CHAPITRE 4 :
Processus de planification

3.3. La méthode GANTT

Historique de la méthode GANTT

Le diagramme de GANTT est la plus ancienne des trois techniques de planification décrites dans ce cours. Elle porte le nom de son créateur Henry Laurence GANTT, ingénieur et consultant américain, qui l'a mise au point en 1917.

Description de la méthode GANTT

La mise en œuvre de la méthode de GANTT est intuitive et simple. Sa lecture est comprise par tous, ce qui en fait un excellent outil de communication, pour les acteurs d'un projet comme pour les équipes d'exécutants. Son seul inconvénient est qu'elle ne se prête pas à la planification de trop nombreuses tâches.

Pour ces raisons il est conseillé de l'utiliser en sous-programme du PERT ou du MPM. De plus, ce sous-programme est facilement exploitable pour lisser la charge des différentes ressources (exploitation des marges).

3.3. La méthode GANTT - suite

Méthodologie de mise en œuvre

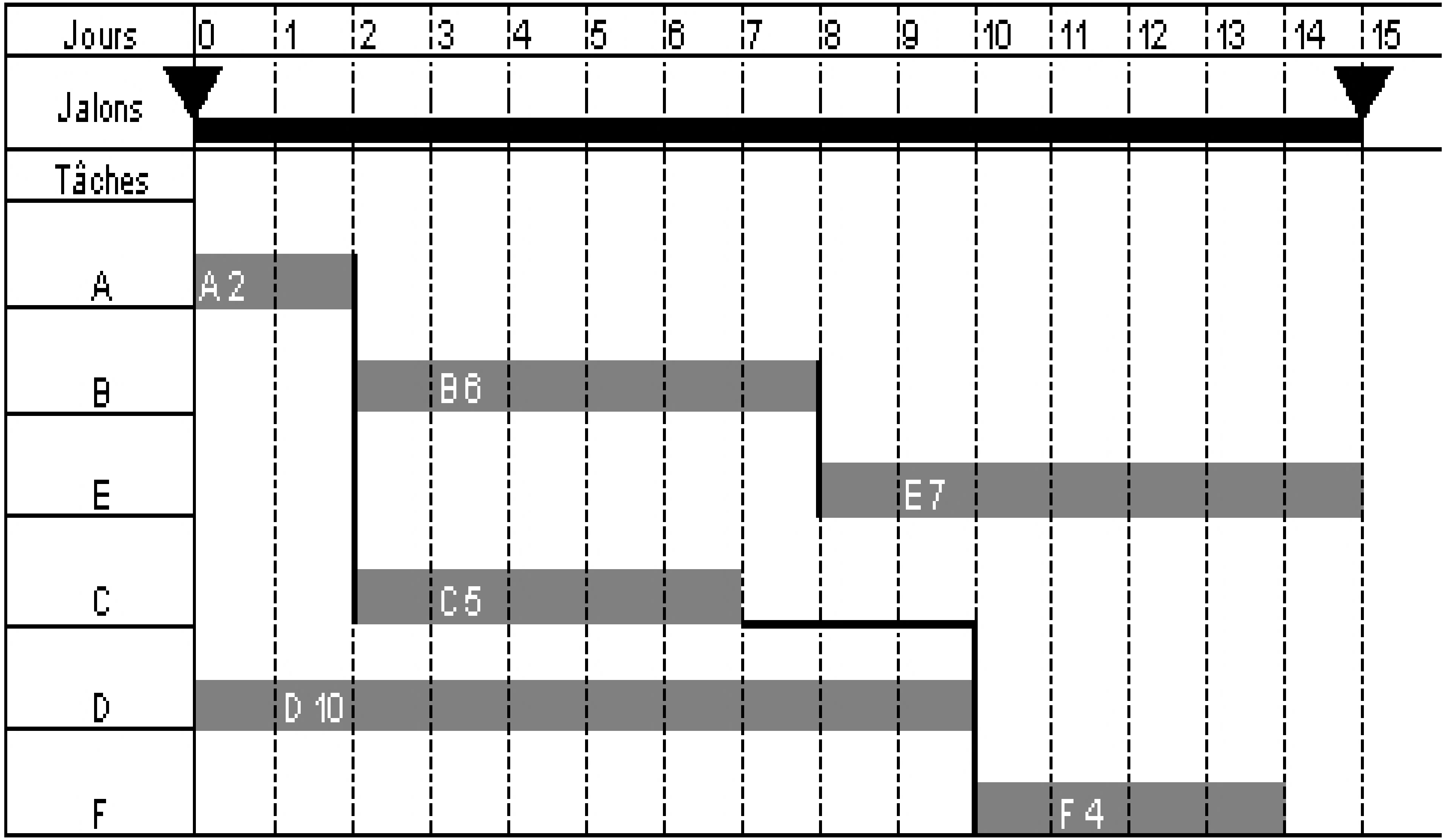
- De la même manière que pour les techniques PERT et MPM, il est important de définir les tâches à réaliser, leurs durées et leurs tâches antécédentes.

- Il suffit ensuite de représenter chaque tâche sur une échelle des temps, en respectant les antécédences. Pour une facilité de lecture, on s'efforcera de rapprocher les unes des autres, les tâches qui ont des relations entre elles.

- Dans le cas d'un découpage en sous-projet (ou sous-programme) il est nécessaire de savoir le repositionner dans son projet global. Les dates de début et de fin de cette partie du projet global sont alors représentées dans le sous-projet par des jalons.

- D'une manière plus générale, les jalons sont des événements importants autres que les tâches du projet (réunion d'avancement, date de facturation,...). Les échéances intermédiaires identifiées par ces jalons permettent un suivi plus rigoureux. Ils sont représentés par des triangles, pointe vers le bas ou par des losanges.
- Si l'on considère que l'exemple que nous avions traité en PERT et en MPM est un sous-projet d'un projet plus global, sa représentation GANTT sera la suivante :

