Correction : ***Exo 1***

i. 1) $F \neq \theta$ car le vecteur $A = (0,0,0,0) \in F$ 0.25

2) $\forall (X,Y) \in F, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, (\alpha X + \beta Y) \in F$ 0.25

$X \in F \iff X = (x,y,z,t) \ : x = 2y = -z = t$

$Y \in F \iff X = (x',y',z',t') \ : x' = 2y' = -z' = t'$

Donc $\alpha X + \beta Y = \alpha(x,y,z,t) + \beta(x',y',z',t') = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z', \alpha t + \beta t')$ 0.25

Vérifions les conditions : On a $\alpha x + \beta x' = \alpha(2y) + \beta(2y') = 2(\alpha y + \beta y')$ et

$\alpha x + \beta x' = \alpha(-z) + \beta(-z') = -(\alpha z + \beta z')$ et 0.25

$\alpha x + \beta x' = \alpha(t) + \beta(t') = (\alpha t + \beta t')$ 0.25

Donc $(\alpha X + \beta Y) \in F$ enfin 1)+2) F est sous espace vectoriel

1) $G \neq \theta$ car le vecteur $A = (0,0,0,0) \in G$ 0.25

2) $\forall (X,Y) \in G, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, (\alpha X + \beta Y) \in G$ 0.25

$X \in G \iff X = (x,y,z,t) \ : x + y - z - t = 0$

$Y \in G \iff X = (x',y',z',t') \ : x' + y' - z' - t' = 0$

Donc $\alpha X + \beta Y = \alpha(x,y,z,t) + \beta(x',y',z',t') = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z', \alpha t + \beta t')$

Vérifions la condition : On a $(\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y') + (\alpha z + \beta z') + (\alpha t + \beta t') =$ 0.25 0.25

$\alpha(x + y - z - t) + \beta(x' + y' - z' - t') = \alpha(0) + \beta(0) = 0$

Donc $(\alpha X + \beta Y) \in G$ enfin 1)+2) F est sous espace vectoriel

ii. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \ x = 2y = -z = t \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ -2y \\ 2y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \ y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \ y \in \mathbb{R} \right\}$ 0.25 0.25

Donc $\forall X \in F \iff X = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = y v_1$ donc $\{v_1\}$ est Partie Génératrice libre donc une base et la 0.25

$\dim F = 1$

$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad x + y - z - t = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad x = -y + z + t \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -y + z + t \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right\} =$ 0.25

$\left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ 0.25 0.25

Donc $\forall X \in G \iff X = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = y w_1 + z w_2 + t w_3$ on conclue que 0.25 0.25

$\{w_1, w_2, w_3\}$ est P Génératrice on peut vérifier facilement qu'ils sont libre donc $\{w_1, w_2, w_3\}$ est une base et $\dim G = 3$

iii. on a : $\dim \mathbb{R}^4 = \dim F + \dim G \iff 4 = 1 + 3$ donc $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$ 0.25

1 0.5

Correction : **Exo 2**

Application linéaire $\forall\,(X,Y)\in\mathbb{R}^3,\forall\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, f(\alpha X+\beta Y)=\alpha f(X)+\beta f(Y)$

$$\alpha X+\beta Y=\alpha\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x+\beta x'\\\alpha y+\beta y'\\\alpha z+\beta z\end{pmatrix}\Longrightarrow f(\alpha X+\beta Y)=f\begin{pmatrix}\alpha x+\beta x'\\\alpha y+\beta y'\\\alpha z+\beta z\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}(\alpha x+\beta x')-(\alpha y+\beta y')+2(\alpha z+\beta z')\\2(\alpha x+\beta x')+8(\alpha y+\beta y')-(\alpha z+\beta z')\\-(\alpha x+\beta x')-9(\alpha y+\beta y')+3(\alpha z+\beta z')\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha(x-y+2z)+\beta(x'-y'+2z')\\\alpha(2x+8y-z)+\beta(2x'+8y'-z')\\\alpha(-x-9y+3z)+\beta(-x'-9y'+3z')\end{pmatrix}=$$

$$\alpha\begin{pmatrix}(x-y+2z)\\(2x+8y-z)\\(-x-9y+3z)\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}(x'-y'+2z')\\(2x'+8y'-z')\\(-x'-9y'+3z')\end{pmatrix}=\alpha f(X)+\beta f(Y)$$

2

0.5

$Ker(f)=\{X\in\mathbb{R}^3: f(X)=0_{\mathbb{R}^3}\}=\left\{X\in\mathbb{R}^3:\ (\{Y\in\mathbb{R}^3: X\in\mathbb{R}^3\})=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=\{X\in\mathbb{R}^3:\ x-y+$ $2z=0,\ 2x+8y-z=0,\ -x-9y+3z=0\}=\{X\in\mathbb{R}^3:\ x-y+2z=0,\ 2x+8y-z=0,\ \}$ *on a*

$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}x-y=-2z\\2x+8y=+z\end{cases}\Leftrightarrow 2(1)-(2): 6y=-3z\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}z$ *on porte le resultat dans* (1)*on obtient :*

