $I_5 = \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$. On faisant le changement, $t = e^x$ ça donne, $dt = e^x dx$. Alors, on obtient, $I_5 = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin\Big(e^x\Big) + C,\ C \in \mathbb{R}$.

6 $I_6 = \int \frac{dx}{4+3x^{2x}} = \int \frac{dx}{4+3x^{2x}}$. On faisant le changement, $t = e^x$ ça donne, $dt = e^x dx$. Alors, on obtient, $I_5 = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin\Big(e^x\Big) + C,\ C \in \mathbb{R}$..

7 Laisser au lecteur

8 $I_8 = \int x^2\sqrt{x-1}dx$. posons $t^2 = (x-1)$, donc, $t = (x-1)^{\frac{1}{2}}$, et $dx = 2tdt$. Puis, on aura

$$\begin{aligned} I_8 &= 2\int t^2(t^2-1)dt = 2\int t^4 dt - 2\int t^2 dt \\ &= \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + C = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C,\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

9 $I_9 = \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}} dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{3}{4}}} dx$. On a $PGCD(2,4) = 4$, donc, on choisit $t^4 = x$ par conséquent $t = \sqrt[4]{x}$ et $dx = 4t^{3.}$ Alors, on obtient,

$$\begin{aligned} I_9 &= 4\frac{t^5}{1+t^3}dt = 4\int \Big[t^2 - \frac{t^2}{1+t^3}\Big]dt \\ &= \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}\int \frac{3t^2}{1+t^3}dt \\ &= \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}\ln(1+t^3) + C \\ &= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}\ln(1+x^{\frac{3}{4}}) + C. \end{aligned}$$

Car, $\frac{x^5}{1+x^3} = x^2 - \frac{x^2}{1+x^3}$, (voir en face la division Euclidien).

$$\begin{array}{r|l} x^5 & x^3+1 \\ \cline{2-2} -x^5 - x^2 & x^2 \\ \cline{1-1} -x^2 & \end{array}$$

10 $I_{10} + \int 3x^2(1+x^3)^3 dx$. Par le changement $t = 1+x^3$, on a $dt = 3x^2dx$, et par conséquent, on trouve

$$\begin{aligned} I_{10} &= \int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + C \\ &= \frac{1}{4}(1+x^3)^4 + C. \end{aligned}$$

11

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int \frac{x}{\sqrt{5-x^2}}dx = -\int \frac{-2x}{2\sqrt{5-x^2}}dx \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{5-x^2} + C. \end{aligned}$$

Correction d'exercice 2.7. **1** Si x dans l'intervalle $[-1, 2]$, on a

$$[x] = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

Donc, l'intégrale de I est donner par

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{2} [x]dx = -\int_{-1}^{0} dx + \int_{0}^{1} 0dx + \int_{1}^{2} dx + \int_{2}^{2} 2dx \\ &= -[x]_{-1}^{0} + [c]_0^1 + [x]_1^2 + 2[x]_2^2 = -1 + 0 + 1 + 0 = 0. \end{aligned}$$

2 $J = \int_{-3}^{4} |x^2 - 3x + 2|dx$. On étudie le signe du polynôme $p(x) = x^2 - 3x + 2$ sur l'intervalle $[-3, 4]$. Alors, on a
la discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 1 > 0$. Donc, $p(x)$ admet deux racines x_1 et x_2 tels que

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 1, \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 2.$$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$p(x)$		+	0	-	0	+	

Donc,

$$\begin{aligned} J &= \int_{-3}^{4} |x^2 - 3x + 2|dx \\ &= \int_{-3}^{1} (x^2 - 3x + 2)dx - \int_{1}^{2} (x^2 - 3x + 2)dx + \int_{2}^{4} (x^2 - 3x + 2)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{-3}^{1} - \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{1}^{2} + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{2}^{4} = -\frac{68}{3} \end{aligned}$$

Correction d'exercice 2.8. On Calcule les les intégrales suivantes

1. $I_1 = \int \cos x \ln(1+\cos x)dx$. En utilisant l'intégration par parties. Posons, donc,

$$\begin{cases} u(x) = \ln(1+\cos x), \\ v'(x) = \cos x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{-\sin x}{1+\cos x}, \\ v(x) = \sin x, \end{cases}$$

De puis

$$\begin{aligned} I_1 &= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx \\ &= \sin x \ln(1+\cos x) + \int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} \\ &= \sin x \ln(1+\cos x) + \int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \sin x \ln(1+\cos x) + \int (1-\cos x)dx \\ &= \sin x \ln(1+\cos x) + x - \sin x + C,\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$I_2 = \int \arcsin x dx$. On intègre aussi par parties. Posons, donc,

$$\begin{cases} u(x) = \arcsin x, \\ v'(x) = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}, \\ v(x) = x, \end{cases}$$

Depuis

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{1}{1-x^2}dx \\ &= x \arcsin x - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + C,\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Reste comme exercice

Correction d'exercice 2.9. On calcule les intégrales indéfinis (les primitives).

1. Pour l'intégrale $I_1 = \int \cos^2 x dx$. On a $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$. Donc, on obtient,

$$\begin{aligned} I_1 = \int \cos^2 x dx &= \frac{1}{2}\int (\cos 2x + 1)dx \\ &= \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C,\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Si $I_2 = \int \frac{x}{1+x^3}dx$. En développement la fraction rationnelle $\frac{x}{1+x^3}$,

$$\frac{x}{1+x^3} = \frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1} \tag{2.1}$$

Donc, par une comparaison, on trouve,
$(x+1)\times$ (2.2) implique que $a = -\frac{1}{3}$. Puis, posons $x = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{3}$ et pour $x = 1$ on trouve $b = \frac{5}{6}$. Par intégration on aura

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{x}{1+x^3} = \int \frac{-1}{3(x+1)}dx + \int \frac{5x+2}{6(x^2-x+1)}dx \\
&= \frac{-1}{3}\ln(x+1) + \frac{5}{12}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx \\
&= \frac{-1}{3}\ln(x+1) + \frac{5}{12}\ln(x^2-x+1) + \frac{3\sqrt{3}}{8}\int \frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}dx \\
&= \frac{-1}{3}\ln(x+1) + \frac{2}{3}\ln(x^2-x+1) + \frac{3\sqrt{3}}{8}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C.
\end{aligned}
$$

3 $I_3 = \int \dfrac{x^3-3x^2+x+1}{x-3}dx$. Par la division Euclidien, on obtient,

