

Chapitre II. Quadripôles et filtres passifs	Error! Bookmark not defined.
Introduction	22
1. Définition des quadripôles	22
2. Matrices représentatives des quadripôles	22
3. Quadripôle passif-actif	22
4. Matrice d'un quadripôle paramètres et schémas équivalents	22
4.1. Matrice impédance Z	23
4.2 Matrice admittance Y	24
4.3 Matrice hybride H	26
4.4 Matrice Transfert [T]	26
5. Représentation des quadripôles en schéma équivalent	28
5.1 Représentation impédance	28
5.2 Représentation admittance	28
5.3 Représentation Hybrides	28
6. Caractéristiques d'un quadripôle en charge attaqué par une source réelle.	29
6.1 Impédance d'entrée	29
6.2 Impédance de sortie	30
6.3 Gain en tension	30
6.4 Gain en courant	31
6.5 Gain composite en tension GVC	31
6.6 Gain composite en courant GAC	32
7. Associations des quadripôles	32
7.1 Association série-série	32
7.2 Association parallèle-parallèle	34
7.3 Lien entre les paramètres impédances et admittances	35
7.4 Association série parallèle	35
7.5 Association en cascade (en chaîne)	36
7.6 Lien entre les paramètres	37
8. Les Filtres passifs	38
8.1 Les principaux types de filtres	38
8.2 Fonction de transfert complexe d'un filtre	39
8.3 Filtre passe-bas du premier ordre	40
8.4 Filtre passe-haut du premier ordre	42
8.5 Filtre passe-bande	45
8.6 Filtre coupe-bande	48

Introduction

Le deuxième chapitre est divisé en deux parties : La première est consacrée au quadripôles, définitions, les différentes matrices représentatives d'un quadripôle ainsi que les paramètres fondamentaux tel que l'impédance d'entrée, de sortie, les gains en tension et en courant. La deuxième partie est une représentation des différents filtres suivie d'une étude détaillée sur chaque type de filtre.

1. Définition des quadripôles

Un quadripôle est un circuit électrique constitué d'un certain nombre d'éléments passifs et actifs muni de quatre bornes d'où son appellation. Il comporte deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie (figure II.1) :

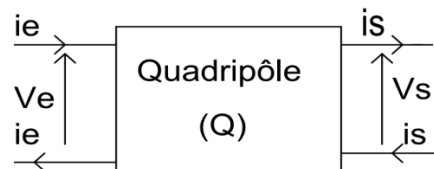


Figure II.1. Schéma représentatif d'un quadripôle

Le quadripôle est caractérisé par quatre paramètres électriques : tension et courant d'entrée V_e et I_e , et tension et courant de sortie V_s et I_s . Deux de ces variables sont indépendantes. Les autres y sont liées par les paramètres du quadripôle. Dans les conditions normales d'utilisation, le quadripôle (Q) est attaqué en entrée par une source de tension $e?$ et son impédance interne Z_g et fermé en sortie sur une charge d'impédance $Z_c?$.

2. Matrices représentatives des quadripôles

Les variables V_e, V_s, I_e et I_s sont liées entre elles par des équations et forment plusieurs types de matrices, qui sont utilisées pour représenter les quadripôles. Le choix du type de matrice est déterminé par les conditions du problème étudié.

3. Quadripôles passif et actif

Un quadripôle est dit passif s'il ne contient aucune source d'énergie, mais il ne contient que des éléments passifs RLC. Un quadripôle est dit actif s'il contient au moins une source d'énergie.

4. Matrice d'un quadripôle: paramètres et schémas équivalents

Si on considère le quadripôle de la figure ci-dessous

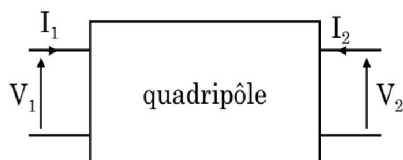


Figure II.2. Représentation conventionnelle d'un quadripôle

La représentation quadripôle a pour principal intérêt de simplifier considérablement l'étude des circuits électroniques.

4.1. Matrice impédance [Z]

Les tensions d'entrée et de sortie sont exprimées en fonction des courants d'entrée et de sortie. Les éléments de la matrice ont la dimension des impédances. On exprime les tensions en fonction des courants. Les éléments de la matrice ont la dimension d'impédances (résistances).

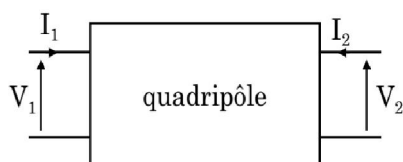


Figure II.3. Quadripôle impédance

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [Z] \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

$Z_{11} = \left(\frac{V_1}{I_1}\right)_{I_2=0}$: C'est l'impédance d'entrée avec sortie en circuit ouvert.

$Z_{12} = \left(\frac{V_1}{I_2}\right)_{I_1=0}$: C'est l'impédance de transfert inverse avec l'entrée en circuit ouvert.

$Z_{21} = \left(\frac{V_2}{I_1}\right)_{I_2=0}$: C'est l'impédance de transfert directe avec la sortie en circuit ouvert.

$Z_{22} = \left(\frac{V_2}{I_2}\right)_{I_1=0}$: C'est l'impédance de sortie avec l'entrée en circuit ouvert.

Exemple

Calculer les paramètres [Z] du quadripôle de la figure II.4.

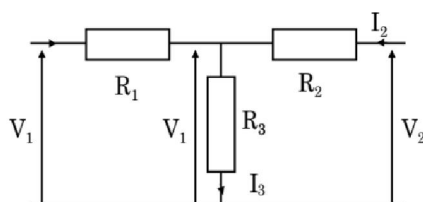


Figure II.4. Quadripôle impédance

Réponse

Nous avons

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases}$$

1. Première cas $I_1 = 0$:

$$\begin{cases} V_1 = Z_{12}I_2 = R_3I_2 \\ V_2 = Z_{22}I_2 = (R_2 + R_3)I_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_{12} = R_3 \\ Z_{22} = (R_3 + R_2) \end{cases}$$

2. Première cas $I_2 = 0$:

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 = (R_1 + R_3)I_1 \\ V_2 = Z_{21}I_1 = R_3I_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_{11} = (R_3 + R_1) \\ Z_{21} = R_3 \end{cases}$$

La matrice $[Z]$ donc est

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_1 + R_3) & R_3 \\ R_3 & (R_3 + R_2) \end{bmatrix}$$

4.2 Matrice admittance $[Y]$

On exprime les courants en fonction des tensions. Les éléments de la matrice ont la dimension d'admittances.

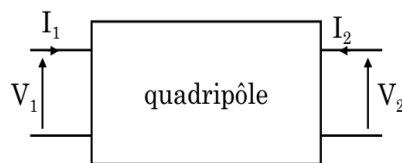


Figure II.5. Quadripôle admittance

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [Y] \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ V_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

$Y_{11} = \left(\frac{I_1}{V_1}\right)_{V_2=0}$: C'est l'admittance d'entrée avec sortie en court-circuit.

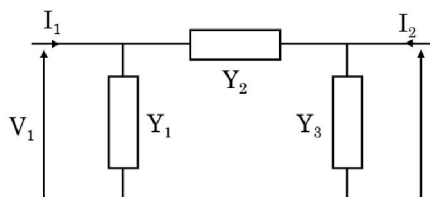
$Y_{12} = \left(\frac{I_1}{V_2}\right)_{V_1=0}$: C'est l'admittance de transfert directe avec l'entrée en court-circuit.

$Y_{21} = \left(\frac{I_2}{V_1}\right)_{V_2=0}$: C'est l'admittance de transfert inverse avec la sortie en court-circuit.

$Y_{22} = \left(\frac{I_2}{V_2}\right)_{V_1=0}$: C'est l'admittance de sortie avec l'entrée en court-circuit.