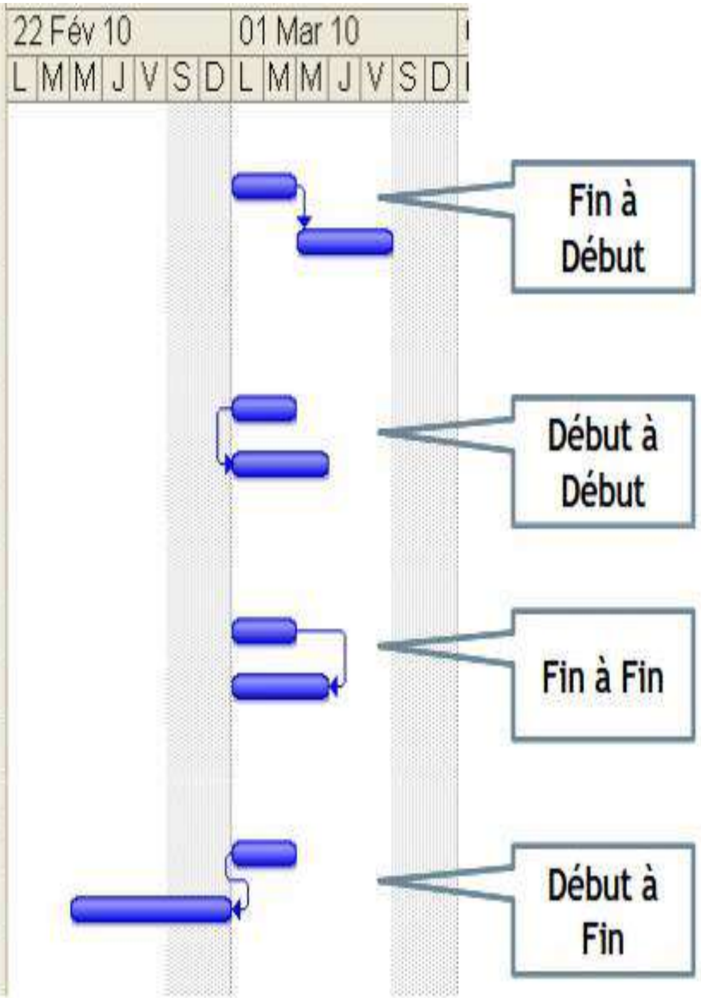
3.3. La méthode GANTT - suite



3.3. La méthode GANTT - suite

Les types de liens – Exemple MS-project

Nom de la tâche	Durée	Début	Fin	Prédécesseurs
A1	2 jours	Lun 01/03/10	Mar 02/03/10	
B1	3 jours	Mer 03/03/10	Ven 05/03/10	22
A2	2 jours	Lun 01/03/10	Mar 02/03/10	
B2	3 jours	Lun 01/03/10	Mer 03/03/10	26DD
A3	2 jours	Lun 01/03/10	Mar 02/03/10	
B3	3 jours	Lun 01/03/10	Mer 03/03/10	30FF
A4	2 jours	Lun 01/03/10	Mar 02/03/10	
B4	3 jours	Mer 24/02/10	Lun 01/03/10	34DF



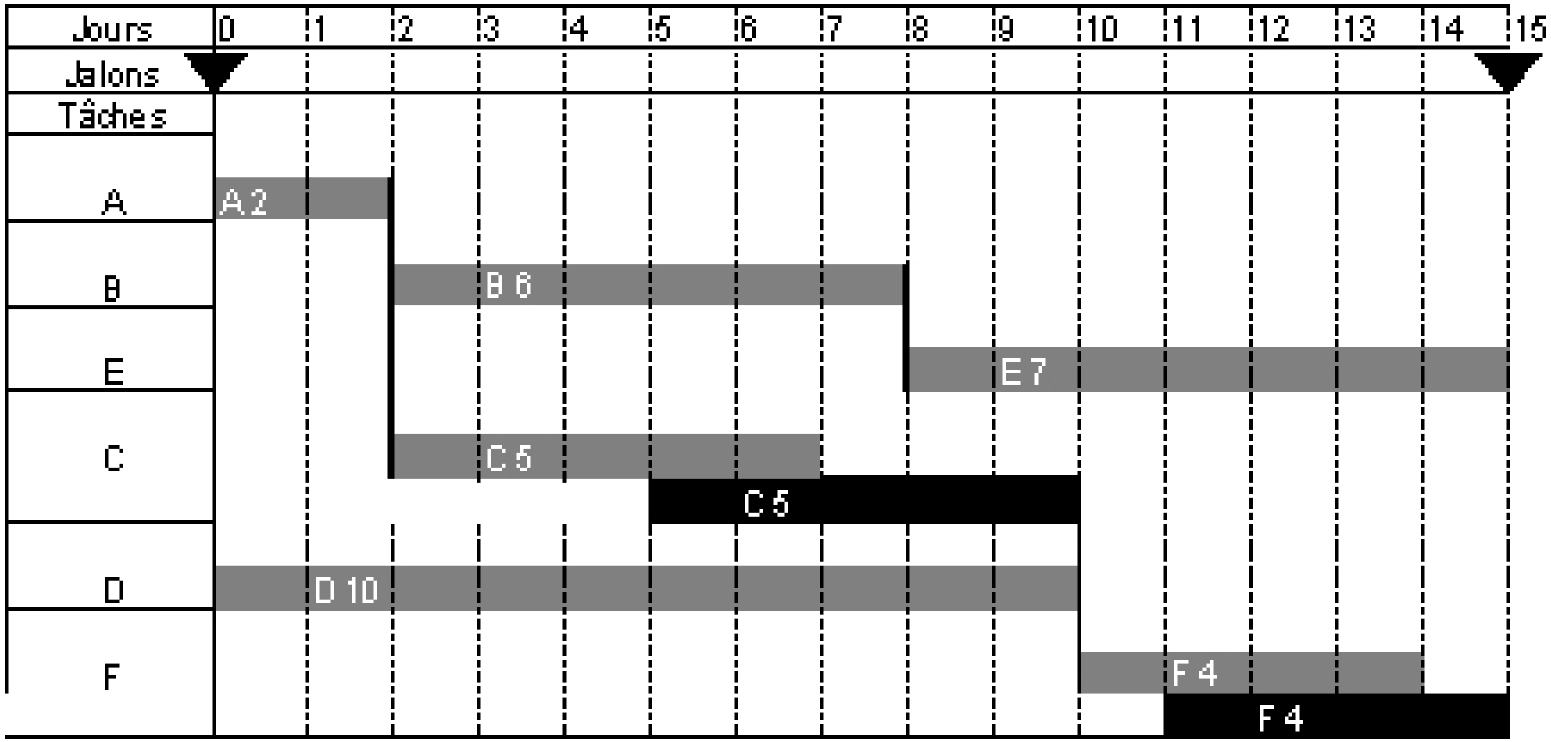
3.3. La méthode GANTT - suite

Lissage des ressources

Nous avions abordé ce point lorsque, dans la technique du PERT, nous avions parlé des tâches à marge. Seulement les tâches ne faisant pas partie du chemin critique disposent d’une marge.