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-3x^2+x+1 & x-3 \\ \cline{2-2}
-x^3+3x^2 & x^2+1 \\ \cline{1-1}
x+1 & \\
-x+3 & \\ \cline{1-1}
4 &
\end{array}
$$

$$\frac{x^3-3x^2+x+1}{x-3} = x^2+1+\tfrac{4}{x-3}.$$

Donc, on a

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int x^2dx + 1 + \int \frac{4}{x-3}dx \\
&= \frac{1}{3}x^3 + x + 4\ln|x-3| + C.
\end{aligned}
$$

4 Pour $I_4 = \int \dfrac{3x+3}{(x^2-2x+1)}dx$. En développement la fraction rationnelle $\dfrac{3x+3}{(x^2-2x+1)^2}$, alors, on obtient

$$\frac{3x+3}{(x^2-2x+1)} = \frac{x}{(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} \tag{2.2}$$

Donc, apès la comparison, on trouve, $a = -\dfrac{2}{3}$, $\ b = \dfrac{5}{3}$. D'où,

$$
\begin{aligned}
I_4 &= -\frac{2}{3}\int \frac{a}{x+1}dx + 1 + \frac{5}{3}\int \frac{b}{x-2}dx \\
&= -\frac{2}{3}\ln|x+1| + \frac{5}{3}\ln|x-2| + C.
\end{aligned}
$$

5 $I_5 = \int \dfrac{x+3}{x^2-x-2}dx.(*)$

6 ON calcule $I_6 = \int \dfrac{3}{(x-2)(x^2-4x)}dx$. Par décomposition la fraction $\dfrac{x+3}{x^2-x-2}$ au éléments simples, on aura

$$\frac{3}{(x-2)(x^2-4x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-4}.$$

et puis, par comparaison les deux membres, on trouve $a = \frac{3}{8}$, $b = -\frac{3}{4}$ et $c = \frac{3}{8}$. C'est à dire

$$\frac{3}{(x-2)(x^2-4x)} = \frac{3}{8x} - \frac{3}{4(x-2)} + \frac{3}{8(x-4)}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} I_6 &= \int \frac{3}{8x}dx - \int \frac{3}{4(x-2)}dx + \int \frac{3}{8(x-4)}dx \\ &= \frac{3}{8}\ln|x| - \frac{3}{4}\ln|x-2| + \frac{3}{8}\ln|x-4| + C. \end{aligned}$$

7 Comme $I_7 = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{3}{4}+(\frac{1}{2}+x)^2}} = \int \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{1+(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2}}$.

Alors, on pose, $u = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \Rightarrow du = \frac{2}{\sqrt{3}}dx$. Donc,

$$I_7 = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1+u^2}}du = \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

8 Si $I_8 = \int \frac{1}{e^x+1}dx$. on pose $t = e^x$ donc, on a $x = \ln t$ et $dt = e^x dx$ c'est à dire $dt = tdx$. Depuis on obtient

$$\begin{aligned} I_8 &= \int \frac{1}{e^x+1}dx = \int \frac{1}{t(t+1)}dt \\ &= \int \frac{1}{t}dt - \int \frac{1}{t+1}dt \\ &= \ln(t) - \ln(t+1) + C = x - \ln(e^x+1) + C. \end{aligned}$$

Correction d'exercice supplémentaire 2.1 **1** $I_1 = \int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$.

Posons $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on a donc, $x = 2\arctan(t)$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ et $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Par suite,

$$\begin{cases} x = 0, \\ ou, \\ x = \pi, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0, \\ ou, \\ t = 1, \end{cases}$$

et

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \int_0^1 \frac{2dt}{t^2+3} = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dt}{1+(\frac{t}{\sqrt{3}})^2}.$$

En faisant le changement $u = \dfrac{t}{\sqrt{3}}$ donc, $du = \frac{dt}{\sqrt{3}}$, et on trouve,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dt}{1+(\frac{t}{\sqrt{3}})^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{du}{1+u^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\Big[\arctan u\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

2 $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin^3 x \cos x}{1+\cos^2 x} dx.$ Posons $u = \sin x$, s'implique que $du = \cos x dx$, et $\begin{cases} x = 0, \\ ou, \\ x = \dfrac{\pi}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 0, \\ ou, \\ u = 1. \end{cases}$ Donc, par substitution, on obtient

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x \cos x}{1+\cos^2 x} dx = \int_0^1 \frac{u^3}{1+u^2} du \\ &= \int_0^1 u du - \int_0^1 \frac{u}{1+u^2} du = \frac{1}{2}\Big[u^2\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\Big[\ln(1+u^2)\Big]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2. \end{aligned}$$

3 $I_3 = \int_0^1 e^{2x}\ln(1+e^x)dx.$ En faisant le changement $u = e^x$, donc, $du = e^x dx$, et $\begin{cases} x = 0, \\ ou, \\ x = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 1, \\ ou, \\ u = e. \end{cases}$ Par conséquent, on trouve

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1 e^{2x}\ln(1+e^x)dx = \int_0^1 (u^2+u)du \\ &= \frac{1}{3}\Big[u^3\Big]_1^e + \frac{1}{2}\Big[u^2\Big]_1^e = \frac{e^3}{3} + \frac{e}{2} - \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

4 Pour $I_4 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \dfrac{dx}{\sin x}$, on pose $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Alors, $x = 2\arctan(u)$, $dx = \dfrac{2}{1+u^2}du$,
$\sin x = \dfrac{2u}{1+u^2}$, depuis $\begin{cases} x = 0, \\ ou, \\ x = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 1, \\ ou, \\ u = e. \end{cases}$ Par conséquent, on trouve

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{u} du \\ &= \Big[\ln u\Big]_1^{\sqrt{3}} = \ln\sqrt{3}. \end{aligned}$$

5 Si $I_5 = \int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$, on pose $u = \sqrt{1+x}$. Donc, on aura $x = u^2 - 1$, $dx =$

$2udu$ et $\begin{cases} x=0, \\ ou, \\ x=\frac{1}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=1, \\ ou, \\ u=\sqrt{\frac{3}{2}}. \end{cases}$ Alors, d'après substitution on a,

$$\begin{aligned} I_5 &= \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = -2\int\limits_1^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \frac{1}{1-u^2}du \\ &= -2\Big[thu\Big]_1^{\sqrt{\frac{3}{2}}} = -2\Big(th\sqrt{\frac{3}{2}} - th1\Big). \end{aligned}$$

6 On calcule l'intégrale $I_6 = \int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx,$ donc en faisant le changement suivant $x = \sin t$. Alors, on obtient $dx = \cos tdt$ et si $x = 0 \ \vee \ x = 1$ on a $t = 0 \ \vee \ t = \frac{\pi}{2}$. Donc,

$$\begin{aligned} I_6 &= \int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} cos^2tdt \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_1^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2t - 1)dt = \frac{1}{4}\Big[\sin 2t\Big]_1^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\Big[t\Big]_1^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

7 I_7 reste comme exercice.

Correction d'exercice supplémentaire 2.2 **1** En faisant le changement $t = a+b-x$ donc, $dt = -dx$ et, $\begin{cases} x=a, \\ t=b, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=b, \\ t=a, \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_a^b xf(x)dx &= \int_b^a (a+b-t)f(a+b-t)dt = \int_a^b (a+b-t)f(t)dt \\ &= \int_a^b (a+b)f(t)dt - \int_a^b tf(t)dt \\ &= (a+b)\int_a^b f(x)dx - \int_a^b xf(x)dx \end{aligned}$$

Donc, on a, $2\int_a^b xf(x)dx = (a+b)\int_a^b f(x)dx$. D'où le résultat $\int\limits_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int\limits_a^b f(x)dx$.

