Exercice 02: Soit le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad x \in]0,1[, t \in]0,1[\\ u(x,0) = e^x, \ x \in [0,1] \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \ t \in]0,1] \end{cases}$$

1. Ecrire les schémas implicite et de Crank-Nicolson pour : $x_i = ih$, $t_j = jk$ où $h = \frac{1}{N+1}$, $k = \frac{1}{M+1}$.(Indication : Utiliser le schéma centré pour la discrétisation de u_x).
2. Ecrire le systéme matriciel pour les deux schémas.
3. Calculer la solution approchée pour les deux schémas en $t_1 = \dfrac{1}{4}$ puis $t_1 = \dfrac{1}{2}$, en prenant $N = 3$.

Réponse

Soit le problème suivant

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad x \in]0,1[, t \in]0,1[\\ u(x,0) = e^x, \ x \in [0,1] \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \ t \in]0,1] \end{cases}$$

où $u = u(x,t)$

1. Les schémas pour $h = \frac{1}{N+1}$, $k = \frac{1}{M+1}$

   Schéma implicite : On a

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^j = \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k}, \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^j = \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h}, \ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^j = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$

Alors

$$-\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k} - \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h} - \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} = 2$$

D'où le schéma implicite du problème précédent est donné par

$$\begin{cases} (\dfrac{1}{2h} - \dfrac{1}{h^2})u_{i-1}^j + (\dfrac{2}{h^2} - \dfrac{1}{k})u_i^j - (\dfrac{1}{2h} + \dfrac{1}{h^2})u_{i+1}^j = -\dfrac{1}{k}u_i^{j-1} + 2, \quad 1 \leq i \leq N, \ 1 \leq j \leq M, \\ u_i^0 = e^{ih}, \quad 0 \leq \ i \leq N+1, \\ u_0^j = u_{N+1}^j = 0, \ 0 \leq \ j \leq M+1, \end{cases}$$

Schéma de Crank-Nicolson :

On a

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^j=\frac{u_i^j-u_i^{j-1}}{k},\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^j=\frac{u_{i+1}^j-u_{i-1}^j}{2h},\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^j=\frac{1}{2}(\frac{u_{i+1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i-1}^{j+1}+u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j}{h^2})$$

Alors

$$-\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{k}-\frac{u_{i+1}^j-u_{i-1}^j}{2h}-\frac{u_{i+1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i-1}^{j+1}+u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j}{2h^2}=2$$

D'où le schéma de Crank-Nicolson du problème précédent est donné par

$$\begin{cases}-\frac{1}{2h^2}u_{i-1}^{j+1}+(\frac{1}{h^2}-\frac{1}{k})u_i^{j+1}-\frac{1}{2h^2}u_{i+1}^{j+1}=(\frac{1}{2h^2}-\frac{1}{2h})u_{i-1}^j-(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k})u_i^j+(\frac{1}{2h}+\frac{1}{2h^2})u_{i+1}^j+2, \quad 1\le i\le N,\ 1\le j\le M,\\ u_i^0=e^{ih},\ \ 0\le\ i\le N+1,\\ u_0^j=u_{N+1}^j=0,\ 0\le\ j\le M+1,\end{cases}$$

2. Le système matriciel pour le schéma implicite:

pour $i=1$ $\quad (\frac{1}{2h}-\frac{1}{h^2})u_0^j+(\frac{2}{h^2}-\frac{1}{k})u_1^j-(\frac{1}{2h}+\frac{1}{h^2})u_2^j=-\frac{1}{k}u_1^{j-1}+2$

pour $i=2$ $\quad (\frac{1}{2h}-\frac{1}{h^2})u_1^j+(\frac{2}{h^2}-\frac{1}{k})u_2^j-(\frac{1}{2h}+\frac{1}{h^2})u_3^j=-\frac{1}{k}u_2^{j-1}+2$

.

.