Exemple

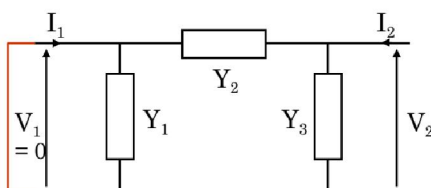
Calculer la matrice admittance pour le quadripôle de la figure ci-dessous



Réponse

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{cases}$$

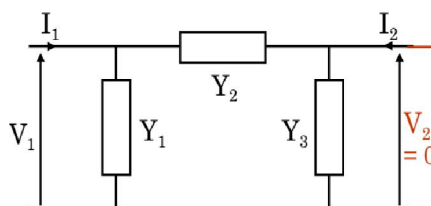
1. Première cas $V_1 = 0$:



$$\begin{cases} I_1 = Y_{12}V_2 = (Y_2 + Y_3)V_2 \\ I_2 = Y_{22}V_2 = -Y_2V_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_{12} = (Y_2 + Y_3) \\ Y_{22} = -Y_2 \end{cases}$$

2. Première cas $V_2 = 0$:



$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}V_1 = (Y_1 + Y_2)V_1 \\ I_2 = Y_{21}V_1 = -Y_2V_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_{11} = (Y_1 + Y_2) \\ Y_{21} = -Y_2 \end{cases}$$

La matrice $[Y]$ donc est

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Y_1 + Y_2) & -Y_2 \\ -Y_2 & (Y_2 + Y_3) \end{bmatrix}$$

4.3 Matrice hybride [H]

On exprime le courant de sortie et la tension d'entrée en fonction du courant d'entrée et de la tension de sortie. C'est une représentation utilisée généralement pour l'étude des transistors.

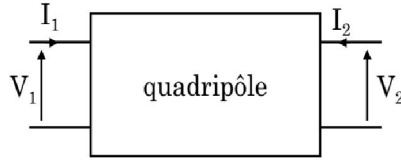


Figure II.6. Quadripôle Hybride

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [H] \times \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

$h_{11} = \left(\frac{V_1}{I_1}\right)_{V_2=0}$: C'est l'impédance d'entrée avec sortie en court-circuit.

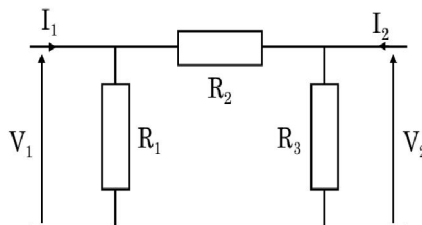
$h_{12} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)_{I_1=0}$: C'est le gain en tension inverse avec l'entrée en circuit ouvert.

$h_{21} = \left(\frac{I_2}{I_1}\right)_{V_2=0}$: C'est le gain en courant directe avec la sortie en court-circuit.

$h_{22} = \left(\frac{I_2}{V_2}\right)_{I_1=0}$: C'est l'admittance de sortie avec l'entrée en circuit ouvert.

Exemple

Calculer les paramètres hybrides [H] du quadripôle suivant



Réponse

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} & \frac{R_1}{R_1 + R_2} \\ -R_1 & \frac{R_1 + R_2 + R_3}{(R_1 + R_2) \cdot R_3} \end{bmatrix}$$

4.4 Matrice Transfert [T]

On exprime le courant de sortie et la tension d'entrée en fonction du courant d'entrée et de la tension de sortie. C'est une représentation utilisée généralement pour l'étude des transistors.

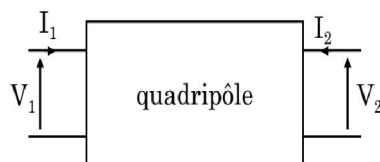


Figure II.7. Quadripôle de transfert [T]

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = [H] \times \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V_2 = T_{11} V_1 - T_{12} I_1 \\ I_2 = T_{21} V_1 - T_{22} I_1 \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

$T_{11} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)_{I_1=0}$: C'est le gain en tension avec la sortie en circuit ouvert.

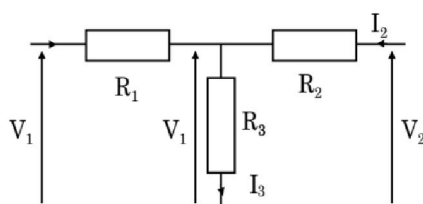
$T_{12} = \left(\frac{V_2}{I_1} \right)_{V_1=0}$: C'est l'impédance de transfert avec l'entrée en court-circuit.

$T_{21} = \left(\frac{I_2}{V_1} \right)_{I_1=0}$: C'est l'admittance **directe** avec la sortie en court-circuit.

$T_{22} = \left(\frac{I_2}{I_1} \right)_{V_1=0}$: C'est le gain en courant avec l'entrée en court-circuit.

Exemple

Calculer les paramètres [T] du quadripôle suivant



Réponse

Nous avons

$$\begin{cases} V_2 = T_{11} V_1 - T_{12} I_1 \\ I_2 = T_{21} V_1 - T_{22} I_1 \end{cases}$$

Première cas $V_1 = 0$:

$$\begin{cases} V_2 = T_{12} I_1 = (R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}) I_1 \\ I_2 = T_{22} I_1 = \frac{1}{R_3} (R_1 + R_3) I_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{12} = \left(R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} \right) \\ T_{22} = \left(1 + \frac{R_1}{R_3} \right) \end{cases}$$

1. Première cas $I_1 = 0$:

$$\begin{cases} V_2 = T_{11}V_1 = \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right)V_1 \\ I_2 = T_{21}V_1 = \left(\frac{1}{R_3}\right)V_1 \end{cases} \quad \begin{cases} T_{11} = \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) \\ T_{21} = \left(\frac{1}{R_3}\right) \end{cases}$$

La matrice [T] donc est :

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) & \left(R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3}\right) \\ \left(\frac{1}{R_3}\right) & \left(1 + \frac{R_1}{R_3}\right) \end{bmatrix}$$

5. Représentation des quadripôles en schéma équivalent

5.1 Représentation impédance

Il est parfois commode de remplacer le quadripôle étudié par son schéma équivalent donné par la matrice du quadripôle. La connaissance de ce schéma équivalent est particulièrement utile lorsque le réseau réel n'est pas connu et que la détermination des paramètres résulte de mesures.

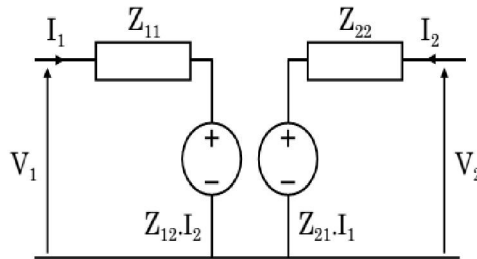


Figure II.8. Représentation d'un quadripôle en impédance

5.2 Représentation admittance

Schéma équivalent avec admittances et sources de courant

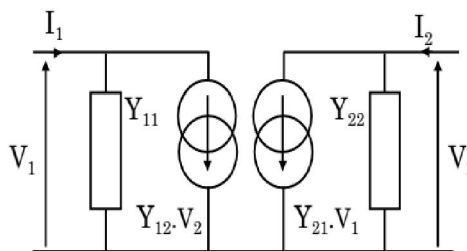


Figure II.9. Représentation d'un quadripôle en admittance

5.3 Représentation Hybrides

Le circuit équivalent est composé d'une impédance (h_{11}), d'une admittance (h_{22}), d'une source de tension ($h_{12} \cdot V_2$) et d'une source de courant ($h_{21} \cdot I_1$).

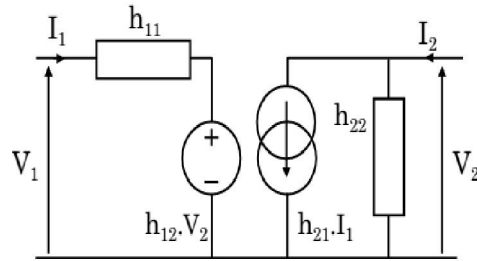


Figure II.10. Représentation d'un quadripôle en paramètres hybrides

6. Caractéristique d'un quadripôle en charge est attaqué par une source réelle.

Pour caractériser un quadripôle, on connecte un dipôle source (E_G, R_G) aux deux bornes d'entrée. Aux deux bornes de sortie, nous branchons un dipôle de charge noté Z_L comme le montre la figure ci-dessous.