2 Premièrement, on remarque que $f(\pi - x) = f(x)$ telle que $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$. Donc, posons, $u = \cos x$ donc, $du = -\sin xdx$ et on aussi

$$\begin{cases} x=0, \\ x=\pi, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=1, \\ u=-1, \end{cases}$$

Alors $\int\limits_0^{\pi} x\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_1^{-1}\frac{-1}{1+u^2}du = \frac{\pi}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{1+u^2}du = \frac{\pi}{2}\Big[\arctan u\Big]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}.$

Chapitre 3

Équations différentielles

Sommaire

3.1 Série d'exercices N :3

Exercice 3.1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + x\ln(x) = 0.$
2. $y' + 2y = x^2.$
3. $y' + y = 2\sin x.$
4. $y' - y = (x+1)e^x.$
5. $y' + y = 3x - e^x, \quad (*).$

Exercice 3.2. Résoudre l'équation différentielle de Bernoulli suivante

1. $xy' + y = x^2y^2.$
2. $-y' + \dfrac{2}{x}y^2 = e^x y, \quad (*).$

Exercice 3.3. Vérifier que $y1$ est une solution particulière de l'équation de Riccatti indiquer. Puis résoudre cette équation , dans toutes les cas suivante

1. $y' - 2xy + y^2 = 2 - x^2$, ($y_1 = x + 1$ est une solution particulière).
2. $x^2y' + xy + x^2y = 1$, ($y_1 = \dfrac{1}{x}$ est une solution particulière), $\quad (*).$

Exercice 3.4. Résoudre les équations différentielles suivantes sur des intervalles appropriés

1. $xy' - y = 2x^2, \quad y(1) = 5.$
2. $xy' + y = e^x, \quad y(1) = 2.$
3. $y' + y\tan x = \cos^2 x, \quad y(0) = -1.$
4. $(x+1)y' + y = \ln x, \quad y(1) = 10.$

Exercice 3.5. Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $y'' - 3y' + 2y = 0.$
2. $y'' - 5y' + 6y = 0.$
3. $y'' - y' = 0.$
4. $y'' - 2y' + 5y = 0.$
5. $y'' - 6y' + 9y = 0.$
6. $y'' + 4y' + 4y = 0. \quad (*)$
7. $y'' + 4y' + 13y = 0. \quad (*)$

Exercice 3.6. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1

- (a) $y'' - 3y' + 2y = 4x^2$.
- (b) $y'' + 2y' + y = 4xe^x$.
- (c) $y'' + y' - 2y = \sin x$.
- (d) $y'' = shx$.
- (e) $y'' + y = x + e^{-3x}$. $(\star)$
- (f) $y'' - 3y' + 2y = shx - 2xchx$. $(\star)$
- (g) $y'' - 2y = ch2x$.

2 Dans les équations (a) et (c), donner la solution qui satisfait les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.
Indication : pour l'équation (a), chercher la solution particulière sous la forme $y_0(x) = ax^2 + bx + c, \ a \neq 0$.

Exercice supplémentaire 3.1. Donner l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes

1 $y' - 4y = 3, \quad (x \in \mathbb{R}).(\star)$

2 $y' - y\tan x = \sin x, \ \left(x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right).(\star)$

3 $y' = \frac{y}{x} + x, \quad (x \in \mathbb{R}_+^*)$.

4 $(x^2+1)y' + xy = 0, \quad (x \in \mathbb{R})$.

Exercice supplémentaire 3.2. Résoudre les équations différentielles à variables séparées suivantes

1 $\sqrt{1-x^2}y' - y = 0$

2 $y' = y(y-1)\cos x$

3 $y' - xy^2 = x \ (\star)$

4 $y' = \dfrac{x+1}{y^2}$

5 $y' = e^{x+y}, \ (\star)$.

3.2 Correction de série d'exercices N :3

Correction d'exercice 3.1 **1** (E_1) : $y' + x\ln(x) = 0$, (E_1) est une équation différentielle linéaire (EDL) d'ordre 1 et définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $y' = \dfrac{dy}{dx}$, Alors, on a

$$\begin{aligned}(E_1) &\Leftrightarrow dy = -x\ln(x)dx \\ &\Leftrightarrow \int dy = -\int x\ln(x)dx, \quad (\bar{E}_1).\end{aligned}$$

On intègre $(\bar{E}_1)$ par parties, posons donc,

$$\left\{\begin{array}{l} u'(x) = x, \\ v(x) = \ln x, \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u(x) = \dfrac{1}{2}x^2, \\ v'(x) = \dfrac{1}{x}. \end{array}\right.$$

Par conséquent, on trouve

$$\begin{aligned}(\bar{E_1}) \quad &\Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x^2\ln(x) + \frac{1}{2}\int x dx \\ &\Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x^2\ln(x) + \frac{1}{2}x^2 + C,\ C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2 $(E_2):\ y' + 2y = x^2$, (E_2) est (EDL) d'ordre 1 et définie sur $\mathbb{R}$.

a Premierment, on resoudre l'équation homogène $(EH):\ y' + 2y = 0$. Par suite, on a

$$\begin{aligned}(EH) \quad &\Leftrightarrow \quad dy = -2ydx \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -2dx,\ (y \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -2\int dx \Leftrightarrow |y| = -2x + C \\ &\Leftrightarrow \quad y = Ke^{-2x},\ (k = \pm e^C \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

b On cherche une solution particulière y_p. Posons donc, $y_p = ax^2 + bx + c$. Alors, $y_p' = 2ax + b$. Par substitution dans (E_2), on obtient

$$2ax^2 + 2(a+b)x + 2c = x^2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2a = 1, \\ 2(a+b) = 0, \\ b + 2c = 0, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \frac{1}{2}, \\ b = -a = -\frac{1}{2}, \\ c = -\frac{1}{2}b = \frac{1}{4}. \end{array}\right.$$