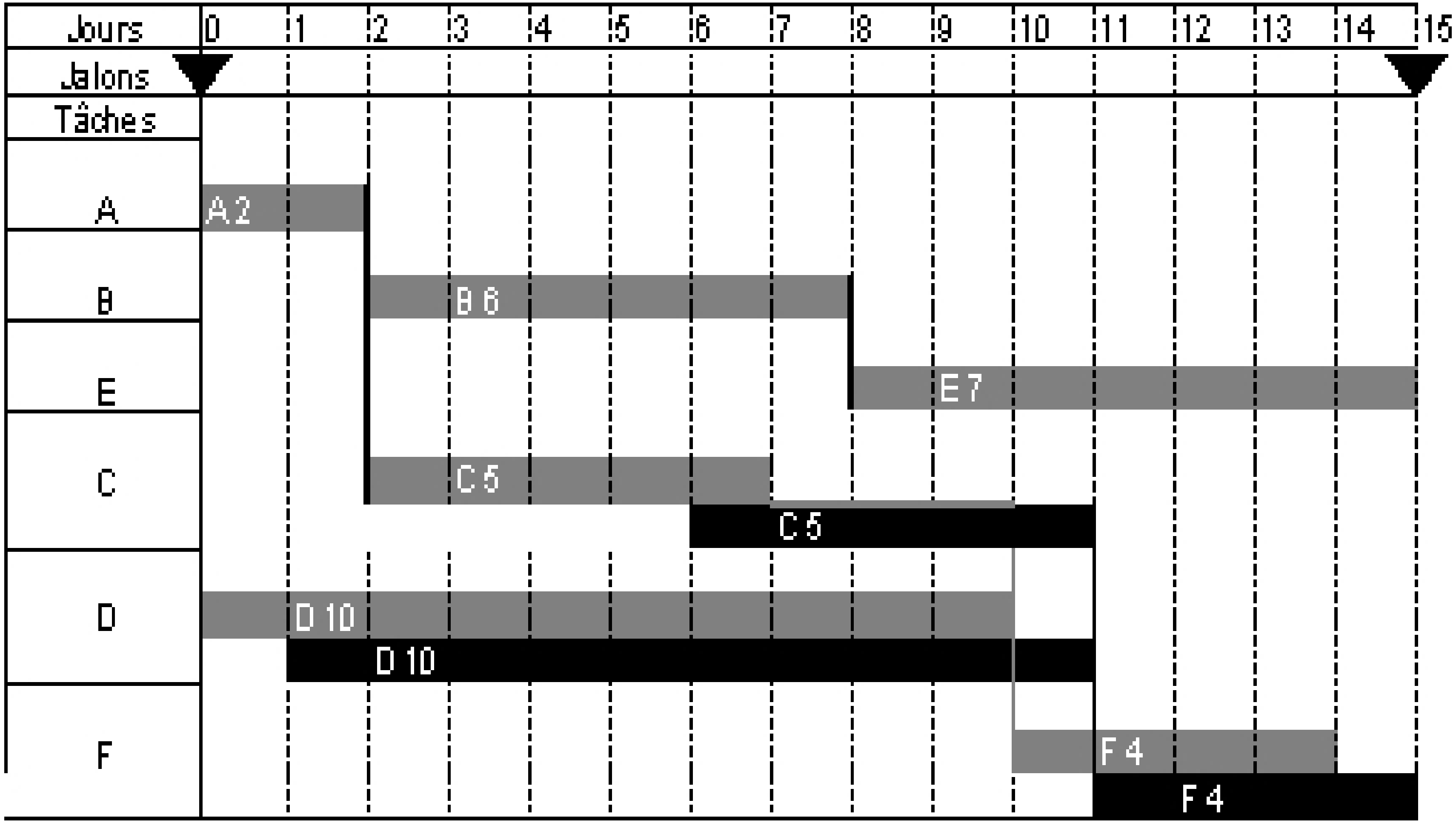
Dans la représentation du diagramme de GANTT, il est facile de visualiser ces marges.

-**Marge libre** : Elle ne retarde pas la date au plus tôt des tâches suivantes.



3.3. La méthode GANTT - suite

Marge Totale : Elle ne retarde pas la date au plus tard des tâches suivantes



3.3. La méthode GANTT - suite

La synthèse en est la suivante

Tâches	Marge libre (j)	Marge Totale (j)
A	0	0
B	0	0
C	3	4
D	0	1
E	0	0
F	1	1

- **Marge totale =**
Date au plus tard – Date au plus tôt (DTA-DTO ou **FTA-FTO)**

- **Marge libre=**
la plus petite des DTO qui lui succède – sa FTO

○ Ces marges peuvent être utilisées pour ventiler au mieux les ressources ou les coûts tout au long de l'avancement du projet.

○Afin de simplifier l'explication de ce principe, nous supposerons dans notre exemple que les ressources correspondent à des effectifs humains.

○Nous supposerons également que la durée des tâches à été définie par une analyse préalable de la charge de travail.

3.3. La méthode GANTT - suite

Ventilation des ressources :
Dans notre exemple, les effectifs nécessaires par tâche sont les suivants ➔

Tâches	Effectifs
A	3 pers.
B	3 pers.
C	1 pers.
D	2 pers.
E	3 pers.
F	3 pers.

Cas N°1	SEMAINE 1					SEMAINE 2					SEMAINE 3				
	J1	J2	J3	J4	J5	J6	J7	J8	J9	J10	J11	J12	J13	J14	J15
A	3	3													
B			3	3	3	3	3	3							
E									3	3	3	3	3	3	3
C			1	1	1	1	1								
D	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2					
F											3	3	3	3	
SOMME	5	5	6	6	6	6	6	5	5	5	6	6	6	6	3
	Variation : 5 à 6 personnes					Variation : 5 à 6 personnes					Variation : 3 à 6 personnes				

Cas N°2	SEMAINE 1					SEMAINE 2					SEMAINE 3				
	J1	J2	J3	J4	J5	J6	J7	J8	J9	J10	J11	J12	J13	J14	J15
A	3	3													
B			3	3	3	3	3	3							
E									3	3	3	3	3	3	3
C						1	1	1	1	1					
D	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2					
F											3	3	3	3	
SOMME	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	3
	Fixe : 5 personnes					Fixe : 6 personnes					Variation : 3 à 6 personnes				

3.3. La méthode GANTT - suite

❖Suivant l'utilisation des marges, on constate l'effet sur la répartition des effectifs. Dans le cas d'une planification hebdomadaire du personnel, la solution 2 semble être la plus simple à gérer.

❖De la même manière, nous aurions pu imaginer une planification qui suive une logique de lissage des coûts.