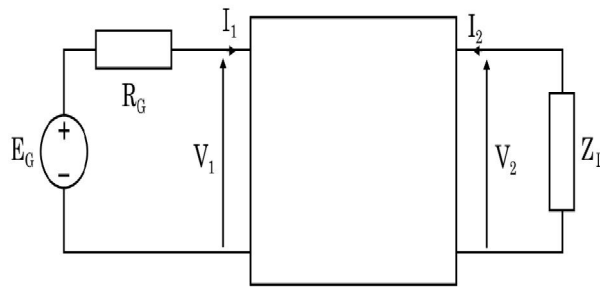


Figure II.11. Quadripôle en charge attaqué par une source de tension réelle.

Par exemple nous définissons un quadripôle Q par la matrice $[Z]$, les équations qui permettent la détermination de l'état du réseau sont :

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$$

$$E_G = V_1 + R_G I_1$$

$$V_2 = -Z_L I_2$$

6.1 Impédance d'entrée

L'impédance d'entrée est l'impédance vue par la source qui attaque le quadripôle à vide ou en charge.

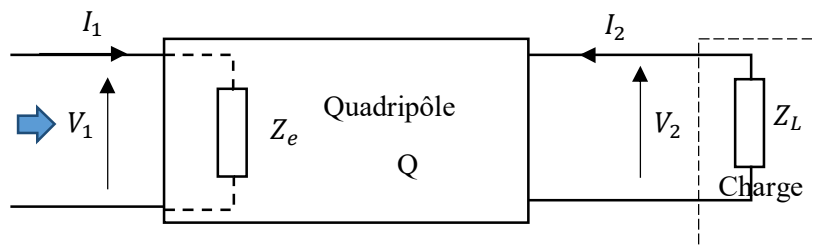


Figure II.12. L'impédance d'entrée d'un quadripôle.

L'impédance d'entrée est donnée par :

$$Z_e = \frac{V_1}{I_1} \quad (\text{II.5})$$

Si nous utilisons les équations précédentes relatives aux paramètres $[Z]$ nous trouvons

$$Z_e = \frac{Z_L Z_L + \Delta Z}{Z_L + Z_{22}} \quad (\text{II.6})$$

Où ΔZ est le déterminant de la matrice $[Z]$.

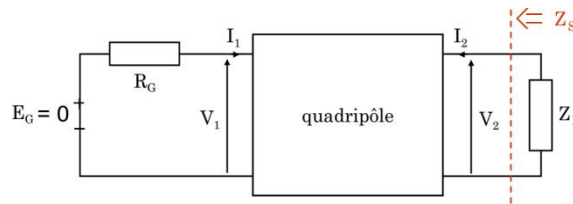
$$\Delta Z = Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21} \quad (\text{II.7})$$

6.2 Impédance de sortie

L'impédance est exprimée par la relation :

$$Z_s = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{E_G=0} \quad (\text{II.8})$$

C'est l'impédance vue à la sortie quand l'entrée est fermée par une impédance R_G , qui est l'impédance du générateur. Un calcul analogue au cas précédent donne :



$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 = -R_G I_1$$

$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$$

$$Z_s = \frac{V_2}{I_2}$$

Nous obtenons par analogie au précédent l'impédance de sortie :

$$Z_s = \frac{R_G Z_{22} + \Delta Z}{R_G + Z_{11}} \quad (\text{II.9})$$

6.3 Gain en tension

Le gain en tension est défini par le rapport entre la tension de sortie est celle d'entrée c.-à-d. :

$$G_V = \frac{V_2}{V_1} \quad (\text{II.10})$$

Si le quadripôle est défini par les paramètres $[Z]$ et par l'utilisation des équations

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$$

$$V_2 = -Z_L I_2$$

Nous obtenons :

$$G_V = \frac{Z_{21}Z_L}{Z_{11}Z_L + \Delta Z} \quad (\text{II.11})$$

6.4 Gain en courant

Le gain en courant est défini par le rapport entre le courant de sortie I_2 et le courant d'entrée I_1

$$G_A = \frac{I_2}{I_1} \quad (\text{II.12})$$

Si le quadripôle est défini par les paramètres $[Z]$ et par l'utilisation des équations et en utilisant les équations :

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$$

$$V_2 = -Z_L I_2$$

Nous obtenons :

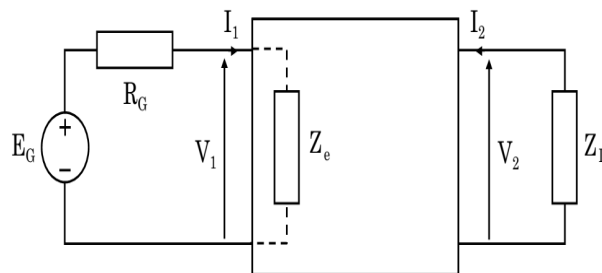
$$G_A = -\frac{Z_{21}}{Z_{22} + \Delta Z} \quad (\text{II.13})$$

6.5 Gain composite en tension G_{VC}

Le gain composite en tension est défini comme le rapport entre la tension de sortie V_2 et la tension de la source E_G :

$$G_{VC} = \frac{V_2}{E_G} \quad (\text{II.14})$$

Si on remplace le quadripôle par son équivalent comme le montre la figure ci-dessous



Si on multiplie le numérateur et le dénominateur par V_1

$$G_{VC} = \frac{V_2}{E_G} \times \frac{V_1}{V_1} = \frac{V_2}{V_1} \frac{V_1}{E_G} = G_V \times \frac{V_1}{E_G}$$

Nous utilisons la maille d'entrée et le diviseur de tension en aura :

$$V_1 = E_G \times \frac{Z_e}{R_G + Z_e}$$

On remplace cette dernière équation dans l'équation précédente on aura :

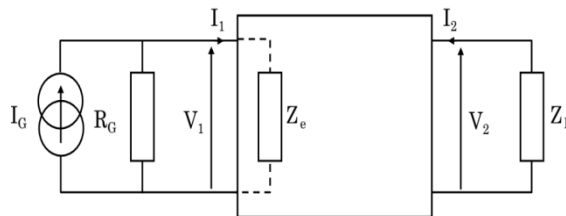
$$G_{VC} = G_V \times \frac{Z_e}{R_G + Z_e} \quad (\text{II.15})$$

6.6 Gain composite en courant G_{AC}

Le gain composite en courant est défini comme le rapport entre le courant de sortie I_2 et le courant délivré par la source de courant I_G :

$$G_{VC} = \frac{I_2}{I_G} \quad (\text{II.16})$$

Si on remplace le quadripôle par son équivalent en changeant la source de tension par une source de courant en utilisant le théorème de Norton comme le montre la figure ci-dessous.



Si on multiplie le numérateur et le dénominateur par I_1

$$G_{AC} = \frac{I_2}{I_G} \times \frac{I_1}{I_1} = \frac{V_2}{I_1} \frac{I_1}{I_G} = G_A \times \frac{I_1}{I_G}$$

Nous utilisons la maille d'entrée et le diviseur de tension on aura :

$$I_1 = I_G \times \frac{R_G}{R_G + Z_e}$$

On remplace cette dernière équation dans l'équation précédente on aura :

$$G_{AC} = G_A \times \frac{R_G}{R_G + Z_e} \quad (\text{II.17})$$

Ce gain n'a de sens que si la charge est présente : $I_2 \neq 0$

7. Associations des quadripôles

7.1 Association série-série

Soient les deux quadripôles Q' et Q'' possédant respectivement les matrices impédances $[Z']$ et $[Z'']$ qui sont montés en série-série comme la montre la figure ci-dessous.