D'où le résultat $y_p = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$. On sait que la solution générale de (E_2) est écrire sur la forme $y_G = y_H + y_p$. Alors, on trouve

$$y_G = Ke^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}.$$

3 $(E_3):\ y' + y = 2\sin x$. (E_3) est (EDL) d'ordre 1 et définie sur $\mathbb{R}$.

a **Solution homogène** y_H : $(EH):\ y' + y = 0$. Donc, on a

$$\begin{aligned}(EH) \quad &\Leftrightarrow \quad dy = -ydx \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -dx,\ (y \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int dx \Leftrightarrow |y| = -x + C \\ &\Leftrightarrow \quad y = Ke^{-x},\ (k = \pm e^C \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

b **Solution particulière** y_p : On cherche une solution particulière y_p, sous la forme, $y_p = \lambda\sin x + \mu\cos x,\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors, $y_p' = \lambda\cos x - \mu\sin x$. Par substitution dans (E_3), on aura

$$(\lambda + \mu)\sin x + (\lambda + -\mu)\cos x = 2\sin x \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (\lambda + \mu) = 2, \\ (\lambda - \mu) = 0, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = 1, \\ \mu = 1. \end{array}\right.$$

C'est à dire $y_p = \sin x + \cos x$. La solution générale de (E_3) est donner par

$$y_G = y_H + y_p \Rightarrow y_G = Ke^{-x} + \sin x + \cos x.$$

4 $(E_4): \ y' - y = (x+1)e^x$. (E_4) est (EDL) d'ordre 1 et définie sur $\mathbb{R}$.

a **Solution homogène** y_H : $(EH): \ y' - y = 0$. D'près ce qui précède, on a

$$(EH) \Leftrightarrow\Leftrightarrow y = Ke^x, \ (k \in \mathbb{R}).$$

b **Solution particulière** y_p : On utilisant la méthode de variation de la constante, c'est à dire on cherche une solution particulière y_p, sous la forme, $y_p = k(x)e^x$, telle que k est une fonction à déterminer. Donc, $y_p' = (k'(x) + k(x))e^x$. Par substitution dans (E_4), on aura.

$$y_p' - y_p' = (x+1)e^x \Rightarrow k'(x) = x + 1 \Rightarrow k(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

D'où $y_p = \left(\frac{1}{2}x^2 + x + C\right)e^x$. La solution générale de (E_4) est donner par

$$y_G = y_H + y_p \Rightarrow y_G = \left(\frac{1}{2}x^2 + x + m\right)e^x e^x, \text{ où } m = C + k \in \mathbb{R}.$$

5 $(E_5): \ y' + y = 3x - e^x$. L'équation (E_5) est définie sur $\mathbb{R}$.

a **Solution homogène** y_H : $(EH): \ y' + y = 0$. Par un calcule similaire à celle dans en dessous, on trouve

$$(EH) \Leftrightarrow y = Ke^{-x}, \ k \in \mathbb{R}.$$

b **Solution particulière** y_p : Dans ce cas la, $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$, telles que y_{p_1} sous la forme, $y_p = ax + b$, et y_{p_2} sous la forme $y_p = ae^x$.
Pour y_{p_1}, on a $y_p' = a$. Par substitution dans (E_5), on aura.

$$y_{p_1}' + y_{p_1}' = 3x \Rightarrow ax + a + b = 3x \Rightarrow \begin{cases} a = 3, \\ b = -a = -3, \end{cases}$$

D'où $y_{p_1} = 3x - 3$.
Pour y_{p_2} on a $y_{p_2}' = ae^x$, alors, nous avons

$$y_{p_2}' + y_{p_2}' = -e^x \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Donc, $y_{p_2} = -\frac{1}{2}e^x$. D'où la solution particulière, $y_p = 3x - 3 - \frac{1}{2}e^x$.
Par conséquent la solution générale de (E_5) est donner par

$$y_G = Ke^{-x} + 3x - 3 - \frac{1}{2}e^x, \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

Correction d'exercice 3.2 **1** $(EBr): \ xy' + y = x^2y^2$. On remarque que $y = 0$ est une solution de (EBr). Si $y \neq 0$. On dévise l'équation de Bernoulli (EBr) par y^2 tel que $(y \neq 0)$, et puis par x, $(y \neq 0)$. On trouve, donc

$$(EBr) \Rightarrow xy'y^{-2} + y^{-1} = x^2 \Rightarrow y'y^{-2} + \frac{1}{x}y^{-1} = x.\overline{(EBr)}$$

Posons $z = y^{-1}$ alors, $z' = -y'y^{-2}$. Par la substitution dans l'équation $\overline{(EBr)}$ on a

$$-z' + \frac{1}{x}z = x. \tag{3.1}$$

On remarque que (3.1) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

a **Solution homogène** z_H : (EH) : $-z' + \frac{1}{x}z = 0$. on a, donc

$$(EH) \Leftrightarrow -z' + \frac{1}{x}z = 0 \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|z| = \ln|cx|, \ (c \in \mathbb{R}_+^*).$$

Donc, $z = \pm c|x| \Rightarrow z = k|x|, \ k \in \mathbb{R}^*$. sa donner, $y_H = \dfrac{1}{k|x|}$.

b **Solution particulière** z_p : On utilisant la méthode de variation de la constante, c'est à dire on cherche une solution particulière z_p, sous la forme, $z_p = k(x)|x|$, telle que k est une fonction à déterminer. Donc, on distinger deux cas :

1^{ier} **cas :** Si $x > 0$ on a $z_p = k(x)x$ et $z_p' = k'(x)x + k(x)$. Par suite

$$-z_p' + \frac{1}{x}z_p = x \Rightarrow k'(x) = -1 \Rightarrow k(x) = -x + \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R},$$

c'est à dire $z_p = k(x)x = x(-x+\alpha) \Rightarrow z_p = -x^2 + \alpha x$.

1^{ier} **cas :** Si $x < 0$ on a $z_p = -k(x)x$. de même, on trouve $z_p = -x^2 + \alpha x$.