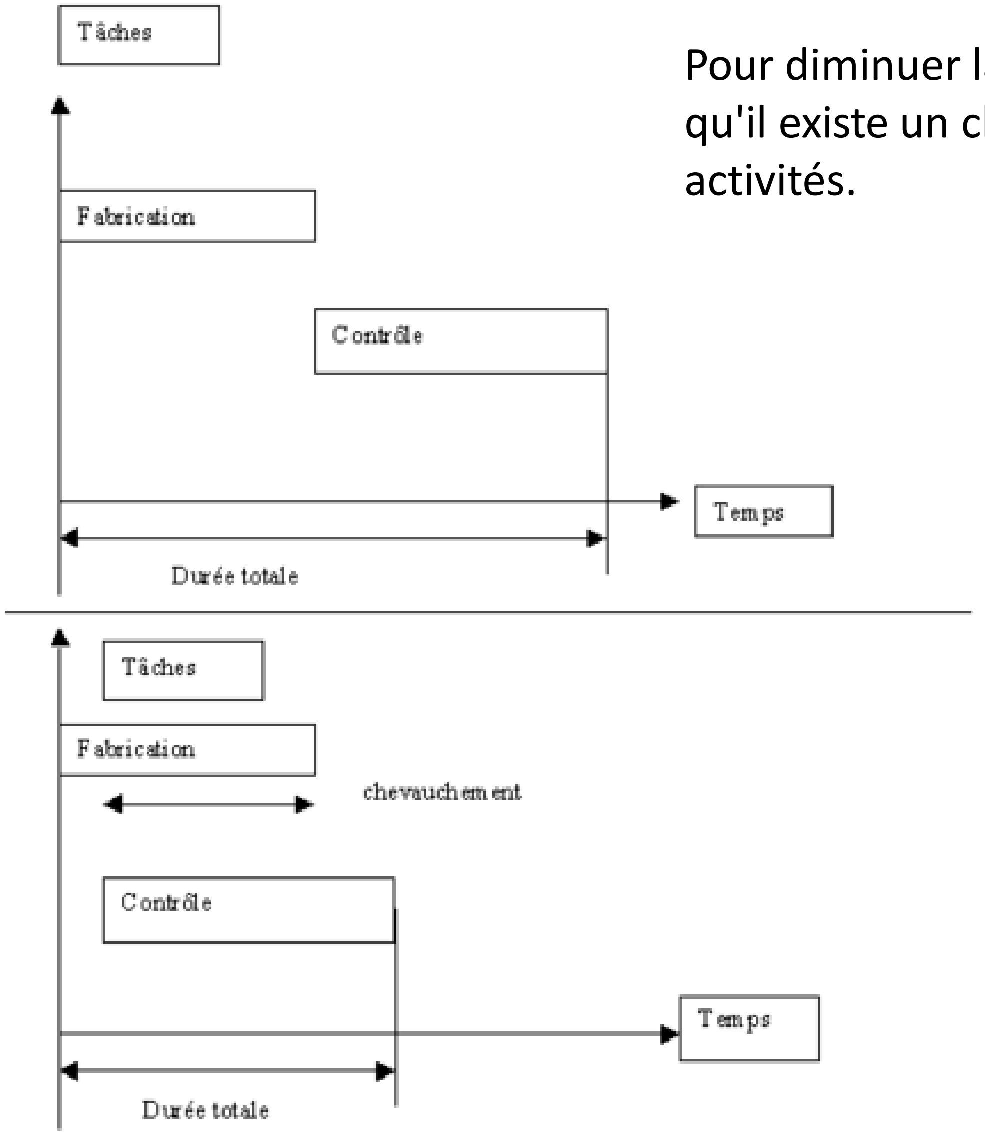
Chevauchement

❑Il existe plusieurs raisons pour lesquelles les tâches dans un projet peuvent ne pas se suivre directement c'est à dire que la tâche postérieure débute dès que la tâche antérieure est terminée.

❑Il peut par exemple exister des contraintes spécifiques pour certaines tâches par exemple dans la construction d'une maison il faut attendre que le béton coulé dans une dalle soit sec avant de poser le carrelage ou que la première couche de peinture soit sèche avant de passer la deuxième.

❑ D'autres " contraintes " peuvent apparaître si l'on veut par exemple diminuer la durée d'un projet.

3.3. La méthode GANTT - suite

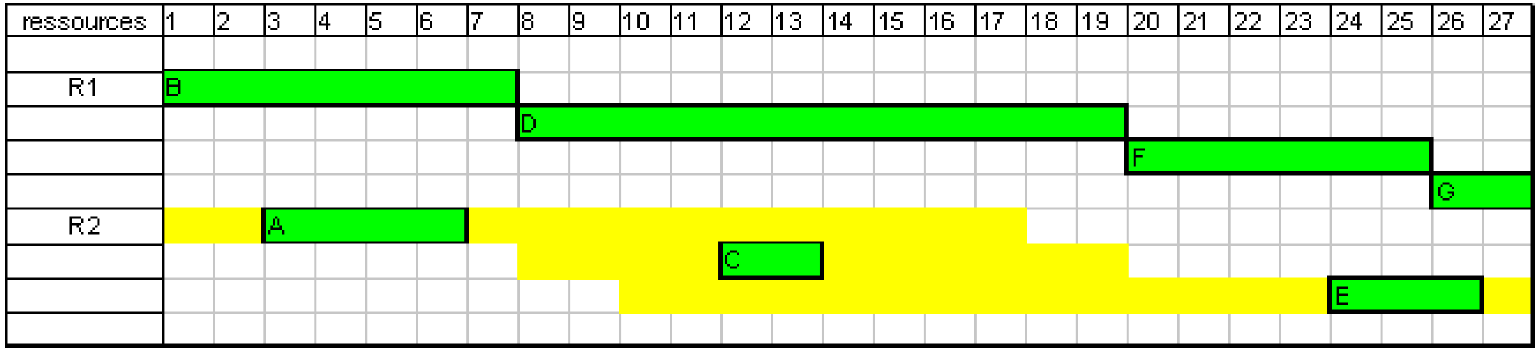


Pour diminuer la durée d'un projet une solution peut être qu'il existe un chevauchement ou un recouvrement des activités.

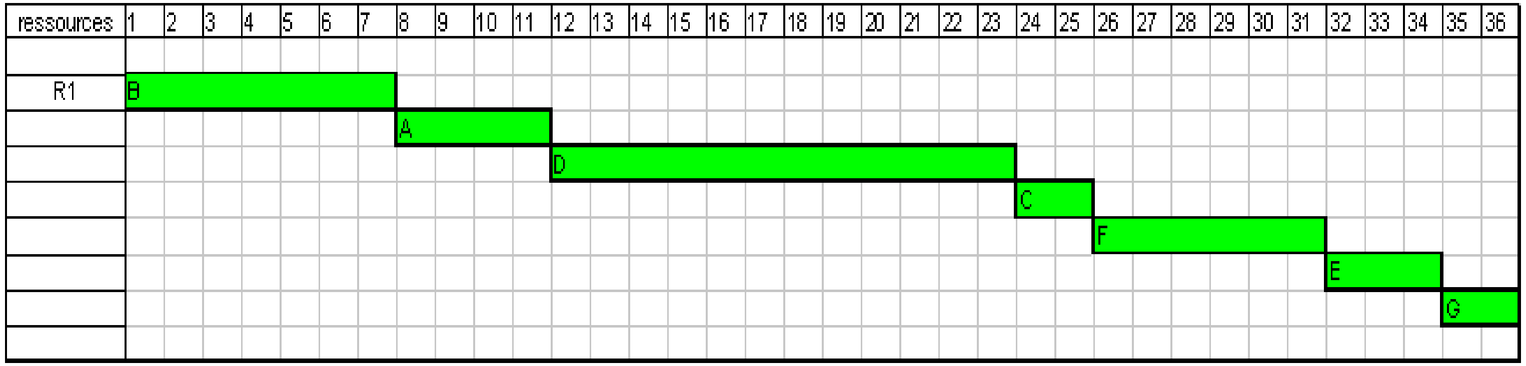
Par exemple si l'on réalise une fabrication puis un contrôle afin de diminuer la durée de l'ensemble des deux tâches on peut très bien décider de commencer le contrôle avant la fin de la fabrication.