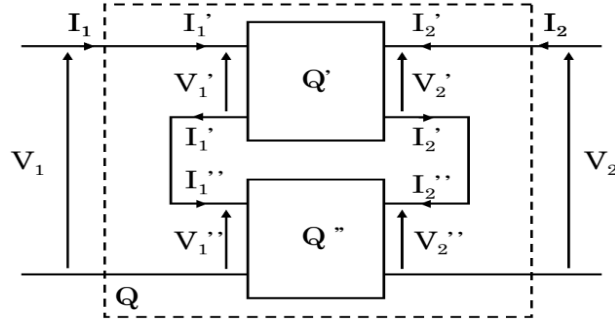


Figure II.13. Quadripôle associé en série-série

On utilise les matrices impédances $[Z']$ et $[Z'']$ des deux quadripôles associés.

$$[Z'] = \begin{bmatrix} Z_{11}' & Z_{12}' \\ Z_{21}' & Z_{22}' \end{bmatrix} \quad (\text{II.18})$$

$$[Z''] = \begin{bmatrix} Z_{11}'' & Z_{12}'' \\ Z_{21}'' & Z_{22}'' \end{bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

Alors

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \end{bmatrix} = [Z'] \times \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}' & Z_{12}' \\ Z_{21}' & Z_{22}' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \end{bmatrix} \quad (\text{II.20})$$

$$\begin{bmatrix} V_1'' \\ V_2'' \end{bmatrix} = [Z''] \times \begin{bmatrix} I_1'' \\ I_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}'' & Z_{12}'' \\ Z_{21}'' & Z_{22}'' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1'' \\ I_2'' \end{bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

Comme

$$\begin{cases} I_1 = I_1' = I_1'' \\ I_2 = I_2' = I_2'' \end{cases} \text{ et } \begin{cases} V_1 = V_1' + V_1'' \\ V_2 = V_2' + V_2'' \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

Alors

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1'' \\ V_2'' \end{bmatrix} \quad (\text{II.23})$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [Z'] \times \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \end{bmatrix} + [Z''] \times \begin{bmatrix} I_1'' \\ I_2'' \end{bmatrix} \quad (\text{II.24})$$

$$= [Z'] \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + [Z''] \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$= ([Z'] + [Z'']) \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [Z] \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Alors

$$[Z] = [Z'] + [Z''] \quad (\text{II.25})$$

7.2 Association parallèle-parallèle

Soit les deux quadripôles Q' et Q'' possédant respectivement les matrices admittances $[Y']$ et $[Y'']$ est qui sont montés en parallèle-parallèle comme la montre la figure ci-dessous.

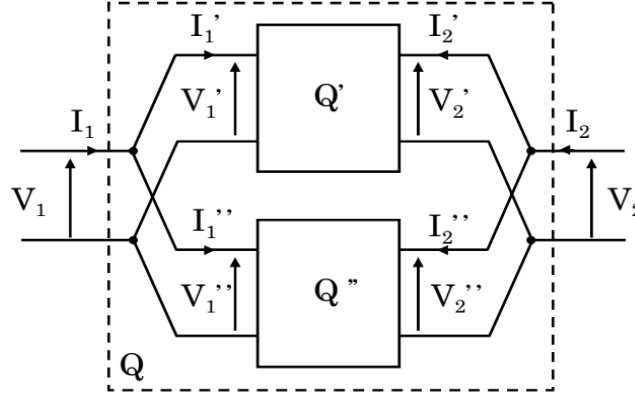


Figure II.14. Association des quadripôles parallèle-parallèle

On utilise les matrices admittances $[Y']$ et $[Y'']$ des deux quadripôles associés.

$$[Y'] = \begin{bmatrix} Y_{11}' & Y_{12}' \\ Y_{21}' & Y_{22}' \end{bmatrix} \quad (\text{II.26})$$

$$[Y''] = \begin{bmatrix} Y_{11}'' & Y_{12}'' \\ Y_{21}'' & Y_{22}'' \end{bmatrix} \quad (\text{II.27})$$

Alors

$$\begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \end{bmatrix} = [Y'] \times \begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}' & Y_{12}' \\ Y_{21}' & Y_{22}' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \end{bmatrix} \quad (\text{II.28})$$

$$\begin{bmatrix} I_1'' \\ I_2'' \end{bmatrix} = [Y''] \times \begin{bmatrix} V_1'' \\ V_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}'' & Y_{12}'' \\ Y_{21}'' & Y_{22}'' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1'' \\ V_2'' \end{bmatrix} \quad (\text{II.29})$$

Comme

$$\begin{cases} I_1 = I_1' + I_1'' \\ I_2 = I_2' + I_2'' \end{cases} \text{ et } \begin{cases} V_1 = V_1' = V_1'' \\ V_2 = V_2' = V_2'' \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

Alors

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1'' \\ I_2'' \end{bmatrix} \quad (\text{II.31})$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [Y'] \times \begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \end{bmatrix} + [Y''] \times \begin{bmatrix} V_1'' \\ V_2'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= [Y'] \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + [Y''] \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \\
 &= ([Y'] + [Y'']) \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 &\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [Y] \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

Alors

$$[Y] = [Y'] + [Y''] \quad (\text{II.32})$$

7.3 Lien entre les paramètres impédances et admittances

Pour des raisons de simplicité, la détermination de la matrice admittance peut passer par la détermination de la matrice impédance.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.33})$$

Avec

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta Z} \begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{21} \\ -Z_{12} & Z_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{II.34})$$

Et

$\Delta Z = Z_{22}Z_{11} - Z_{12}Z_{21}$ Comme nous avons noté auparavant.

7.4 Association série parallèle

Soit les deux quadripôles Q' et Q'' possédant les respectivement les matrices hybrides $[H']$ et $[H'']$ est qui sont montés en série-parallèle comme la montre la figure ci-dessous.

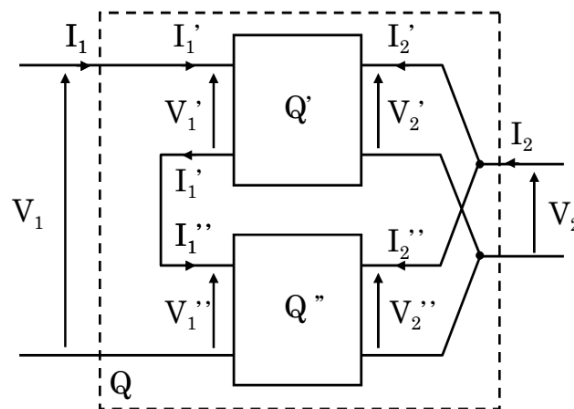


Figure II.15. Association des quadripôles série-parallèle

$$[H'] = \begin{bmatrix} h_{11}' & h_{12}' \\ h_{21}' & h_{22}' \end{bmatrix} \quad (\text{II.35})$$

$$[H''] = \begin{bmatrix} h_{11}'' & h_{12}'' \\ h_{21}'' & h_{22}'' \end{bmatrix} \quad (\text{II.36})$$

Alors

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ I_2' \end{bmatrix} = [H'] \times \begin{bmatrix} I_1' \\ V_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}' & h_{12}' \\ h_{21}' & h_{22}' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1' \\ V_2' \end{bmatrix} \quad (\text{II.37})$$

$$\begin{bmatrix} V_1'' \\ I_2'' \end{bmatrix} = [H''] \times \begin{bmatrix} I_1'' \\ V_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}'' & h_{12}'' \\ h_{21}'' & h_{22}'' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1'' \\ V_2'' \end{bmatrix} \quad (\text{II.38})$$

Comme

$$\begin{cases} I_1 = I_1' = I_1'' \\ V_2 = V_2' = V_2'' \end{cases} \text{ et } \begin{cases} V_1 = V_1' + V_1'' \\ I_2 = I_2' + I_2'' \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

Alors

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1' \\ I_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1'' \\ I_2'' \end{bmatrix} \quad (\text{II.40})$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [H'] \times \begin{bmatrix} I_1' \\ V_2' \end{bmatrix} + [H''] \times \begin{bmatrix} I_1'' \\ V_2'' \end{bmatrix} \quad (\text{II.41})$$

$$= [H'] \times \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + [H''] \times \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$= ([H'] + [H'']) \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [H] \times \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Alors

$$[H] = [H'] + [H''] \quad (\text{II.42})$$

7.5 Association en cascade (en chaîne)

Soient les deux quadripôles Q' et Q'' possédant respectivement les matrices de transfert [T'] et [T''] qui sont montés en cascade comme la montre la figure ci-dessous.