Donc, on résulte que $y_p = \dfrac{1}{z_p} = \dfrac{1}{-x^2 + \alpha x}$, tel que $x \neq 0$. Par conséquent La solution générale de (EBr) est donner par

$$y_G = y_H + y_p \Rightarrow y_G = \frac{1}{k|x|} + \frac{1}{-x^2 + \alpha x}, \ \text{où } k, \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

2 a (EBr) : $-y' + \frac{2}{x}y^2 = y\cos x \Leftrightarrow y'y^{-2} + y^{-1}\cos x = \frac{2}{x}y^2, \overline{(EBr)}$, tel que $(y \neq 0)$. On faisant le changement $z = y^{-1}$ alors, $z' = -y'y^{-2}$. Par la substitution dans l'équation $\overline{(EBr)}$, on a

$$z' + z\cos x = \frac{2}{x}. \tag{3.2}$$

L'équation (3.1) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

i. **Solution homogène** z_H : (EH) : $z' + z\cos x = 0$. On a, donc

$$(EH) \Leftrightarrow z' = -z\cos x \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = -\int \cos x dx \Rightarrow \ln|z| = -\sin x + c, \ (c \in \mathbb{R}).$$

Donc, $|z| = e^c e^{-\sin x} \Rightarrow z = ke^{-\sin x}, \ k = \pm e^c \in \mathbb{R}^*$. Sa donner, $y_H = \dfrac{1}{ke^{-\sin x}}$.

ii. **Solution particulière** z_p : On utilisant la méthode de variation de la constante, c'est à dire on cherche une solution particulière z_p, sous la forme, $z_p = k(x)e^{-\sin x}$, telle que k est une fonction à déterminer. Donc, on a $z_p' = k'(x)e^{-\sin x} - k(x)\cos x e^{-\sin x}$. Par suite

$$z_p' + z_p = \frac{2}{x}e^{\sin x} \Rightarrow k(x) = (\int \frac{2}{x}e^{\sin x} + c),\ c \in \mathbb{R},$$

c'est à dire $z_p = e^{-\sin x}(\int \frac{2}{x}e^{\sin x} + c)$. Donc, $y_p = \frac{1}{z_p} = \frac{1}{e^{-\sin x}(\int \frac{2}{x}e^{\sin x} + c)}$. Par conséquent La solution générale de (EBr) est donner par

$$y_G = y_H + y_p \Rightarrow y_G = \frac{1}{ke^{-\sin x}} + \frac{1}{e^{-\sin x}(\int \frac{2}{x}e^{\sin x} + c)},\ \text{où}\ \ k \in \mathbb{R}^*.$$

Correction d'exercice 3.3 **1** On resoudre l'équation (ER) : $y' - 2xy + y^2 = 2 - x^2$. Comme $y_1 = x + 1$ est une solution particulière). On pose donc, $y = y_1 + \frac{1}{z}$. Alors, on trouve $y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$, par substitution dans (ER), on obtient

$$(ER) \Leftrightarrow 1 - \frac{z'}{z^2} - 2x(x + 1 + \frac{1}{z}) + (x + 1 + \frac{1}{z})^2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow -z' + 2z = -1,\ \overline{(ER)}.$$

L'équation differentielle $\overline{(ER)}$ est linéaire.

(a) **La solution homogène** z_H : (EH) : $-z' + 2z = 0$. On a, donc

$$(EH) \Leftrightarrow -z' + 2z = 0 \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = 2\int dx \Rightarrow \ln|z| = 2x + c,\ (c \in \mathbb{R}).$$

Donc, $z = ke^{2x},\ k = \pm e^c \in \mathbb{R}^*$. Sa donner, $y_H = x + 1 + \frac{1}{k}e^{-2x}$.

(b) **La solution particulière** z_p : On remarque que $z_p = -\frac{1}{2}$ est une solution particulière de $\overline{(ER)}$. Par conséquent, nous avons $z = z_H + z_p$ c'est à dire $z = -\frac{1}{2} + ke^{2x}$. Comme $y_G = y_1 + \frac{1}{z}$. D'où le resultat

$$y_G = x + 1 + \frac{1}{-\frac{1}{2} + ke^{2x}},\quad k \in \mathbb{R}^*,$$

tel que $x \neq -\frac{1}{2}\ln 2k$ si $k > 0$.

2 (ER) : $x^2y' + xy + x^2y = 1$. Il est claire que $y_1 = \frac{1}{x}$ est une solution particulière de (ER). Alors, pour résoudre (ER) généralement en faisant le changement,

$y = y_1 + \dfrac{1}{z}$, $(z \neq 0)$. Alors, on trouve $y' = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{z'}{z^2}$, par substitution dans (ER), on aura

$$(ER) \Leftrightarrow x^2(-\frac{1}{x^2}-\frac{z'}{z^2})'+x(\frac{1}{x}+\frac{1}{z})+x^2(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}) = 1 \Leftrightarrow -x^2z'+(x^2-1)z^2+xz = 0,\ \overline{(ER)}.$$

L'équation differentielle $\overline{(ER)}$ est de Bernoulli. Donc, on dévise $\overline{(ER)}$ par z^2, et posons $t = z^{-1}$. Alors, on obtient

$$\overline{(ER)} \Leftrightarrow x^2z'z^{-2} - xz^{^{-1}} = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2t' + xt = -x^2 - 1$$

(a) **La solution homogène** t_H : (EH) : $x^2t' + xt = 0$. On a, donc

$$(EH) \Leftrightarrow x^2t'+xt = 0 \Rightarrow \int \frac{dt}{t} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|t| = -\ln|cx| = \ln\frac{1}{|cx|},\ (c \in \mathbb{R}_+^*).$$

Donc, $t_H = \dfrac{k}{|x|}$, $k = \pm\dfrac{1}{c} \in \mathbb{R}^*$.

(b) **La solution particulière** t_p : On pose $t_p = \dfrac{k(x)}{|x|}$, et on distinger 2 cas :

1^{ier} **cas :** Si $x > 0$ on a $t_p = \dfrac{k(x)}{x}$ et $z_p' = \dfrac{k'(x)x - k(x)}{x^2}$. Par suite

$$x^2t_p'+xt_p = -x^2-1 \Leftrightarrow k'(x) = -x-\frac{1}{x} \Leftrightarrow k(x) = -\frac{1}{2}x^2-\ln x+\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, nous avons que $t_p = \dfrac{k}{x} = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{x}\ln x + \dfrac{1}{x}\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

1^{ier} **cas :** Si $x < 0$, on obtient la même résultat, c'est à dire

$$t_p = \frac{k}{x} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{x}\ln|x| + \frac{\alpha}{|x|},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} t = t_H + t_p &= \frac{k}{|x|} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{x}\ln|x| + \frac{\alpha}{|x|} \\ &= \frac{\beta}{|x|} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{x}\ln|x|,\ \beta = k + \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Comme $t = \dfrac{1}{z}$. Alors, on a $z = \dfrac{1}{\dfrac{\beta}{|x|} - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{x}\ln|x|}$, et par suite, on trouve

$$\begin{aligned} y_G = y_1 + \frac{1}{z} &= \frac{1}{x} + \frac{\beta}{|x|} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{x}\ln|x| \\ &= \frac{1}{x}\Big(1 - \ln|x|\Big) + \frac{\beta}{|x|} - \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