3.3. La méthode GANTT - suite

<u>Le nivellement:</u> ***Soit un projet représenté par le*** **diagramme de Gantt** ***suivant,*** **Supposons que l'on dispose de deux ressources (personnes) interchangeables:**

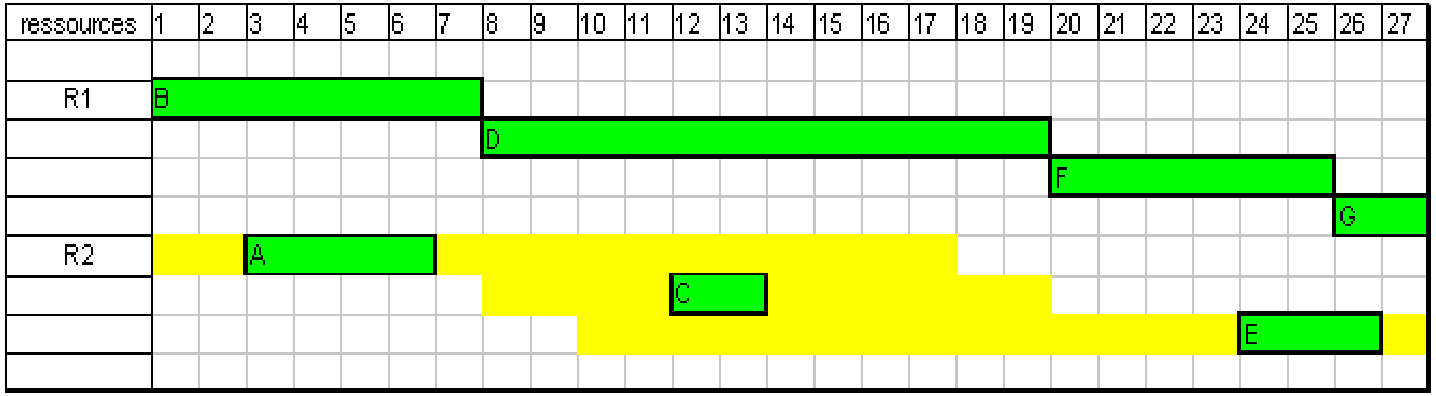


Le nivellement consiste à limiter le nombre de ressources, ce qui, en général allonge la durée du projet. le passage de deux ressources à une seule est un exemple.

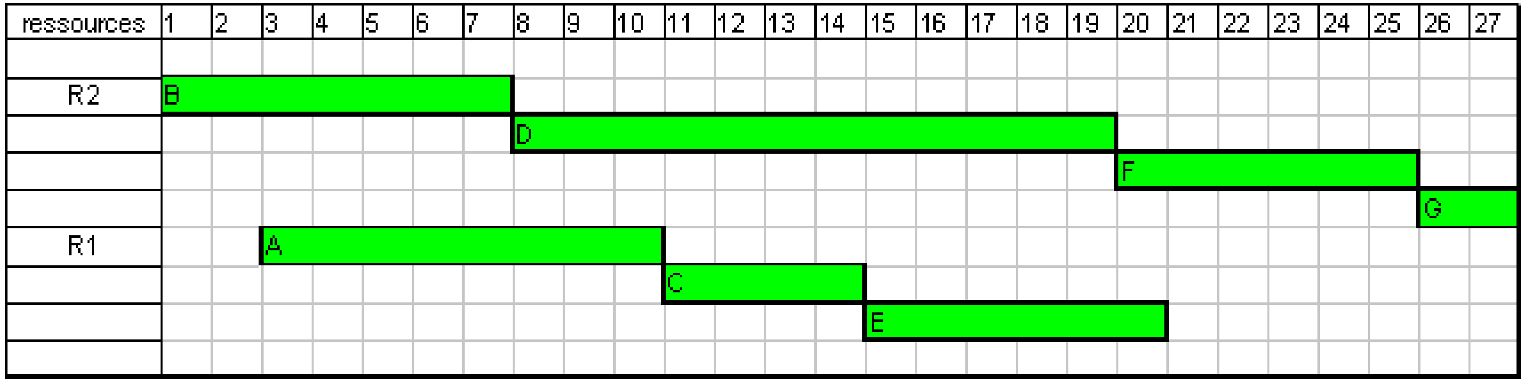


3.3. La méthode GANTT - suite

Le lissage



Le lissage consiste en un ajustement de répartition de la charge de travail de chaque ressource. Si, par exemple, la ressource R1 travaille à mi-temps et la ressource R2 à temps complet, on pourra avoir, avec l'exemple étudié :