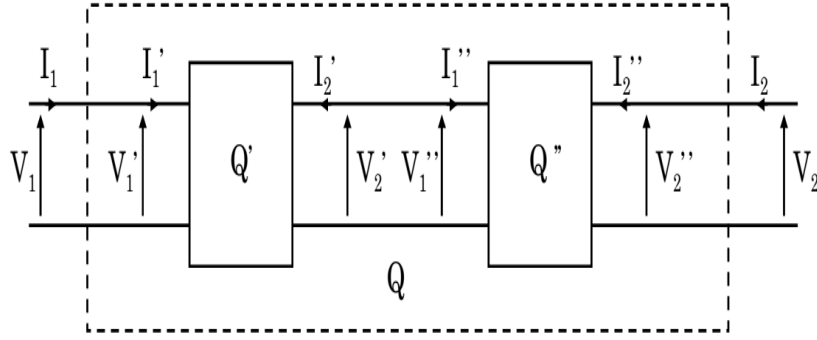


Figure II.16. Association des quadripôles en cascade

On utilise les matrices de transfert $[T']$ et $[T'']$ des deux quadripôles associés.

$$[T'] = \begin{bmatrix} T_{11}' & T_{12}' \\ T_{21}' & T_{22}' \end{bmatrix} \quad (\text{II.43})$$

$$[T''] = \begin{bmatrix} T_{11}'' & T_{12}'' \\ T_{21}'' & T_{22}'' \end{bmatrix} \quad (\text{II.44})$$

Alors

$$\begin{bmatrix} V_2' \\ I_2' \end{bmatrix} = [T'] \times \begin{bmatrix} V_1' \\ -I_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}' & T_{12}' \\ T_{21}' & T_{22}' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1' \\ -I_1' \end{bmatrix} \quad (\text{II.45})$$

$$\begin{bmatrix} V_2'' \\ I_2'' \end{bmatrix} = [T''] \times \begin{bmatrix} V_1'' \\ -I_1'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}'' & T_{12}'' \\ T_{21}'' & T_{22}'' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1'' \\ -I_1'' \end{bmatrix} \quad (\text{II.46})$$

Comme $I_1'' = I_2'$ et $V_1'' = V_2'$

Alors

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}'' & T_{12}'' \\ T_{21}'' & T_{22}'' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_2' \\ I_2' \end{bmatrix} \quad (\text{II.47})$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}'' & T_{12}'' \\ T_{21}'' & T_{22}'' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_{11}' & T_{12}' \\ T_{21}' & T_{22}' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.47})$$

$$= ([T'] \times [T'']) \times \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = [T] \times \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Alors

$$[T] = [T'] \times [T''] \quad (\text{II.48})$$

La matrice du transfert du quadripôle équivalent est égale au produit de la seconde matrice de transfert par la première. Ce produit n'est pas commutatif.

7.6 Lien entre les paramètres

Lien entre les paramètres des quadripôles est résumé dans le tableau suivant

	T	Z	Y	h
T	$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Z_{11}/Z_{21} & -\Delta Z/Z_{21} \\ 1/Z_{21} & -Z_{22}/Z_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -Y_{22}/Y_{21} & 1/Y_{21} \\ -\Delta Y/Y_{21} & Y_{11}/Y_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\Delta h/h_{21} & -h_{11}/h_{21} \\ -h_{22}/h_{21} & -1/h_{21} \end{bmatrix}$
Z	$\begin{bmatrix} T_{11}/T_{21} & \Delta T/T_{21} \\ 1/T_{21} & T_{22}/T_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Y_{22}/\Delta Y & -Y_{12}/\Delta Y \\ -Y_{21}/\Delta Y & Y_{11}/\Delta Y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \Delta h/h_{22} & h_{12}/h_{22} \\ -h_{21}/h_{22} & 1/h_{22} \end{bmatrix}$
Y	$\begin{bmatrix} T_{22}/T_{12} & -\Delta T/T_{12} \\ -1/T_{12} & T_{11}/T_{12} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Z_{22}/\Delta Z & -Z_{12}/\Delta Z \\ -Z_{21}/\Delta Z & Z_{11}/\Delta Z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1/h_{11} & -h_{12}/h_{11} \\ h_{21}/h_{11} & \Delta h/h_{11} \end{bmatrix}$
h	$\begin{bmatrix} T_{12}/T_{22} & \Delta T/T_{22} \\ -1/T_{22} & T_{21}/T_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \Delta Z/Z_{22} & Z_{12}/Z_{22} \\ -Z_{21}/Z_{22} & 1/Z_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1/Y_{11} & -Y_{12}/Y_{11} \\ Y_{21}/Y_{11} & \Delta Y/Y_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$

8. Les Filtres passifs

Souvent on a besoin d'annuler certaines fréquences ou garder qu'une bande de fréquences particulière. C'est notamment la fonction des filtres. Les quadripôles qu'on vient d'étudier les constituent. Leur rôle est de faire passer ou bloquer une bande précise de fréquences d'un signal alternatif.

On distingue deux familles de filtres :

a. Filtres passifs

Ce sont des filtres qui ne comportent que des résistances, des inductances et des condensateurs. Ils ne permettent pas d'amplifier (la puissance de sortie est inférieure à la puissance d'entrée).

b. Filtres actifs

Comportent d'un ou plusieurs éléments actifs tels que les amplificateurs opérationnels, les transistors et composants passifs. Ils permettent d'amplifier le signal.

8.1 Les principaux types de filtres

Suivant la tâche principale des filtres de laisser ou ne laisser pas certaines fréquences, les filtres se subdivisent en 4 types :

- Les filtres Passe-Bas : ne laissent passer que les fréquences basses ;
- Les filtres Passe-Haut : ne laissent passer que les fréquences hautes ;
- Les filtres Passe-Bande : ne laissent passer qu'une plage de fréquences ;
- Les filtres Coupe-Bande : ne laissent pas passer une plage de fréquences.

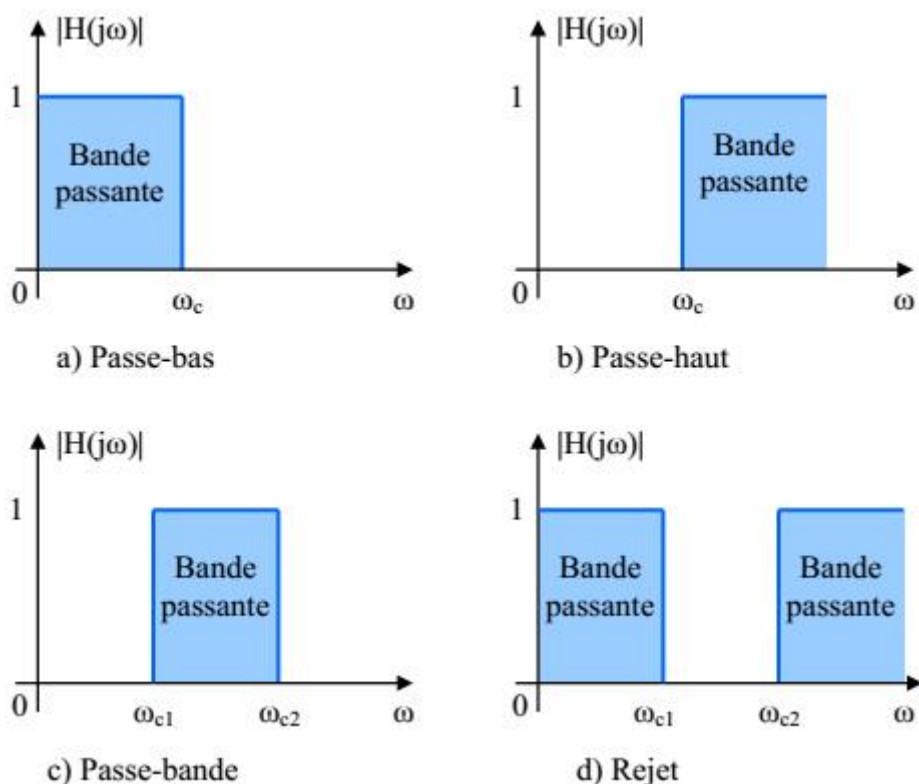


Figure II.17. Quelques types de filtres

8.2 Fonction de transfert complexe d'un filtre

Les filtres sont caractérisés par un paramètre très important qui peut décrire leurs comportements, qui est la fonction de transfert ou transmittance complexe $H(\omega)$. C'est une fonction mathématique qui décrit le comportement en fonction de la fréquence d'un filtre (en régime sinusoïdal). Le module de la fonction de transfert correspond à l'amplification en tension :