.

pour $i=N$ $\quad (\frac{1}{2h}-\frac{1}{h^2})u_{N-1}^j+(\frac{2}{h^2}-\frac{1}{k})u_N^j-(\frac{1}{2h}+\frac{1}{h^2})u_{N+1}^j=-\frac{1}{k}u_N^{j-1}+2$

$$\begin{pmatrix}(\frac{2}{h^2}-\frac{1}{k}) & -(\frac{1}{2h}+\frac{1}{h^2}) & 0 & . & . & 0\\ (\frac{1}{2h}-\frac{1}{h^2}) & (\frac{2}{h^2}-\frac{1}{k}) & -(\frac{1}{2h}+\frac{1}{h^2}) & & & .\\ 0 & & & & & .\\ . & & & & & 0\\ . & & & & (\frac{2}{h^2}-\frac{1}{k}) & -(\frac{1}{2h}+\frac{1}{h^2})\\ 0 & & & & (\frac{1}{2h}-\frac{1}{h^2}) & (\frac{2}{h^2}-\frac{1}{k})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\.\\.\\.\\u_N\end{pmatrix}^j=-\frac{1}{k}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\.\\.\\.\\u_N\end{pmatrix}^{j-1}+\begin{pmatrix}2\\2\\.\\.\\.\\2\end{pmatrix}$$

2. Le système matriciel pour le schéma de Crank-Nicolson:

pour $i=1$ $\quad -\frac{1}{2h^2}u_0^{j+1}+(\frac{1}{h^2}-\frac{1}{k})u_1^{j+1}-\frac{1}{2h^2}u_2^{j+1}=(\frac{1}{2h^2}-\frac{1}{2h})u_0^j-(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k})u_1^j+$
$(\frac{1}{2h}+\frac{1}{2h^2})u_2^j+2$

pour $i=2$ $\quad -\frac{1}{2h^2}u_1^{j+1}+(\frac{1}{h^2}-\frac{1}{k})u_2^{j+1}-\frac{1}{2h^2}u_3^{j+1}=(\frac{1}{2h^2}-\frac{1}{2h})u_1^j-(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k})u_2^j+$
$(\frac{1}{2h}+\frac{1}{2h^2})u_3^j+2$

.

.

.

pour $i = N$ $\quad -\frac{1}{2h^2}u_{N-1}^{j+1} + (\frac{1}{h^2} - \frac{1}{k})u_N^{j+1} - \frac{1}{2h^2}u_{N+1}^{j+1} = (\frac{1}{2h^2} - \frac{1}{2h})u_{N-1}^{j} - (\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k})u_N^{j} + (\frac{1}{2h} + \frac{1}{2h^2})u_{N+1}^{j} + 2$

$$\begin{pmatrix} (\frac{1}{h^2}-\frac{1}{k}) & -\frac{1}{2h^2} & 0 & . \; . & & 0 \\ -\frac{1}{2h^2} & (\frac{1}{h^2}-\frac{1}{k}) & -\frac{1}{2h^2} & & & . \\ 0 & & & & & . \\ . & & & & & 0 \\ . & & & & (\frac{1}{h^2}-\frac{1}{k}) & -\frac{1}{2h^2} \\ 0 & & & & -\frac{1}{2h^2} & (\frac{1}{h^2}-\frac{1}{k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_N \end{pmatrix}^{j+1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k}) & (\frac{1}{2h^2}+\frac{1}{2h}) & 0 & . \; . & & 0 \\ (\frac{1}{2h^2}-\frac{1}{2h}) & -(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k}) & (\frac{1}{2h^2}+\frac{1}{2h}) & & & . \\ 0 & & & & & . \\ . & & & & & 0 \\ . & & & & -(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k}) & (\frac{1}{2h^2}+\frac{1}{2h}) \\ 0 & & & & (\frac{1}{2h^2}-\frac{1}{2h}) & -(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_N \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ . \\ . \\ . \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. la solution approchée pour les deux schémas en $t_1 = \frac{1}{4}$, en prenant $N = 3$.