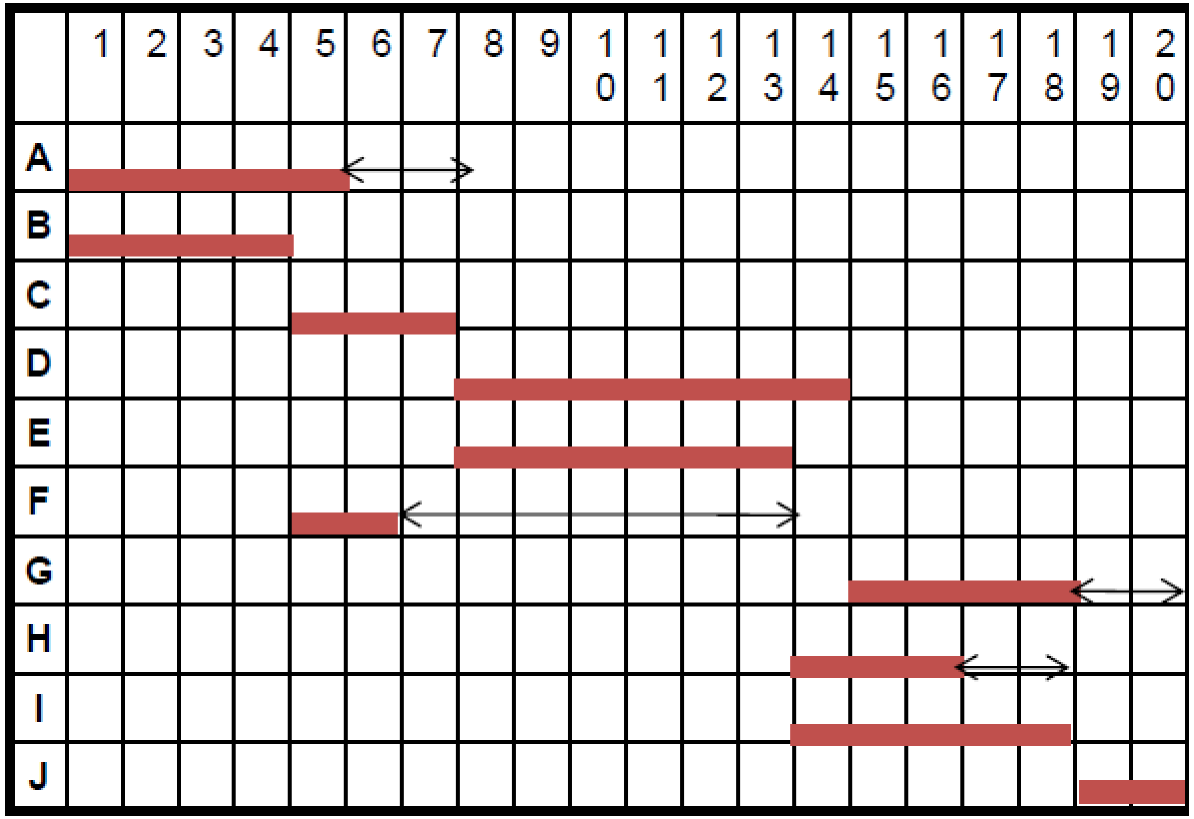


EXERCICE

Tâche	antécédent	Durée
A	----	5
B	----	4
C	B	3
D	AC	7
E	AC	6
F	B	2
G	D	4
H	E	3
I	EF	5
J	HI	2