$$H(\omega) = |\underline{H}(\omega)| = \left| \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} \right| \quad (\text{II.49})$$

Le déphasage introduit par le filtre peut être calculer par :

$$\varphi(\omega) = \text{Arg}(\underline{H}(\omega)) = \text{Arg}\left(\frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}\right) = \text{Arg}(\underline{V}_s) - \text{Arg}(\underline{V}_e) \quad (\text{II.50})$$

Le module et l'argument de la transmittance complexe qui sont représentés par des courbes dans le plan de Bode, sont utilisés pour obtenir des données qui permettent de prévoir la réponse du système étudié dans n'importe quelles conditions d'excitation (réponse en fréquence). Le diagramme de Bode est adopté pour représenter graphiquement la variation de $H(\omega)$ en fonction de la pulsation (ou la fréquence). A cause de la grande étendue des valeurs

du module de H en fonction de la fréquence, Ceci nous a obligé l'utilisation d'une échelle logarithmique, c.-à-d. la représentation de la fonction :

$$G = 20 \log_{10}|H(\omega)| \quad (\text{II.51})$$

en fonction de la pulsation ω . G est appelé le gain de la fonction de transfert H et s'exprime en décibels (dB).

8.2.1 Comportement des impédances L et C en fonction de la fréquence

L'impédance de la bobine pour les basses fréquences tend vers zéro et se comporte comme un court-circuit. Pour les hautes fréquences elle tend vers l'infini, et se comportant comme un circuit ouvert. Ce même comportement est observé pour le condensateur mais d'une manière inversée. Le tableau suivant résume leurs comportements en fonction de la fréquence :

Composant	Impédance	Basses fréquences	Hautes fréquences
Bobine (Self)	$jL\omega$	Court-circuit (C-C)	Court ouvert (C-O)
Condensateur	$\frac{1}{jC\omega}$	Court ouvert (C-O)	Court-circuit (C-C)

8.3 Filtre passe-bas du premier ordre

8.3.1 Fonction de transfert

Soit le circuit RC de la figure II.11. Où la tension de sortie V_s est déduite de la règle de diviseur de tension :

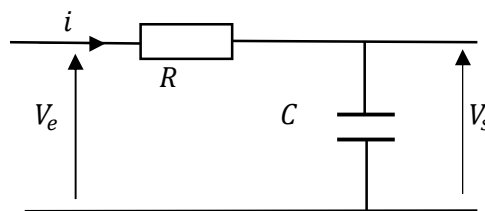


Figure II.18. Filtre passe bas passive

On pose

$$Z_C = \frac{1}{jC\omega}$$

Pour calculer la fonction de transfert nous avons :

$$V_e = (R + Z_C)i$$

Et

$$V_s = Z_C i$$

Alors, le rapport nous donne :

$$\begin{aligned}\frac{V_s}{V_e} &= \frac{Z_C}{R + Z_C} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \\ \frac{V_s}{V_e} &= \frac{1}{1 + jRC\omega} \\ H(\omega) &= \frac{1}{1 + jRC\omega}\end{aligned}$$

Ou bien on utilise le diviseur de tension tout simplement on aura

$$V_s = \frac{Z_C}{R + Z_C} V_e = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} V_e = \frac{1}{1 + jRC\omega} V_e$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{V_s}{V_e} &= \frac{1}{1 + jRC\omega} \\ H(\omega) &= \frac{1}{1 + jRC\omega}\end{aligned}$$

Le module de la transmittance ou bien le gain en tension est

$$|H(\omega)| = \left| \frac{1}{1 + jRC\omega} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Où

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

8.3.2 Diagramme de Bode du gain

$$\begin{aligned}G(\omega) &= 20\text{Log}_{10}H(\omega) = 20\text{Log}_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}\right) = -10\text{Log}_{10}\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) \\ \varphi &= -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\end{aligned}$$

8.3.3 Pulsation de coupure à -3dB

La pulsation de coupure peut être calculer comme suit

$$H(\omega_c) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$$

$$H_{\max} = H(\omega \rightarrow 0) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

D'où

$$\frac{\omega_c}{\omega_0} = 1 \Rightarrow \omega_c = \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

8.3.4 Etude aux limites

Quand la pulsation ω tend vers zéro, le gain G tend vers zéro et l'argument φ tend vers zéro.

Lorsque ω tend vers l'infini, G tend vers $-\infty$ et φ tend vers $-\pi/2$. Et pour $\omega = \omega_c$; $G = -3\text{dB}$ et $\varphi = -\pi/4$.

8.3.5 Détermination des asymptotes aux courbes $G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$

Pour $\omega \ll \omega_0$; $G(\omega) \cong 0 \text{ dB}$ et $\varphi(\omega) \cong 0$

Pour $\omega \gg \omega_0$; $G(\omega) \cong 20\text{Log}\frac{\omega_0}{\omega}$ Cette droite asymptotique décroît en fonction de la pulsation avec une pente de -20dB/décade . Elle passe par le point $(\omega_0,0)$. et $\varphi(\omega) \cong -\pi/2$.

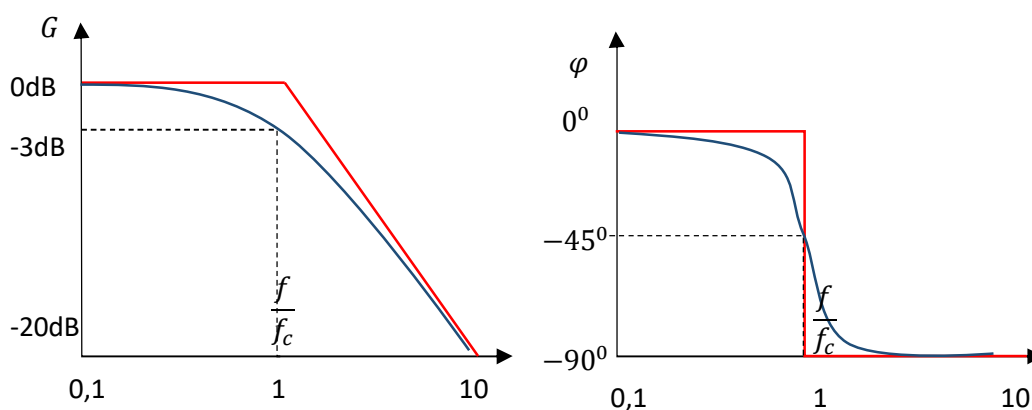


Figure II.19. Représentation du gain et de phase dans le plan de Bode d'un filtre passe bas

8.4 Filtre passe-haut du premier ordre

8.4.1 Fonction de transfert

Le même circuit que précédent avec l'inversement de l'emplacement de la résistance et la capacité.