Correction d'exercice 3.4 **1** Soit l'équation différentielle $xy' - y = 2x^2, \quad y(1) = 5$. Alors, on commençant par la solution générale, puis on appliquant les conditions initiales.
La solution homogène y_H : (EH) : $xy' - y = 0$. On a, donc

$$(EH) \Leftrightarrow xy' - y = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|cx|, \; (c \in \mathbb{R}_+^*).$$

Donc, $y_H = kx, \; k = \pm c \in \mathbb{R}^*$.
La solution particulière y_p : On pose $y_p = k(x)x$.
Donc, on trouve $y_p = k(x)x$ et $y_p' = k'(x)x + k(x)$. Par suite

$$xy_p' - y_p = 2x^2 \Leftrightarrow k'(x) = 2 \Leftrightarrow k(x) = 2x + \alpha, \; \alpha \in \mathbb{R}.$$

Donc, nous avons que $y_p = (2x + \alpha)x, \; \alpha \in \mathbb{R}$. D'où le résultat

$$y = y_H + y_p \Rightarrow y = kx + (2x + \alpha)x \Leftrightarrow y = 2x^2 + \lambda x$$

tel que $\lambda k + \alpha \in \mathbb{R}$.
Si on applique le conditions initiales on obtient le système

$$\begin{cases} y = 2x^2 + \lambda x \\ y(1) = 5, \end{cases} \Rightarrow \lambda = 3.$$

Donc, $y = 2x^2 + 3x$.

2 Pour l'équation $xy' + y = e^x, \quad y(1) = 2$. Si $x \in \mathbb{R}^*$. Alors, nous avons que
La solution homogène y_H : (EH) : $xy' + y = 0$. De manière similaire on trouve

$$(EH) \Leftrightarrow xy' + y = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = -\ln|cx| = \frac{1}{|cx|}, \; (c \in \mathbb{R}_+^*).$$

Donc, $y_H = kx, \; k = \pm\frac{1}{c} \in \mathbb{R}^*$.

La solution particulière y_p : On pose $y_p = \dfrac{k(x)}{x}$.

Donc, on a $y_p' = \dfrac{k'(x)x - k(x)}{x^2}$. Par suite

$$xy_p' + y_p = e^x \Leftrightarrow k'(x) = e^x \Leftrightarrow k(x) = e^x + \alpha, \; \alpha \in \mathbb{R}.$$

Par suite, nous avons que $y_p = (e^x + \alpha)x, \; \alpha \in \mathbb{R}$. Par conséquent,

$$y = y_H + y_p \Rightarrow y = kx + (e^x + \alpha)x \Leftrightarrow y = xe^x + \lambda x$$

tel que $\lambda = k + \alpha \in \mathbb{R}$.
Si on applique le conditions initiales on obtient le système

$$\begin{cases} y = xe^x + \lambda x \\ y(1) = 2, \end{cases} \Rightarrow \lambda = 2 - e.$$

Donc, $y = xe^x + (2 - e)x$.

3 $y' + y\tan x = \cos^2 x, \quad y(0) = -1$. Sur $D = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2}\}$ tel que $k \in \mathbb{Z}$. On a
La solution homogène y_H : (EH) : $y' + y\tan x = 0$. Alors, si on pose $t = \cos x$, on trouve, $dt = -\sin x dx$ et de puis

$$\begin{aligned} y' + y\tan x = 0 \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \tan x dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &\Rightarrow \quad \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{t} \Rightarrow |y| = |ct| \\ &\Rightarrow \quad y = k\cos x. \end{aligned}$$

Donc, $y_H = k\cos x, \ k = \pm c \in \mathbb{R}^*$.
La solution particulière y_p : On pose $y_p = k(x)\cos x$.
Donc, on a $y_p' = k'(x)\cos x - k(x)\sin x$. Par suite

$$y_p' + y_p \tan x = \cos^2 x \Leftrightarrow k'(x) = \cos x \Leftrightarrow k(x) = \sin x + \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Donc, nous avons que $y_p = (\sin x + \alpha)\cos x, \ \alpha \in \mathbb{R}$. Par conséquent,

$$y = y_H + y_p \Rightarrow y = \lambda \cos x + \frac{1}{2}\sin 2x$$

tel que $\lambda = k + \alpha \in \mathbb{R}$.
Si on applique le conditions initiales on obtient le système

$$\begin{cases} \lambda \cos x + \frac{1}{2}\sin 2x \\ y(0) = -1, \end{cases} \quad \Rightarrow \lambda = -1.$$

Donc, $y = -1\cos x + \frac{1}{2}\sin 2x$.

4 Reste comme exercice.

Correction d'exercice 3.5. On résoudre les équations differentielles linéaires et homogènes d'ordre 2 suivantes

1 $y'' - 3y' + 2y = 0. \quad (1)$. L'équation caractéristique de (1) est

$$r^2 - 3r + 2 = 0.$$

La discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 1 > 0$. Donc,

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow r_1 = 1 \text{ et } r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow r_2 = 2,$$

Alors,

$$\begin{aligned} y_1 = e^{r_1 x} \quad &\Rightarrow \quad y_1 = e^x \\ y_2 = e^{r_2 x} \quad &\Rightarrow \quad y_2 = e^{2x}. \end{aligned}$$

Comme le wronskien $W \neq 0$. Car, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$x \mapsto W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x}e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x} \neq 0.$$

D'où la soluion générale de l'équation homogène (1) est

$$\begin{aligned} y_H &= \lambda y_1 + \mu y_2 \\ &= \lambda e^x + \mu e^{2x}, \quad \lambda, \ \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2 $y'' - 5y' + 6y = 0. \quad (2)$. L'équation caractéristique de (2) est

$$r^2 - 5r + 6 = 0.$$

La discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 1 > 0$. Donc,

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow r_1 = 2 \text{ et } r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow r_2 = 3,$$

Alors,

$$\begin{aligned} y_1 = e^{r_1 x} &\Rightarrow y_1 = e^{2x} \\ y_2 = e^{r_2 x} &\Rightarrow y_2 = e^{3x}. \end{aligned}$$

Comme le wronskien $W \neq 0$. Car, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$x \mapsto W(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{x} & 3e^{3x}e^{2x} \end{vmatrix} = e^{5x} \neq 0.$$