$x=y-2z=-\frac{1}{2}z-2z=-\frac{5}{2}z$

En fin $Ker(f)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3: x=-\frac{5}{2}z, y=-\frac{1}{2}z \text{ et } z\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}z\\-\frac{1}{2}z\\z\end{pmatrix}, z\in\mathbb{R}\right\}=\left\{z\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}, z\in\mathbb{R}\right\}$*donc*

1

$\forall\,X\in Ker(f), X=z\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}=zv_1$*donc* $\{v_1\}$ *est une base Est la* $dimKer(f)=1$

0.5

$Im(f)=\{Y\in\mathbb{R}^3: X\in\mathbb{R}^3\}=\left\{\begin{pmatrix}x-y+2z\\2x+8y-z\\-x-9y+3z\end{pmatrix}:(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\2x\\-x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-y\\8y\\-9y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2z\\-z\\3z\end{pmatrix}:(x,y,z)\in\right.$ $\left.\mathbb{R}^3\right\}\left\{x\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\8\\-9\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}:(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}$ 1

1

donc $\forall\,Y\in Im(f), Y=xv_1+yv_2+zv_3$ *on remarque que* $3v_1-v_2=2v_3$ *alors*

$$Y=xv_1+yv_2+zv_3=xv_1+y(3v_1-2v_3)+zv_3=(x+3y)v_1+(-2y+z)v_3$$

Donc $\{v_{1*}, v_3\}$ *c'est la P Génératrice et Libre donc une base et* $dimIm(f)=2$ 1

La matrice associée à l'application linéaire f : on écrit

$f(e_1)=(1,2,-1)=e_1+2e_2-e_3$, $f(e_2)=(-1,8,-9)=-e_1+8e_2-9e_3$, $f(e_3)=(2,-1,3)=2e_1-e_2+3e_3$

$$\text{Donc } A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&8&-1\\-1&-9&3\end{pmatrix}$$ 1

Correction : ***Exo 3***

$f_1 = (-3,1,2), \quad f_2 = (1,0,1), \quad f_3 = (0,1,-1)$ *Une base ?*

P. Génératrice : $\forall X \in \mathbb{R}^3 : X = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\alpha + \beta \\ \alpha + \gamma \\ 2\alpha + \beta - \gamma \end{pmatrix}$

1

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \begin{cases} -3\alpha + \beta = x \\ \alpha + \gamma = y \\ 2\alpha + \beta - \gamma = z \end{cases} \text{ on troive } \begin{cases} \alpha = \frac{1}{6}(-x + y + z) \\ \beta = \frac{1}{2}(x + y + z) \\ \gamma = \frac{1}{6}(x + 5y - z) \end{cases}$$

En fin $X \in \mathbb{R}^3 : X = \frac{1}{6}(-x + y + z)f_1 + \beta = \frac{1}{2}(x + y + z)f_2 + \gamma = \frac{1}{6}(x + 5y - z)f_3$ *donc* $\{f_1, f_2, f_3\}$ *P.G* 1

Si on pose $X = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$ *on trouvera* $\alpha = \beta = \gamma = 0$ *donc* $\{f_1, f_2, f_3\}$ *P.Libre*

En fin $\{f_1, f_2, f_3\}$ *est une* ***base*** *de donc* $\mathbb{R}^3$.

$$f_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -3e_1 + e_2 + 2e_3, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3e_1 + 0e_2 + e_3, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0e_1 + e_2 - e_3$$

La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ *vers* $\mathcal{B}'$ $P = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 2

$P.Q = I$ *donc* $Q = P^{-1}$ 0.5

$$B = [Q.A].P = \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 8 & -1 \\ -1 & -9 & 3 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

0.5 0.5

$$\frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 12 \\ 12 & 48 & -6 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 8 & -1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

0.5

E fin $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ *C'est la matrice associée à l'application f dans la* $\mathcal{B}'$

Université de M'sila
Faculté : Mathématiques & Informatique
Module : Algèbre 2

Le 25/05/2022
Durée de : 1h30mn

Contrôle

Exo (01) 6pts: Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, soit :

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x = 2y = -z = t\} \text{ et } G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y - z - t = 0\}$$

i. *Montrer que F et G sont des Sous-Espaces Vectoriels de* $\mathbb{R}^4$
ii. *Déterminer leur base et leur dimension*
iii. *Montrer que* $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$

Exo (02) 8pts: *On désigne par* $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *Et*

On définit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *par :* $f(x,y,z) = (x - y + 2z, 2x + 8y - z, -x - 9y + 3z)$

i. *Montrer que f est une Application linéaire*
ii. *Donner la base et la dimension du Noyau et de l'Image de f « Ker(f) et Im(f) »*
iii. *Donner la matrice A associée à l'application f par rapport à la base* $\mathcal{B}$

Exo (03) 6pts: *Soient les trois vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *suivants*

$$f_1 = (-3,1,2), \quad f_2 = (1,0,1), \quad f_3 = (0,1,-1)$$

i. *Montrer que* $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, f_3\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$
ii. *Donner la matrice de passage P de* $\mathcal{B}$ *vers* $\mathcal{B}'$
iii. *Soit la matrice* $Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$, *montrer que Q et l'inverse de P*
iv. *Calculer la matrice* $B = Q.A.P$, *que représente cette matrice*

Bonne Chance