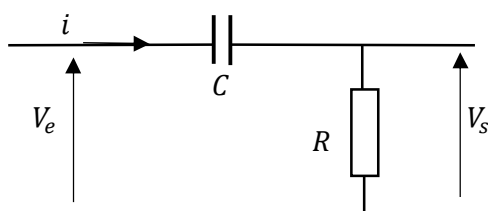


Figure II.20. Filtre passe haut passif

On pose

$$Z_C = \frac{1}{jC\omega} ;$$

pour calculer la fonction de transfert nous avons :

$$V_e = (R + Z_C)i \quad ;$$

et

$$V_s = Ri .$$

Alors, le rapport de ces 2 tensions nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{V_s}{V_e} &= \frac{R}{R + Z_C} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \\ \frac{V_s}{V_e} &= \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \\ H(\omega) &= \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \end{aligned}$$

Ou bien on utilise le diviseur de tension tous simplement on aura

$$V_s = \frac{R}{R + Z_C} V_e = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} V_e = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} V_e$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{V_s}{V_e} &= \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \\ H(\omega) &= \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \\ H(\omega) &= \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \end{aligned}$$

Le module de la transmittance ou bien le gain en tension est

$$|H(\omega)| = \left| \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

Avec

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

8.4.2 Diagramme de Bode du gain

$$G(\omega) = 20\text{Log}_{10}H(\omega) = 20\text{Log}_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}\right) = -10\text{Log}_{10}\left(1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

8.4.3 Pulsation de coupure à - 3dB

La pulsation de coupure peut être calculée comme suit

$$H(\omega_c) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$$

$$H_{\max} = H(\omega \rightarrow 0) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

D'où

$$\frac{\omega_c}{\omega_0} = 1 \Rightarrow \omega_c = \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

8.4.4 Etude aux limites

Quand la pulsation ω tend vers zéro, le gain G tend vers $-\infty$ et l'argument φ tend vers $\pi/2$.

Et lorsque ω tend vers l'infini, G tend vers 0 et φ tend vers 0. Et pour $\omega = \omega_c$; $G = -3\text{dB}$ et $\varphi = \pi/4$.

8.4.5 Détermination des asymptotes aux courbes $G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$

Pour $\omega \ll \omega_0$; $G(\omega) \cong 0 \text{ dB}$ et $\varphi(\omega) \cong 0$

Pour $\omega \gg \omega_0$; $G(\omega) \cong 20\text{Log}\frac{\omega_0}{\omega}$ Cette droite asymptotique décroît en fonction de la pulsation avec une pente de -20dB/décade . Elle passe par le point $(\omega_0, 0)$. et $\varphi(\omega) \cong -\pi/2$.

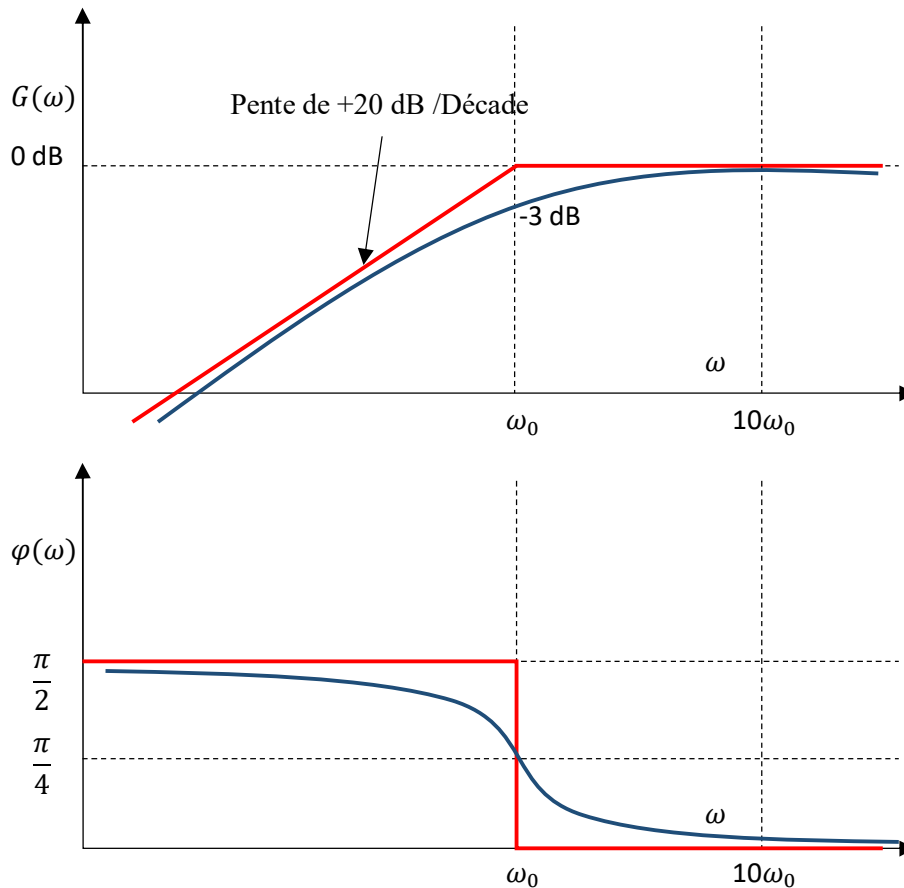


Figure II.21. Représentation du gain et de phase dans le plan de Bode d'un filtre passe haut

8.5 Filtre passe-bande

Pour ce type de filtre on adopte le circuit RLC série où la sortie est prise entre les bornes de la résistance :

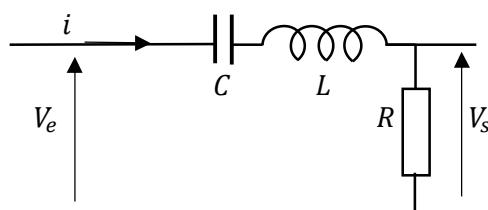


Figure II.22. Filtre passe bande passif

Vu que la capacité se comporte un circuit ouvert aux basses fréquences, aucun courant ne circule dans la résistance. Par contre aux hautes fréquences c'est l'inductance qui se comporte comme un circuit ouvert et par conséquent la résistance n'est traversée par aucun courant. Donc le transfert de l'énergie depuis l'entrée à la sortie se fait entre les hautes et basses

fréquences. A une certaine fréquence, l'impédance de la capacité (qui est négative) annule l'impédance de l'inductance, l'amplitude de la fonction de transfert est réelle, et la tension de la sortie est la même que celle de l'entrée.

On pose

$$Z_C = \frac{1}{jC\omega} \text{ et } Z_L = jL\omega$$

Pour calculer la fonction de transfert nous avons :

$$V_e = (R + Z_C + Z_L)i$$

Et

$$V_s = Ri$$

Alors, le rapport nous donne :

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{R}{R + Z_C + Z_L} = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jLC\omega^2 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Avec

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Le module de la transmittance ou bien le gain en tension est

$$|H(\omega)| = \left| \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

8.5.1 Diagramme de Bode du gain

$$G(\omega) = 20\text{Log}_{10}H(\omega) = 20\text{Log}_{10}\frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = -10\text{Log}_{10}\left(1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

8.5.2 Pulsations de coupures à- 3dB

Les pulsations de coupure peuvent être calculer en solvant l'équation :

$$H(\omega_c) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$$

$$H_{\max} = H(\omega \rightarrow 0) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

D'où les deux pulsations de coupures sont :

$$\omega_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{1}{LC} + \left(\frac{R}{2L}\right)^2} ; \omega_{c2} = +\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{1}{LC} + \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