Applications

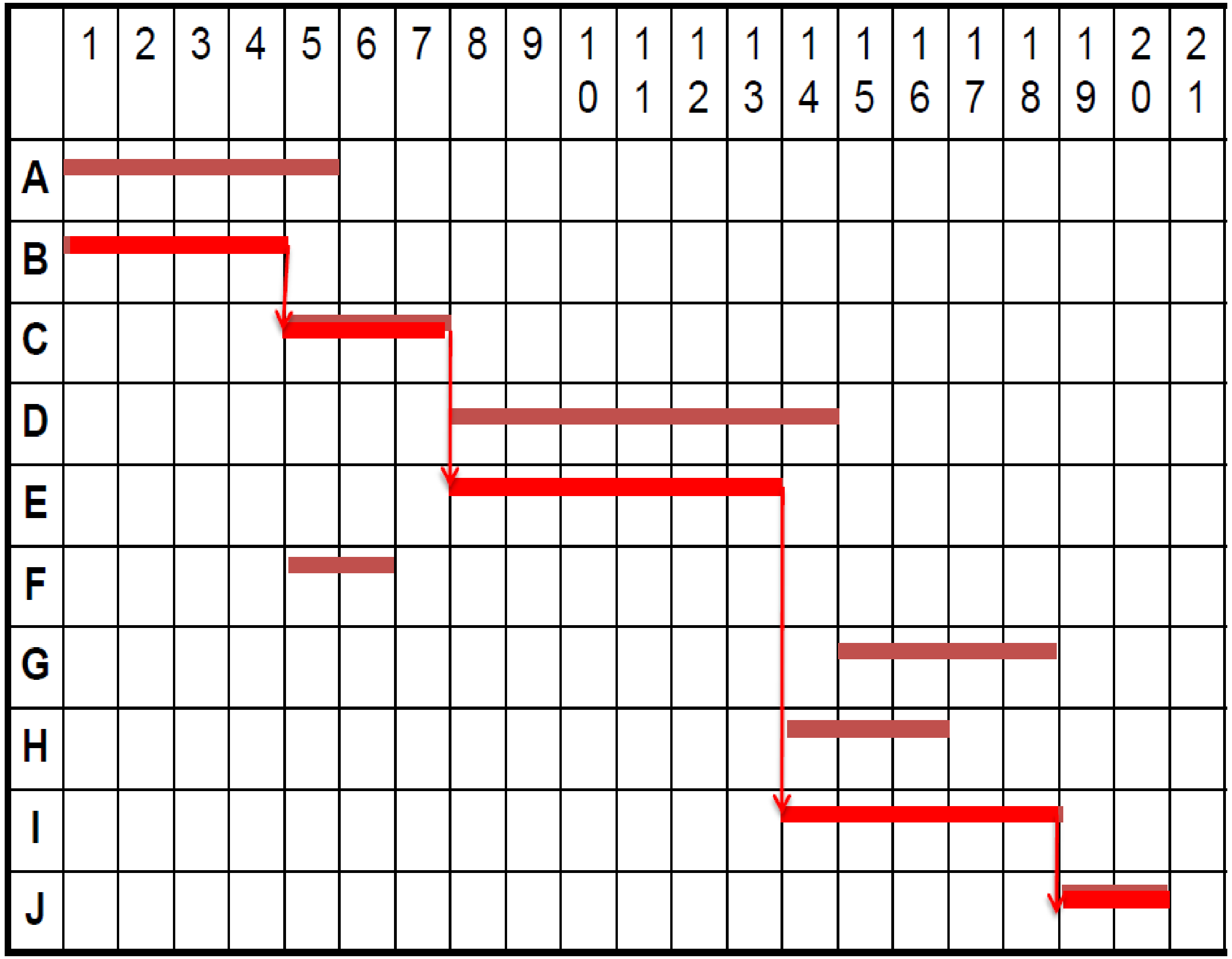
SOLUTIONS



Applications

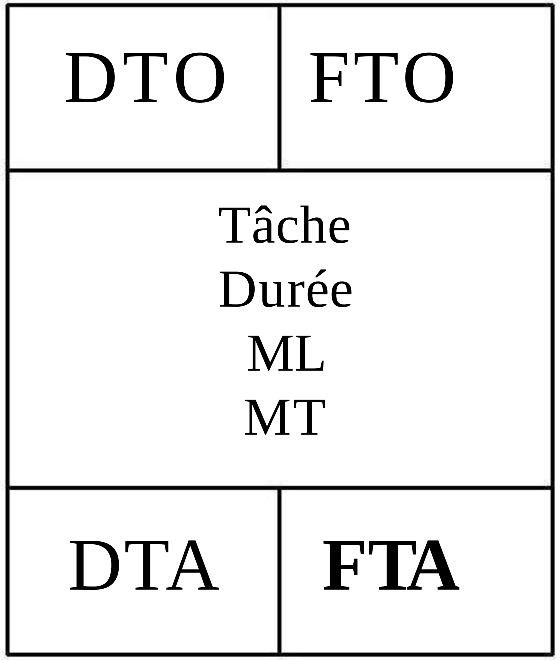
SOLUTIONS

CHEMIN CRITIQUE



3.4. La méthode CPM

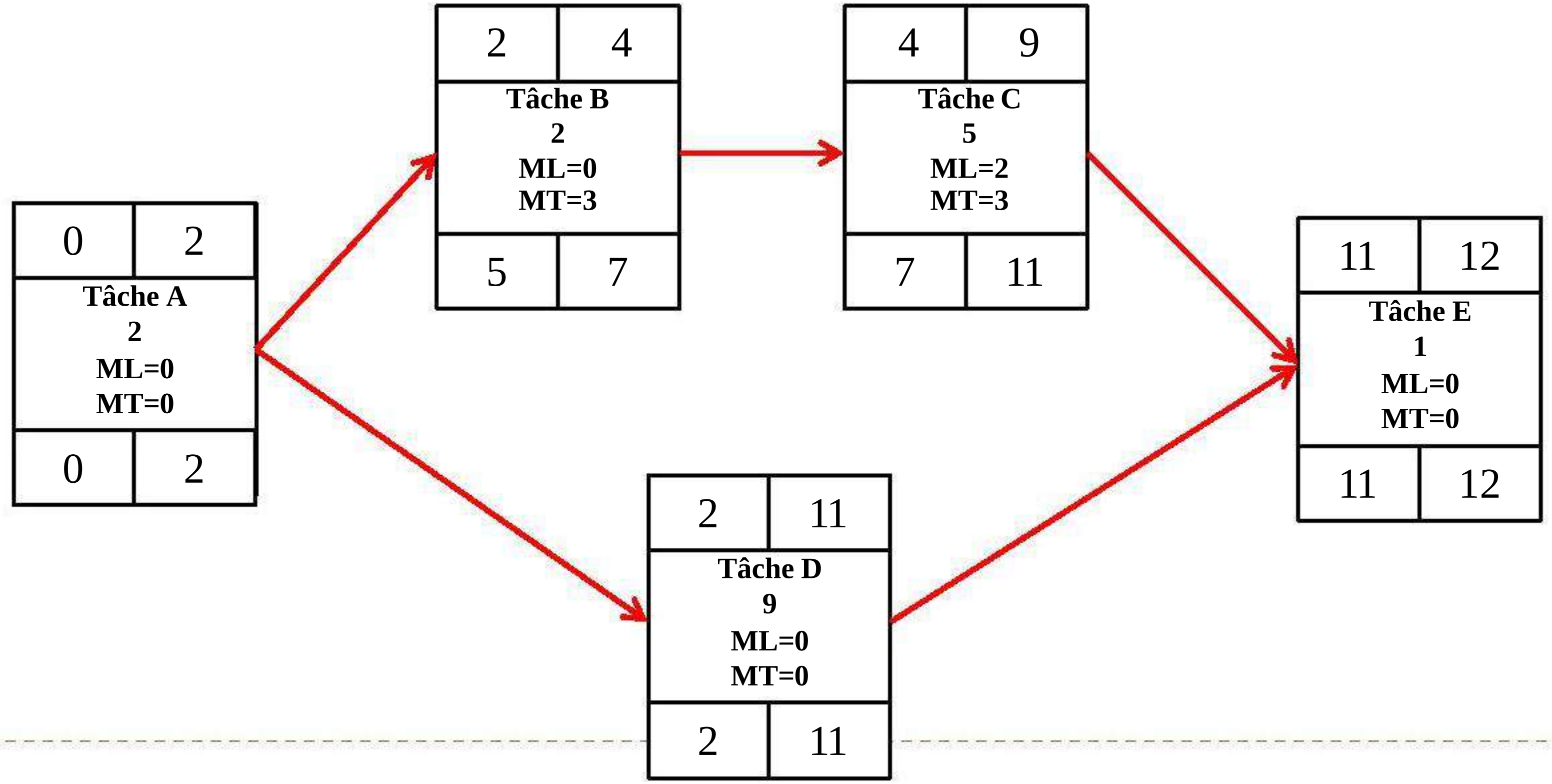
Chaque activité est représentée par une boîte.



DTO : début au plus tôt
FTO : Fin au plus tôt
DTA : début au plus tard
FTA : Fin au plus tard
ML : Marge Libre
MT : Marge Totale

3.4. La méthode CPM

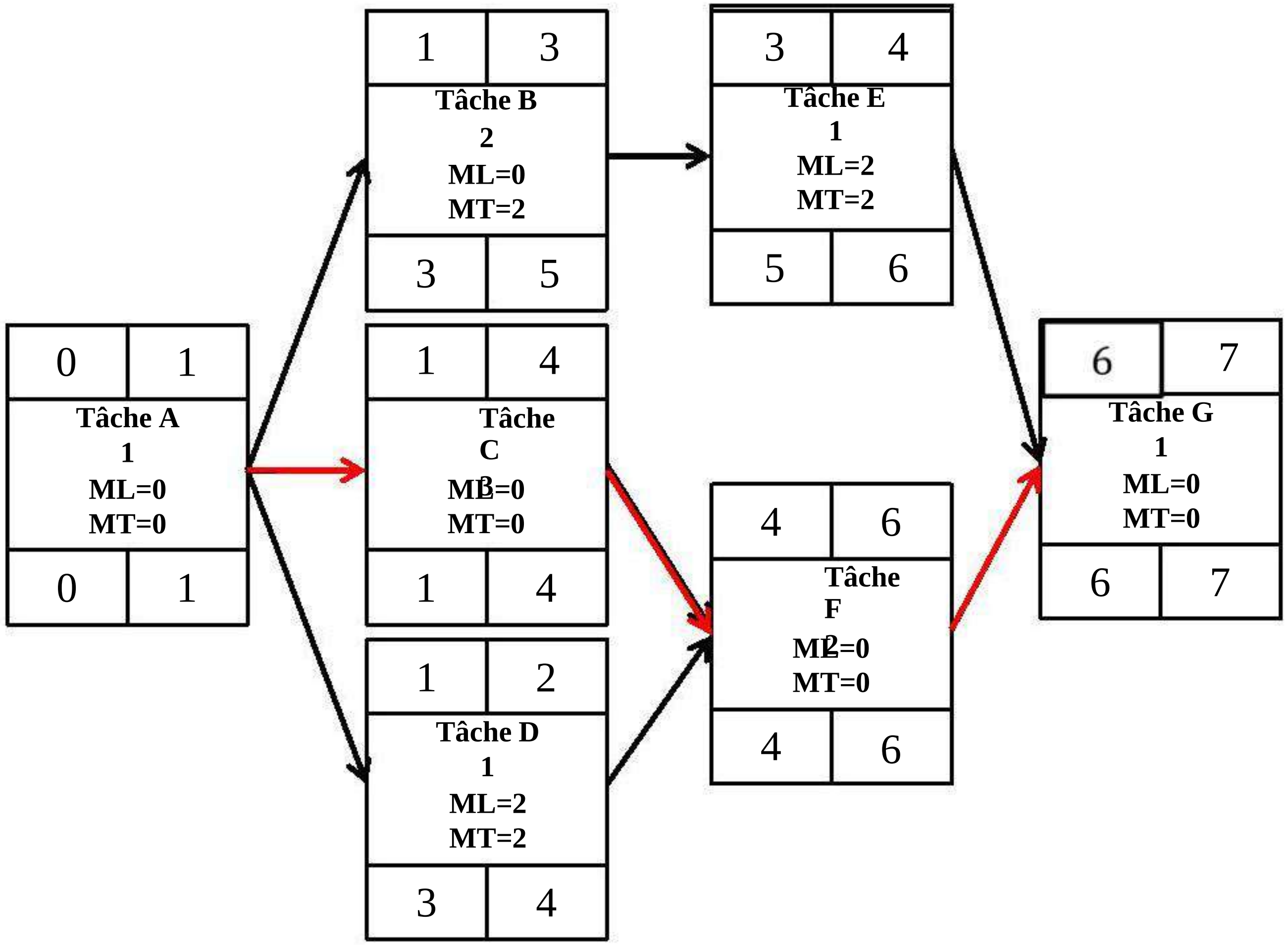
Les activités sont liées entre elles par des liaisons de dépendances pour représenter les relations logiques entre activités.



