Université de M'sila
Faculté des sciences
Département de Physique

Le :01/06/2022
Durée : $\boldsymbol{1h30}$

Examen de : *Fonction de la variable complexe (MATH4)*

Exercice N° 1: (6 pts) soit la fonction $f(z) = \ln z$

1) Calculer $f(-1); f(i); f(1+i)$

2) Démontrer que la fonction $f(z)$est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.

3) Déduire sa dérivée.

Exercice N° 2: (7.5 pts)

Calculer les intégrales :

$$\oint_C \frac{\mathbf{z^2 + \sin z}}{\boldsymbol{z^2 + 1}} \boldsymbol{dz} \quad ; \oint_C \frac{\mathbf{e^{z^2}}}{\boldsymbol{(z-\pi)^3}} \boldsymbol{dz}$$

1. C est le cercle $|z-1| = \frac{1}{2}$

2. C est le cercle $|z| = 4$

Exercice N° 3: (6.5 pts)

1. Chercher la série de Laurent de la fonction $f(z) = z^2 \sin\frac{\pi}{z}$ autour du point $z = 0$ (indiquer le type de singularité)
2. En déduire l'intégrale $\oint_C z^2 \sin\frac{\pi}{z}\ dz$ où C est le cercle $|z|=10$

Bonne Chance

S.Bounab

Correction de l'Examen Final

Solution de l'exercice N° 1:

$$f(z) = \ln z = \ln|z| + i\, arg z \ldots\ldots (0.5pt)$$

$$f(-1) = \ln -1 = \ln|-1| + i\, arg - 1 = i\pi \ldots\ldots\ldots\ldots (0.5pt)$$

$$f(i) = \ln i = \ln|i| + i\, arg i = i\frac{\pi}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (0.5pt)$$

$$f(1+i) = \ln|1+i| + i\, arg 1 + i = \frac{\ln 2}{2} + i\frac{\pi}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots (0.5pt)$$

$$\forall z \in C^* : f(z) = \ln z = \ln|z| + i\, arg z = \underbrace{\frac{1}{2} ln(x^2+y^2)}_{P} + i \underbrace{arc\, tg \frac{y}{x}}_{Q} \ldots\ldots\ldots\ldots (0.5pt)$$

On vérifiée les conditions de Cauchy-Riemann pour la fonction f(z) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \ldots\ldots (0.25pt) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{y}{x^2+y^2} \ldots\ldots (0.25pt) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = -\dfrac{y}{x^2+y^2} \ldots\ldots (0.25pt) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y} = \dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \ldots\ldots (0.25pt) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2+y^2} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \ldots\ldots\ldots\ldots (0.25pt) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{y}{x^2+y^2} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \ldots\ldots\ldots\ldots (0.25pt) \end{cases}$$

Les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées alors f(z) est holomorphe, et sa dérivée égale à :

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \ldots\ldots\ldots (1pt)$$

$$\Longrightarrow f'(z) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z} \ldots\ldots\ldots\ldots (1pt)$$

Solution de l'exercice N° 2:

1) Pour $\oint_C \frac{z^2+\sin z}{z^2+1} dz$, On observe que $g(z) = \frac{z^2+\sin z}{z^2+1} = \frac{z^2+\sin z}{(z+i)(z-i)}$ a deux points singuliers en

$z_1 = -i \ et \ z_2 = i$

S.Bounab

i. Pour le chemin $C_1 : |z-1| = \frac{1}{2}$ les deux points singuliers $z_1 = -i$ et $z_2 = i$ sont à l'extérieur (0.5pt) de C_1, alors g(z) est holomorphe à l'intérieur du cercle. Ainsi, on applique le théorème de Cauchy :

$$I_1 = \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\mathbf{z^2 + \sin z}}{\mathbf{z^2+1}} \boldsymbol{dz} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (0.5pt)$$

ii. Pour le chemin $C_2 : |z| = 4$, $z_1 = -i$ et $z_2 = i$ sont à l'intérieur de C_2(0.5pt), alors en utilisant la formule intégrale de Cauchy :

