Université de M'sila
Faculté : Math & Informatique
Module : Algèbre 2

Le06/06/2022
Durée de : 1h30mn

Contrôle d'Algèbre 2

Exo 01 : (9 Pts) : *Soit* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$. *Soit f une application linéaire de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *définie par :*

$$f(e_1) \quad -3e_1 + 2e_2 - 4e_3$$
$$f(e_2) \quad e_1 - 2e_2 + 2e_3$$
$$f(e_3) \quad 4e_1 - 2e_2 + 5e_3$$

1. *Déterminer la matrice A de f dans la base canonique*
2. *Soit* $E = \{X \in \mathbb{R}^3 : f(X) = X\}$
   a. *Montrer que E est un sous-espace vectoriel*
   b. *Donner la base est la dimension de E*
   c. *Donner la base et la dimension du Ker(f) et déduire la dimension de Im(f).*

Exo 02 : (5 Pts) : *Soit la matrice B* $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. *Calculer* $(B - 2I)^3$
2. *Est-ce que* B *est inversible*
3. *Si c'est oui déterminer* B^{-1}*en fonction de* I, B *et* B^2

Exo 03 : (6 Pts) : *Soit l'application f définie par :* $f(x, y, z) \quad \begin{pmatrix} x - 2y + z \\ x + y \\ x + y + z \end{pmatrix}$

1. *Donner la matrice de passage* ***P*** *de B vers B'*
2. *Donner la matrice de passage* ***Q*** *de B' vers B.*
3. *Donner la matrice* ***A*** *associée à l'application f dans la base B*

Avec $\left\{e_1 \quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2 \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3 \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ *et* $\mathcal{B}' = \left\{e_1 \quad \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, e_2 \quad \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, e_3 \quad \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\right\}$

Bonne chance

Correction

1. $A=\begin{pmatrix}-3&1&4\\2&-2&-2\\-4&2&5\end{pmatrix}$ *(1)*

2. $E=\{X\in\mathbb{R}^3 : f(X)=X\}$

   a) - *Soit X=0 alors* $f(0)=0$ *« f une application linéaire » donc* $X\in E$ *donc* $E\neq\Phi$

   - $\forall(X,Y)\in E^2, \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\ \alpha X+\beta Y\in E$

     On pose $Z=\alpha X+\beta Y$

   $$f(Z)=f(\alpha X+\beta Y)\overset{App\ Linéaire}{\cong} f(\alpha X)+f(\beta Y)\overset{App\ Linéaire}{\cong}\alpha f(X)+\beta f(Y)=\alpha X+\beta Y=Z$$

   Donc $Z=(\alpha X+\beta Y)\in E$ *.Enfin E est un sous espace vectoriel* *(2)*

   b) $E=\{X\in\mathbb{R}^3 : f(X)=X\}$ *et on a* $f(X)=AX$ *donc* $E=\{X\in\mathbb{R}^3 : AX=X\}=\{X\in\mathbb{R}^3 : AX-X=0\}=\{X\in\mathbb{R}^3 : (A-I)X=0\}$

   $$(A-I)X=0\Leftrightarrow\left[\begin{pmatrix}-3&1&4\\2&-2&-2\\-4&2&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

   $$\begin{pmatrix}-4&1&4\\2&-3&-2\\-4&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}\begin{cases}-4x+y+4z=0\\2x-3y-2z=0\\-4x+2y+4z=0\end{cases}$$

   L'équation (3)-(1) nous donne $y=0$. *En remplaçant dans (1) on trouve* $x=z$

   $$En\ fin\ E=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 : y=0, x=z\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

   Donc $\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$ *(2) est la base de E et* ***dim E =1*** *(1)*

   c) $$Ker(f)=\{X\in\mathbb{R}^3 : f(X)=0\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 : \begin{matrix}-3x+y+4z=0\\2x-2y-2z=0\\-4x+2y+5z=0\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 : \begin{matrix}-3x+y+4z=0\\x-y-z=0\\-4x+2y+5z=0\end{matrix}\right\}=$$

   On remarque (1)-(2)=(3) donc $Ker(f)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 : \begin{matrix}-3x+y+4z=0\\x-y-z=0\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 : x=3y,\ z=2y\right\}$

   $\left\{\begin{pmatrix}3y\\y\\2y\end{pmatrix} : y\in\mathbb{R}\right\}=\left\{y\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} : y\in\mathbb{R}\right\}$ *Donc* $\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{1}\\\mathbf{2}\end{pmatrix}$ *(1) est la base de Ker(f) et* ***dimKer(f) =1*** *(1)*

   $$\boldsymbol{Dim}\ \mathbb{R}^3=\boldsymbol{dim\ Ker}(f)+\boldsymbol{dim\ Im}(f)\Rightarrow\boldsymbol{dimIm}(f)=\mathbf{2}\quad (1)$$

Exo 02): $B-2I=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&-2\\-1&1&-2\end{pmatrix}$ *(1)* , $(B-2I)^2=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$ *(1)* $(B-2I)^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ *(1)*

$\det B=\begin{vmatrix}3&0&1\\-1&3&-2\\-1&1&0\end{vmatrix}=8$ *donc B est inversible* *(1)*

$$(B-2I)^3=B^3-6B^2+12B-8I=0\Rightarrow B^3-6B^2+12B=8I$$

$$B\left(\frac{1}{8}B^2-\frac{3}{4}B+\frac{3}{2}I\right)=BB^{-1}\Rightarrow\boldsymbol{B^{-1}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}\boldsymbol{B^2}-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{B}+\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{I}\ (1)$$

Exo 03): $P=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&3\\0&-1&0\end{pmatrix}$ **(1,5)** $Q=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}&-\frac{2}{10}\\0&0&-1\\-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&\frac{2}{5}\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}6&-2&-2\\0&0&-10\\-2&4&4\end{pmatrix}$ **(3)** $A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ **(1,5)**