1^{re} **Année Master (AMN)**
Semestre : 2
Matière : Ana. Matri. et optimisation 2

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Examen de rattrapage
Durée : $1^h : 00^{Min}$

Exercice 1 (12 pts). Soit le problème d'optimisation avec contraintes d'égalités suivant :

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle - \langle c, x\rangle \\ Ax = b, \end{cases} \tag{1}$$

où Q est une matrice carré d'ordre n symétrique et définie positive, $c \in \mathbb{R}^n$ et A est une matrice rectangulaire de taille $m \times n$ avec $m < n$ et $rang(A) = m$. Soit (x^k) la suite de la méthode de gradient projeté à pas optimal définie par :

$$\begin{cases} x^0 \in \Omega, \\ x^{k+1} = \mathcal{P}_\Omega\left[x^k - \alpha_k \nabla f\left(x^k\right)\right] = x^k - \alpha_k P\nabla f\left(x^k\right), \ \forall k \in \mathbb{N}, \\ \alpha_k \text{ est le point de minimum global de la fonction } \varphi(\alpha) = f\left[x^k - \alpha P\nabla f\left(x^k\right)\right]. \end{cases}$$

où $P = I - A^T\left(AA^T\right)^{-1} A$.

1. Monter que la suite (x^k) est donnée par :

$$x^{k+1} = x^k - \frac{g_k^T P g_k}{g_k^T PQP g_k} P g_k,$$

où $g_k = \nabla f\left(x^k\right) = Qx^k - c$.

2. Montrer que $g_{k+1}^T P g_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que le vecteur $x^{k+1} - x^k$ est orthogonal sur le vecteur $x^{k+2} - x^{k+1}$.

Exercice 2 (8 pts). Avec la méthode de pénalité, résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \min f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

Indication : utiliser la fonction de pénalité quadratique suivante :

$$P(x) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - 2)^2.$$

Corrigé d'exercice 1: 1. Soit x^k la suite de la méthode de gradient projeté à pas optimal pour le problème (1) définie par :

$$x^{k+1} = \mathcal{P}_\Omega\left[x - \alpha_k \nabla f\left(x^k\right)\right] = x^k - \alpha_k P \nabla f\left(x^k\right),$$

où α_k est le point de minimum global de la fonction $\varphi(\alpha) = f\left(x^k - \alpha P \nabla f\left(x^k\right)\right)$. Nous avons :

$$g_k = \nabla f\left(x^k\right) = Qx^k - c.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha) = f\left[x^k - \alpha P g_k\right] &\Rightarrow \varphi'(\alpha_k) = \left\langle \nabla f\left(x^k - \alpha_k P g_k\right), P g_k \right\rangle = 0 \\
&\Rightarrow \left\langle Q\left(x^k - \alpha_k P g_k\right) - c, P g_k \right\rangle = 0, \\
&\Rightarrow \left\langle Q x^k - c, P g_k \right\rangle - \alpha_k \left\langle Q P g_k, P g_k \right\rangle = 0, \\
&\Rightarrow \left\langle g_k, P g_k \right\rangle = \alpha_k \left\langle Q P g_k, P g_k \right\rangle, \\
&\Rightarrow \alpha_k = \frac{\left\langle g_k, P g_k \right\rangle}{\left\langle Q P g_k, P g_k \right\rangle} = \frac{g_k^T P g_k}{g_k^T P Q P g_k}.
\end{aligned}$$

D'où, la suite de la méthode de gradient projeté à pas optimal est donnée par :

$$x^{k+1} = x^k - \frac{g_k^T P g_k}{g_k^T P Q P g_k} P g_k.$$

2. Nous avons :

$$g_{k+1}^T P g_k = \left\langle P g_k, g_{k+1} \right\rangle,$$

et

$$g_{k+1} = Q x^{k+1} - c = g_k - \frac{g_k^T P g_k}{g_k^T P Q P g_k} Q P g_k.$$

Donc, on a :

$$\left\langle P g_k, g_{k+1} \right\rangle = \left\langle P g_k, g_k \right\rangle - \frac{g_k^T P g_k}{g_k^T P Q P g_k} \left\langle P g_k, Q P g_k \right\rangle = 0.$$

3. Nous avons :

$$\left\langle x^{k+1} - x^k, x^{k+2} - x^{k+1} \right\rangle = \frac{g_k^T P g_k}{g_k^T P Q P g_k} \frac{g_{k+1}^T P g_k}{g_{k+1}^T P Q P g_{k+1}} \left\langle P g_k, P g_{k+1} \right\rangle.$$

Mais,

$$\left\langle P g_k, P g_{k+1} \right\rangle = \left\langle P g_k, g_{k+1} \right\rangle = 0, \text{ car } P = P^T \text{et } P^2 = P.$$

<u>**Corrigé d'exercice** 2:</u> Nous avons :

$$q(\gamma, x) = f(x) + \frac{\gamma}{2} P(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + \frac{\gamma}{2}(x_1 + x_2 - 2)^2.$$

Alors, on a :

$$\nabla q(\gamma, x) = \begin{bmatrix} (4+\gamma)\, x_1 + \gamma x_2 - 2\gamma \\ \gamma x_1 + (6+\gamma)\, x_2 - 2\gamma \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2 q(\gamma, x) = \begin{bmatrix} 4+\gamma & \gamma \\ \gamma & 6+\gamma \end{bmatrix}$$

Donc, nous avons :

$$\nabla q(\gamma, x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{6\gamma}{5\gamma + 12} \text{ et } x_2 = \frac{4\gamma}{5\gamma + 12}.$$

D'autre part, on a :

$$det\left[\nabla^2 q(\gamma, x)\right] = 10\gamma + 24 > 0 \quad \text{et} \quad tr\left[\nabla^2 q(\gamma, x)\right] = 2\gamma + 10 > 0.$$

D'où $\left(\frac{6\gamma}{5\gamma+12}, \frac{4\gamma}{5\gamma+12}\right)$ est un point de minimum local strict de q. Mais la matrice hessienne de q est définie positive sur $\mathbb{R}^2$, donc q est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$. Le point $\left(\frac{6\gamma}{5\gamma+12}, \frac{4\gamma}{5\gamma+12}\right)$ est point de minimum global de q sur $\mathbb{R}^2$. Finalement, nous avons :

$$x_1^* = \lim_{\gamma \to +\infty} \frac{6\gamma}{5\gamma + 12} = 6/5 \text{ et } x_2^* = \lim_{\gamma \to +\infty} \frac{4\gamma}{5\gamma + 12} = 4/5.$$

D'où $x^* = (6/5, 4/5)$.