1^{re} **Année Master (AMN)**
Semestre : 2
Matière : Ana. Matri. et optimisation 2

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Examen de rattrapage
Durée : $1^h : 30^{Min}$

On considère le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in \Omega \end{cases} \tag{1}$$

où $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ avec A une matrice symétrique et définie positive de taille n et $b \in \mathbb{R}^n$, Ω est l'ensemble des contraintes défini par $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : Cx = d\}$ avec C une matrice rectangulaire de taille $p \times n$ et $rang(C) = p$, $d \in \mathbb{R}^p$. On note $0 < \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_n$ les valeurs propres de A.

1. Montrer que le problème (1) admet une solution unique x^*.
2. Montrer qu'il existe un unique $\lambda^* \in \mathbb{R}^p$ tel que
$$\begin{cases} Ax^* + C^T\lambda^* = 0, \\ Cx^* = d. \end{cases}$$
3. Soit $\mathcal{P}_\Omega$ la projection de $\mathbb{R}^n$ sur le convexe fermé Ω c'est à dire
$$\|x - \mathcal{P}_\Omega(x)\| = \min_{v\in\Omega} \|x - v\|.$$
   (a) Montrer l'inégalité suivante : $\forall v \in \Omega : \langle \nabla f(x^*), v - x^*\rangle \geq 0$.
   (b) Déduire que pour tout $\rho > 0$,
   $$x^* = \mathcal{P}_\Omega(x^* - \rho\nabla f(x^*)).$$
   (c) On considère la suite de l'algorithme du gradient projeté à pas constant suivante :
   $$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n, \\ x_{k+1} = \mathcal{P}_\Omega(x_k - \rho\nabla f(x_k)), \ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$
   Montrer que si $\rho < \frac{2}{\alpha_n}$, alors la suite (x_k) converge vers x^*.
4. Soit $\lambda_0 \in \mathbb{R}^p$ et $\rho > 0$. On construit les suites (λ_k) et (x_k) telles que $Ax_0 = b - C^T\lambda_0$ et
$$\begin{cases} Ax_{k+1} = b - C^T\lambda_{k+1}, \\ \lambda_{k+1} = \lambda_k + \rho(Cx_k - d). \end{cases}$$
   (a) Montrer que $\|\lambda_{k+1} - \lambda^*\|^2 \leq \|\lambda_k - \lambda^*\|^2 + \left(\rho^2\|C\|^2 - 2\rho\alpha_1\right)\|x_k - x^*\|^2$.
   (b) En déduire qu'il existe $\rho_1 > 0$ tel que si $\rho < \rho_1$, la suite (x_k) converge vers x^*.
5. On considère la fonction pénalisée :
$$f_\lambda(x) = f(x) + \frac{\lambda}{2}\|Cx - d\|^2,$$
où $\lambda > 0$ est un paramètre de pénalisation.
   (a) Montrer que f_λ possède un unique minimum x_λ sur $\mathbb{R}^n$.
   (b) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $f(x_\lambda) \leq f(x^*)$.
   (c) En déduire que la suite (x_λ) est bornée.
   (d) Soit (λ_n) une suite telle que $\lambda_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Montrer que la suite (x_{λ_n}) converge vers x^*.