8.5.3 Largeur de la bande du filtre

La largeur de la bande passante du filtre est la différence entre ω_{c1} et ω_{c2} :

$$\beta = \omega_{c1} - \omega_{c2} = \frac{R}{L}$$

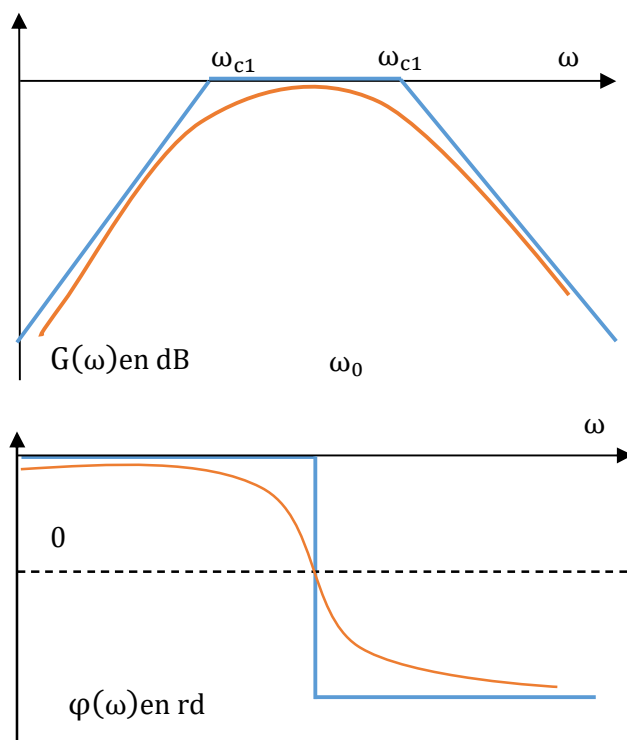


Figure II.23. Représente la réponse d'un filtre passe-bande. Les fréquences de coupure sont définies par les points où l'amplitude atteint de la valeur maximale.

8.5.4 Etude aux limites

Quand la pulsation ω tend vers zéro, le gain G tend vers zéro et l'argument φ tend vers zéro.

Et lorsque ω tend vers l'infini, G tend vers $-\infty$ et φ tend vers $-\pi/2$. Et pour $\omega = \omega_C$; $G = -3\text{dB}$ et $\varphi = -\pi/4$.

8.5.5 Détermination des asymptotes aux courbes $G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$

Pour $\omega \ll \omega_0$; $G(\omega) \cong 0 \text{ dB}$ et $\varphi(\omega) \cong 0$

Pour $\omega \gg \omega_0$; $G(\omega) \cong 20\text{Log} \frac{\omega_0}{\omega}$ Cette droite asymptotique décroît en fonction de la pulsation avec une pente de -20dB/décade . Elle passe par le point $(\omega_0, 0)$. et $\varphi(\omega) \cong -\pi/2$.

8.6 Filtre coupe-bande

On reprend le même circuit RLC série du filtre précédent mais la sortie cette fois est prise aux bornes de l'inductance et la capacité en série.

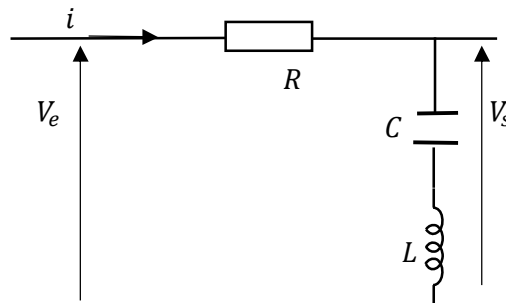


Figure II.24. Filtre coupe bande passif

8.6.1 Principe de fonctionnement

La capacité se comporte comme un circuit ouvert ; aux basses fréquences, par conséquent la tension de sortie est la même que celle de l'entrée. Aux hautes fréquences : c'est l'inductance qui se comporte comme un circuit ouvert, et la sortie est la même que l'entrée. A la fréquence de résonance, l'impédance de l'inductance annule l'impédance de la capacité, et donc il y a court-circuit, et la sortie est nulle.

La fonction de transfert de ce circuit est :

On pose

$$Z_C = \frac{1}{jC\omega} \text{ et } Z_L = jL\omega$$

Pour calculer la fonction de transfert nous avons :

$$V_e = (R + Z_C + Z_L)i$$

Et

$$V_s = (Z_C + Z_L)i$$

Alors, le rapport nous donne :

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{(Z_C + Z_L)}{R + Z_C + Z_L} = \frac{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{\frac{1}{LC} - \omega^2}{\frac{1}{LC} - \omega^2 + j\frac{R}{L}\omega}$$

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{LC} - \omega^2}{\frac{1}{LC} - \omega^2 + j\frac{R}{L}\omega}$$

Avec Le module de la transmittance ou bien le gain en tension est

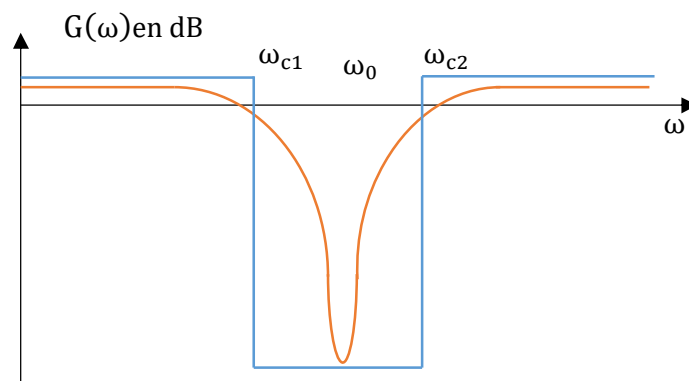
$$|H(\omega)| = \left| \frac{\frac{1}{LC} - \omega^2}{\frac{1}{LC} - \omega^2 + j\frac{R}{L}\omega} \right| = \frac{\left| \frac{1}{LC} - \omega^2 \right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{R}{L}\omega\right)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan Q \left(\frac{\frac{R}{L}\omega}{\frac{1}{LC} - \omega^2} \right)$$

8.6.2 Diagramme de Bode du gain

$$G(\omega) = 20\text{Log}_{10}H(\omega) = 20\text{Log}_{10} \frac{\left| \frac{1}{LC} - \omega^2 \right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{R}{L}\omega\right)^2}}$$

Nous avons représenté le gain (dB) et la phase en fonction de ω dans le plan de Bode dans la Figure II.25.



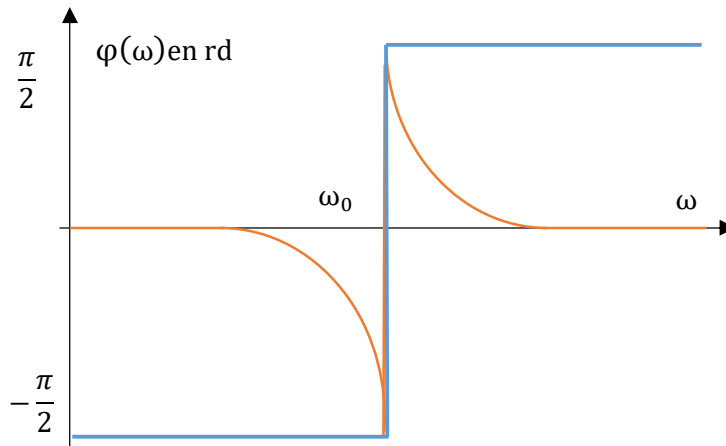


Figure II.25. Représente la réponse d'un filtre passe-bande. Les fréquences de coupure sont définies par les points où l'amplitude atteint de la valeur maximale.

8.6.3 Etude aux limites

Quand la pulsation ω tend vers zéro, le gain G tend vers zéro et l'argument φ tend vers zéro.

Et lorsque ω tend vers l'infini, G tend vers $-\infty$ et φ tend vers $-\pi/2$. Et pour $\omega = \omega_C$; $G = -3\text{dB}$ et $\varphi = -\pi/4$.

8.6.4 Détermination des asymptotes aux courbes $G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$

Pour $\omega \ll \omega_0$; $G(\omega) \cong 0 \text{ dB}$ et $\varphi(\omega) \cong 0$

Pour $\omega \gg \omega_0$; $G(\omega) \cong 20\text{Log} \frac{\omega_0}{\omega}$ Cette droite asymptotique décroît en fonction de la pulsation avec une pente de -20dB/décade . Elle passe par le point $(\omega_0, 0)$. et $\varphi(\omega) \cong -\pi/2$.