D'où la soluion générale de l'équation homogène (2) est

$$\begin{aligned} y_H &= \lambda y_1 + \mu y_2 \\ &= \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3 $y'' - y' = 0. \quad (3)$. On a l'équation caractéristique de (3) est

$$r^2 - r = 0 \Rightarrow r = 0 \ \vee \ r = 1.$$

Alors, la soluion générale de l'équation homogène (3) est

$$\begin{aligned} y_H &= \lambda y_1 + \mu y_2 \\ &= \lambda + \mu e^{x}, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4 $y'' - 2y' + 5y = 0. \quad (4)$ On a l'équation caractéristique de (4) est $r^2 - 2r + 5 = 0$ et $\Delta = -16 < 0$. Donc, $\Delta = (4i)^2$ et $\sqrt{\Delta} = 4i = \delta_1 \ \vee \ \sqrt{\Delta} = 4i = \delta_2$. Par suite

$$r_1 = \frac{-b - \delta_1}{2a} \Rightarrow r_1 = 1 - 2i \text{ et } r_2 = \frac{-b + \delta_1}{2a} \Rightarrow r_2 = 1 + 2i,$$

et on trouve,

$$\begin{aligned} y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x &\Rightarrow y_1 = e^{x}\cos 2x \\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x &\Rightarrow y_2 = e^{x}\sin 2x. \end{aligned}$$

Alors, la soluion générale de l'équation homogène (4) est donner par

$$\begin{aligned} y_H &= \lambda y_1 + \mu y_2 \\ &= e^{\alpha x}(\lambda\cos 2x + \mu\sin 2x), \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5 $y'' - 6y' + 9y = 0. \quad (5)$ On a l'équation caractéristique de (5) est $r^2 - 6r + 9 = 0$ et $\Delta = 0$. Donc, $r = r_1 = r_2 = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow r = 3$, et on trouve,

$$\begin{aligned} y_1 = e^{rx} &\Rightarrow y_1 = e^{3x} \\ y_2 = xe^{rx} &\Rightarrow y_2 = xe^{3x}. \end{aligned}$$

D'où, la soluion générale de l'équation (5),

$$\begin{aligned} y_H &= \lambda y_1 + \mu y_2 \\ &= (\lambda + \mu x)e^{3x}, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

6 Reste comme exercice.

7 Reste comme exercice.

Correction d'exercice 3.6. On resoudre les équations différentielles suivantes :

1

(a) Soit l'équation $y'' - 3y' + 2y = 4x^2, \quad (1)$. D'après l'exercice 5, on a la solution de l'équation homogène $y'' - 3y' + 2y = 0$ est $y_H = \lambda e^x + \mu e^{2x}, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$. On cherche donc une solution particulière y_p sous la forme $y_p = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$. Alors, $y_p' = 2ax + b$ et $y_p'' = 2a$. Par substitution, on trouve,
$y_p'' - 3y_p' + 2y = 4x^2 \Rightarrow 2ax^2 + 2(b - 3a)x + 2a - 3b + 2c = 4x^2 \Rightarrow$
$\begin{cases} 2a = 4, \\ 2(b - 3a) = 0, \\ 2a - 3b + 2c = 0, \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2, \\ 2b = 3a = 6, \\ c = 7. \end{cases}$$

D'où $y_p = 2x^2 + 6x + 7$. Alors, la solution générale de (1) est donner par

$$y = y_H + y_p \Rightarrow y = \lambda e^x + \mu e^{2x} + 2x^2 + 6x + 7, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

(b) Pour l'équation $y''+2y'+y = 4xe^x. \quad (2)$ et d'après une calcule similaire à celle dans l'exercice 5, on a l'équation caractéristique de (2) est $r^2 2r+1 = 0$ et
$\Delta = 0$. Donc, $r = r_1 = r_2 = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow r = -1$, et on trouve,

$$\begin{aligned} y_1 = e^{rx} &\ \Rightarrow\ y_1 = e^{-x} \\ y_2 = xe^{rx} &\ \Rightarrow\ y_2 = xe^{-x}. \end{aligned}$$

D'où, la soluion générale de l'équation (2),

$$\begin{aligned} y_H &= \lambda y_1 + \mu y_2 \\ &= (\lambda + \mu x)e^{-x}, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Maintenant on charche une solution particulière y_p sous la forme $y_p = (ax + b)e^x,\ a \neq 0$. Alors, $y_p' = (2ax + b + 2)e^x$ et $y_p'' = (2ax + b + 2a)e^x$. Par substitution dans (2), on trouve,
$y_p'' + 2y_p' + y = 4xe^x \Rightarrow 4(ax + b + a)e^x = 4xe^x \Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b + a = 0, \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = -1. \end{cases}$$

D'où $y_p = (x - 1)e^x$. Alors, la solution générale de (2) est

$$y = y_H + y_p \Rightarrow y = \lambda e^{-x} + \mu xe^{-x} + (x - 1)e^x, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

(c) Soit l'équation $y'' + y' - 2y = \sin x, \quad (3)$. Alors, on a
$(EH) :\ y'' + y' - 2y = 0$, et l'équation caratéristique est $r^2 + r - 2 = 0, \quad \Delta = 9$. Donc, on trouve $r_1 = 1,\ r_2 = -2$, c'est à dire $y_H = \lambda e^x + \mu e^{-2x}$.

Pour la solution particulière y_p. Posons $y_p = \alpha\cos x + \beta\sin x$, tels que $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. Alors, on a
$y_p'' + y_p' - 2y = \sin x \Rightarrow (-3\alpha + \beta)\cos x - (\alpha + \beta)\sin x = \sin x \Rightarrow$
$\begin{cases} -3\alpha + \beta = 0, \\ -\alpha - \beta = 1, \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{4}, \\ \beta = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$$

D'où $y_p = -\dfrac{1}{4}\cos x + \dfrac{5}{4}\sin x$. Par conséquent, la solution générale est définie par

$$y = y_H + y_p \Rightarrow y = \lambda e^{x} + \mu e^{-2x} - \frac{1}{4}\cos x + \frac{5}{4}\sin x, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

d Pour l'équation différentielle $y'' = shx, \quad (4)$. Par intégration deux fois, et comme $y'' = \dfrac{dy'}{dx}$, on a

$$\begin{aligned} (4) \quad &\Leftrightarrow \quad y'' = shx \Leftrightarrow \int dy' = \int shxdx \Leftrightarrow y' = chx + \lambda \\ &\Leftrightarrow \quad \int dy = \int chxdx + \lambda\int dx \Leftrightarrow y = shx + \lambda x + \beta, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

e Reste comme exercice.

f Reste comme exercice.