   On a $t_1 = \frac{1}{M+1} = \frac{1}{4} \Rightarrow M = N = 3$

   donc $h = k = \frac{1}{4}$, $x_i = ih$

   Schéma implicite: on prend $j = 1$

   pour $i = 1$ $\quad (\frac{1}{2h} - \frac{1}{h^2})u_0^1 + (\frac{2}{h^2} - \frac{1}{k})u_1^1 - (\frac{1}{2h} + \frac{1}{h^2})u_2^1 = -\frac{1}{k}u_1^{j0} + 2$

   pour $i = 2$ $\quad (\frac{1}{2h} - \frac{1}{h^2})u_1^1 + (\frac{2}{h^2} - \frac{1}{k})u_2^1 - (\frac{1}{2h} + \frac{1}{h^2})u_3^1 = -\frac{1}{k}u_2^0 + 2$

   pour $i = 3$ $\quad (\frac{1}{2h} - \frac{1}{h^2})u_2^1 + (\frac{2}{h^2} - \frac{1}{k})u_3^1 - (\frac{1}{2h} + \frac{1}{h^2})u_4^1 = -\frac{1}{k}u_3^0 + 2$

De la condition initiale on sait que $u_1^0 = e^{\frac{1}{4}}, u_2^0 = e^{\frac{2}{4}}, u_3^0 = e^{\frac{3}{4}}$

et des conditions aux limites de type Dirichlet homogène on a $u_0^1 = u_4^1 = 0$

Alors on obtient le système suivant

$$\begin{cases} 28u_1^1 - 18u_2^1 = -4e^{\frac{1}{4}} + 2 \\ -14u_1^1 + 28u_2^1 - 18u_3^1 = -4e^{\frac{2}{4}} + 2 \\ -14u_2^1 + 28u_3^1 = -4e^{\frac{3}{4}} + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1^1 = -0.7755 \\ u_2^1 = -1.0321 \\ u_3^1 = -0.7470 \end{cases}$$

D'où la solution approchée par le schéma implicite est $U^{(1)} = (-0.7755, -1.0321, -0.7470)^t$

Schéma de Crank Nicolson: on prend $j = 0$

pour $i = 1$ $\quad -\frac{1}{2h^2}u_0^1 + (\frac{1}{h^2} - \frac{1}{k})u_1^1 - \frac{1}{2h^2}u_2^1 = (\frac{1}{2h^2} - \frac{1}{2h})u_0^0 - (\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k})u_1^0 + (\frac{1}{2h} + \frac{1}{2h^2})u_2^0 + 2$

pour $i = 2$ $\quad -\frac{1}{2h^2}u_1^1 + (\frac{1}{h^2} - \frac{1}{k})u_2^1 - \frac{1}{2h^2}u_3^1 = (\frac{1}{2h^2} - \frac{1}{2h})u_1^0 - (\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k})u_2^0 + (\frac{1}{2h} + \frac{1}{2h^2})u_3^0 + 2$

pour $i = 3$ $\quad -\frac{1}{2h^2}u_2^1 + (\frac{1}{h^2} - \frac{1}{k})u_3^1 - \frac{1}{2h^2}u_4^1 = (\frac{1}{2h^2} - \frac{1}{2h})u_2^0 - (\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k})u_3^0 + (\frac{1}{2h} + \frac{1}{2h^2})u_4^0 + 2$

De la condition initiale on sait que $u_1^0 = e^{\frac{1}{4}}, u_2^0 = e^{\frac{2}{4}}, u_3^0 = e^{\frac{3}{4}}$

et des conditions aux limites de type Dirichlet homogène on a $u_0^1 = u_4^1 = u_0^0 = u_4^0 = 0$

Alors on obtient le système suivant

$$\begin{cases} 12u_1^1 - 8u_2^1 = -20e^{\frac{1}{4}} + 10e^{\frac{2}{4}} + 2 \\ -8u_1^1 + 12u_2^1 - 8u_3^1 = 6e^{\frac{1}{4}} - 20e^{\frac{2}{4}} + 10e^{\frac{3}{4}} + 2 \\ -8u_2^1 + 12u_3^1 = 6e^{\frac{2}{4}} - 20e^{\frac{3}{4}} + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1^1 = -0.8643 \\ u_2^1 = -1.2615 \\ u_3^1 = -2.0270 \end{cases}$$

D'où la solution approchée par le schéma Crank-Nicolson est $U^{(1)} = (-0.8643, -1.2615, -2.0270)^t$