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (0.5pt)$$

Dans ce cas on considère, $f(z) = \mathrm{z}^2 + \sin \mathrm{z}$

Et on a la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(z+i)(z-i)}$ donne :

$$\frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{(z+i)}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (1pt)$$

$$\Longrightarrow \oint_{|z|=4} \frac{\mathrm{z}^2 + \sin \mathrm{z}}{\boldsymbol{z^2} + \mathbf{1}} \boldsymbol{dz} = \oint_{|z|=4} \frac{\mathrm{z}^2 + \sin \mathrm{z}}{(z+i)(z-i)} \boldsymbol{dz} = \frac{1}{2i} \oint_{|z|=4} \left(\frac{\mathrm{z}^2 + \sin \mathrm{z}}{z-i} - \frac{\mathrm{z}^2 + \sin \mathrm{z}}{(z+i)}\right) \boldsymbol{dz}$$

$$= \frac{1}{2i}\big(2\pi i f(i) - 2\pi i f(-i)\big) = \pi(-1 + \sin i - (-1 - \sin i))$$

$$= 2\pi \sin i \ldots\ldots.. (0.5pt) = 2\pi i \,\mathrm{sh}\, 1 \ldots.. (0.5pt)$$

2) Pour $\oint_C \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{z}^2}}{(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\pi})^3} \boldsymbol{dz}$, On observe que $g_2(z) = \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{z}^2}}{(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\pi})^3}$ a un point singulier en $z_0 = \pi$:

i. Pour le chemin $C_1 : |z-1| = \frac{1}{2}$ le point singulier $z_0 = \pi$ est à l'extérieur de C_1(0.5pt) ; alors g(z) est holomorphe à l'intérieur du cercle. Ainsi, en utilisant le théorème de Cauchy :

$$\boldsymbol{I_2} = \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{z}^2}}{(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\pi})^3} \boldsymbol{dz} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (0.5pt)$$

1) Pour le chemin $C_2 : |z| = 4$, $z_0 = \pi$ est à l'intérieur de C_2, (0.5pt) alors on utilise la 2[iem] formule intégrale de Cauchy :

S.Bounab

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i f^{(n)}(z_0)}{n!} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (0.5pt)$$

$$I_2 = \oint_{|z|=4} \frac{e^{z^2}}{(z-\pi)^3} dz = \frac{2\pi i f''(\pi)}{2!} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (0.5pt)$$

Dont $f(z) = e^{z^2} \Longrightarrow f''(z) = (2+4z^2)e^{z^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (0.5pt)$

$$\oint_{|z|=4} \frac{e^{z^2}}{(z-\pi)^3} dz = \pi i(2+4\pi^2)e^{\pi^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (0.5pt)$$

Solution de l'exercice N° 3:

1. La série de Laurent de la fonction $f(z) = z^2 \sin\frac{1}{z}$ en $z_0 = 0$

On pose $t = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{t}$

Par la suit on trouve que $f(t) = \frac{1}{t^2}\sin t$

Et on a le développement de $\sin t$ est donné par :

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots \dots\dots (1pt)$$

$$f_2(t) = \frac{1}{t^2}\sin t = \frac{1}{\mathrm{t}} - \frac{t}{3!} + \frac{t^3}{5!} - \frac{t^5}{7!} + \cdots$$

$$\dots$$

Finalement on trouve :

$$f(z) = \underbrace{z}_{\text{P.Anlytique}(0.5\text{pt})} \underbrace{-\frac{1}{3!\,z} + \frac{1}{5!\,z^3} - \frac{1}{7!\,z^5} + \cdots}_{Partie\ principale(0.5\text{pt})} \dots\dots (1pt)$$

On remarque que la partie principale est infinie(0.5pt) alors la fonction $f(z) = z^2 \sin\frac{1}{z}$ a un point singulier essentiel(0.5pt) en $z_0 = 0$ et $a_{-1} = -\frac{1}{3!}$

2. Pour le chemin C: $|z| = 10$, le point singulier de f(z) $z_0 = 0$ est à l'intérieur de la courbe C; alors en appliquant Le théorème des résidus :

$$\oint_C z^2 \sin\frac{\pi}{z}\ dz = 2\pi i \times Res(f, 0) \dots\dots (1pt)$$

S.Bounab

$$avec\ Res(f,0) = a_{-1} = \frac{-1}{3!} \ldots\ldots (1pt)$$

$$\Longrightarrow \oint_C z^2 \sin\frac{\pi}{z}\, dz = 2\pi i \times a_{-1} = \frac{-\pi i}{3} \ldots\ldots (0.5pt)$$

S.Bounab