g $y'' - 2y = ch2x$. (EH) : $y'' - 2y = 0$, et l'équation caratéristique est $r^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow r \pm \sqrt{2}$. Donc, on trouve $y_H = \lambda e^{\sqrt{2}x} + \mu e^{-\sqrt{2}x}$.
Pour la solution particulière y_p. Posons $y_p = \alpha ch2x$, tels que $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, on a
$y_p'' - 2y = ch2x \Rightarrow 5\alpha ch2x = ch2x \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{5}$. D'où $y_p = \dfrac{1}{5}ch2x$. Par conséquent, la solution générale est définie par

$$y = y_H + y_p \Rightarrow y = \lambda e^{\sqrt{2}x} + \mu e^{-\sqrt{2}x} + \frac{1}{54}ch2xx, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

2 ⓐ La solution de l équations ⓐ, qu'il satisfait les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$. Donc, on a le système $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 4x^2, \\ y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 2. \end{cases}$
D'après ce qui précède, on a

$$y = \lambda e^{x} + \mu e^{2x} + 2x^2 + 6x + 7, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

Donc, on appliquant les conditions initiales, on trouve,

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + 7 = 1, \\ \lambda + 2\mu + 6 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -8, \\ \mu = 2 \end{cases}$$

Alors, $y = -8e^{x} + 2e^{2x} + 2x^2 + 6x + 7$.

ⓒ On a le système $\begin{cases} y'' + y' - 2y = \sin x, \\ y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 2. \end{cases}$
D'après ce qui précède, nous avons que

$$y = \lambda e^{x} + \mu e^{-2x} - \frac{1}{4}\cos x + \frac{5}{4}\sin x, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

Par l'application des conditions initiales, on trouve,

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda + -2\mu - \frac{1}{4} = 1, \\ \lambda + 2\mu + \frac{5}{4} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{5}{4}, \\ \mu = 0 \end{cases}$$

C'est à dire la solution demandé est, $y = \frac{5}{4}e^{x} - \frac{1}{4}\cos x + \frac{5}{4}\sin x.$

Correction d'exercice supplémentaire 3.1 **1** Exercice

2 Exercice

3 $y' = \dfrac{y}{x} + x, \quad (x \in \mathbb{R}_{+}^{*}).$
Si $x \in \mathbb{R}_{+}^{*}$. Alors, nous avons que
La solution homogène y_H : (EH) : $y' - \dfrac{y}{x} = 0$. On remarque $y = 0$ est une solution triviale. Si $y \neq 0$, on aura, donc

$$(EH) \Leftrightarrow y' - \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|cx|, (c > 0) \Rightarrow y_H = kx,\ k = \pm c \in \mathbb{R}^{*}.$$

La solution particulière y_p : On pose $y_p = k(x)x$.
Donc, on a $y_p' = k'(x)x + k(x)$. Par suite

$$y_p' = \frac{y_p}{x} + x \Leftrightarrow k'(x) = 1 \Leftrightarrow k(x) = x + \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Depuis $y_p = (x + \alpha)x,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Par conséquent,

$$y = y_H + y_p \Rightarrow y = kx + (x + \alpha)x \Leftrightarrow y = x^2 + \lambda x$$

tel que $\lambda = k + \alpha \in \mathbb{R}$.

4 $(x^2 + 1)y' + xy = 0, \quad (x \in \mathbb{R}).(4)$
L''equation (4) équivalent à l'équation $y + \dfrac{x}{x^2 + 1}y = 0$ qui est une équation homogènen. Donc, on a

$$(4) \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -\frac{xdx}{x^2 + 1} \Rightarrow \ln|y| = -\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + c = \ln\left(\frac{c}{\sqrt{x^2 + 1}}\right), (c > 0)$$

$$\Rightarrow y = \frac{k}{\sqrt{x^2 + 1}},\quad k = \pm c \in \mathbb{R}^{*}.$$

Correction d'exercice supplémentaire 3.2 1 Soit l'équation differentielle $\sqrt{1-x^2}y' - y = 0, \quad (1)$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{1-x^2}y' - y = 0 \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&\Leftrightarrow \quad \ln|y| = \arcsin(x) + c \\
&= \quad |y| = ke^{\arcsin(x)}, \ k = \pm e^c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2 Si $y' = y(y-1)\cos x, \quad (2)$. Alors, pour $y \neq 0$ et $y \neq 1$ on a $\dfrac{y'}{y(y-1)} = \dfrac{y'}{y} - \dfrac{y'}{y-1}$. Donc, on trouve

$$\begin{aligned}
(2) \quad &\Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \cos x dx \\
&\Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{y-1} = \int \cos x dx \\
&\Leftrightarrow \quad \ln|y| - \ln|y+1| = \sin x + c \\
&\Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = \sin x + c \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{y}{y+1} = Ke^{\sin x}, \ k = \pm e^c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

3 Reste comme exercice.

4 $y' = \dfrac{x+1}{y^2}, \quad (4)$. On resoudre cette équation par séparation de variables. On d donc pour $y \neq 0$,

$$\begin{aligned}
(4) \quad &\Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2} = \int (x+1)dx \\
&\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + x + c \\
&\Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + x + c},
\end{aligned}$$

tel que $\dfrac{1}{2}x^2 + x + c \neq 0$.

5 Reste comme exercice.

Bibliographie

[1] BABA-HAMED. C, BENHABIB. K. *Analyse I, Rappels de Cours et Exercices avec Solutions*. Office des Publications Universitaires. Alger. **1988**.

[2] KADA ALLAB. *Élément d'analyse*. Office des Publications Universitaires. Alger. **1984**.

[3] S. BALAC, F. STURM. *Algèbre et Analyse, cours de mathématiques de première année avec axercices corrigés*. Presses polytechniques et universitaires romandes, CH-1015 Lausanne. **2003**.

[4] JACQUES DIXMIER. *Cours de mathématiques du premier cycle, première année.* Gauthier-Villars. **1986**.

[5] J. M. MONIER. *Analyse PCSI-PTSI*. Dunod, Paris 2003.

[6] N. PISCONOV. *Calcul différentiel et intégral*. Office des Publications Universitaires. Alger. **1984.**

[7] J. QUINET. *Cours élémentaires de mathématiques supérieurs, Tomes 1, 2, 3*. Dunod. Moscou. **1968**.

[8]

د. كوتي، ج. إِزرَا . اَلتحليل الريَاضي، اَلجزء الأَول. ترجمة يوسف عتيق ديوَان المطبوعَات اَلجَامعية. اَلجزَائِر. 1987.

[9]

عبد الوَهَاب بيبي . اَلتحليل الريَاضي، دروس و تمَارين محلولة. اَلجزء الثَاني. ديوَان المطبوعَات اَلجَامعية. اَلجزَائِر. 1988.