3.4. La méthode CPM

Tâche	Durée (jours)	Prédécesseurs
A	1	-
B	2	A
C	3	A
D	1	A
E	1	B
F	2	C-D
G	1	E-F

3.4. La méthode CPM



3.4. La méthode CPM

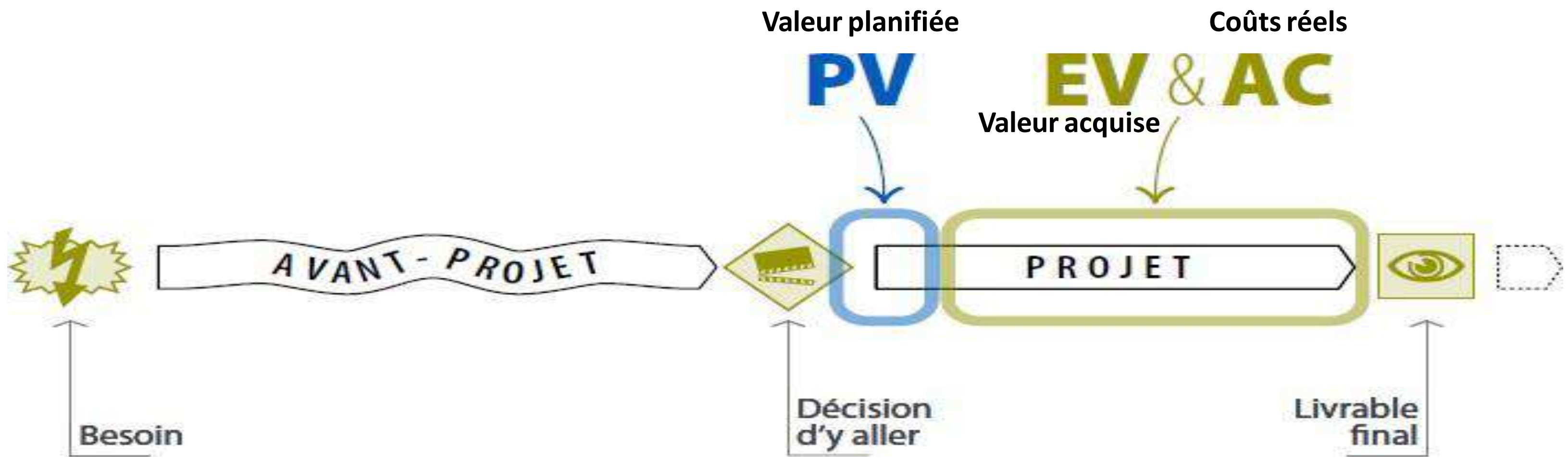
L'avantage de ce réseau des antécédents est qu'il permet une visualisation claire de la logique des dépendances.

Cette représentation a été notamment retenue dans les outils de gestion de projet suivants : Project Management, Workbench et Microsoft Project.

4. Gestion de la valeur acquise (EVM)

La Gestion de la Valeur Acquise (ou Earned Value Management - EVM) est une technique assez simple de mesure de l'avancement de projet et de projection sur le futur, sur la base d'une technique de gestion de coût.

Quand utiliser l'EVM?



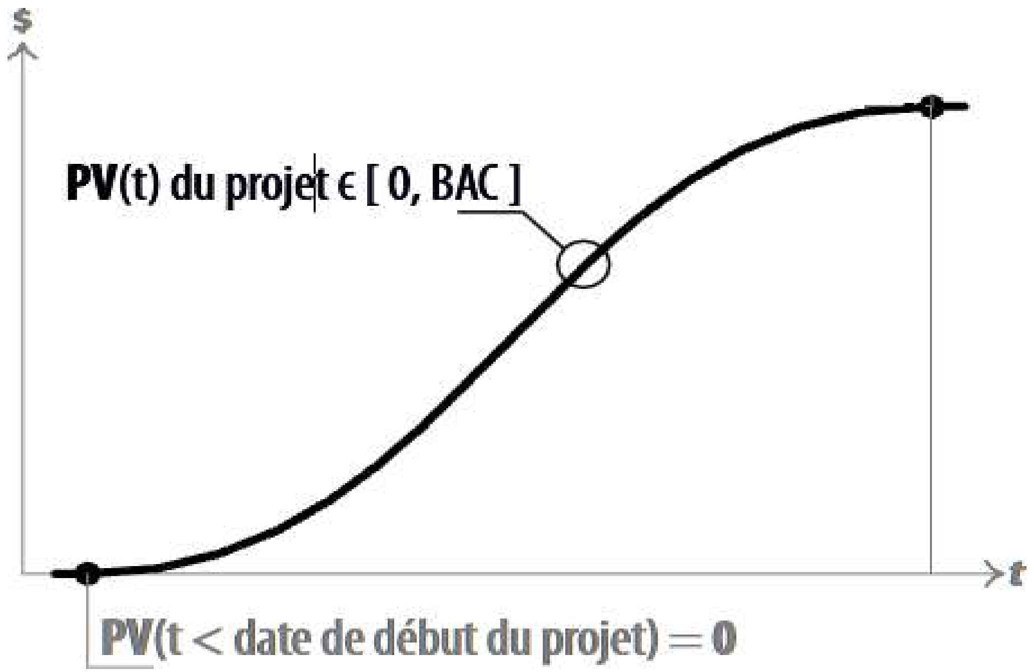
4. Gestion de la valeur acquise (EVM) - suite

Les Indicateurs

La gestion de la valeur acquise s'appuie sur 3 indicateurs clés

1. PV (Plan Value/ Valeur Planifiée) : plan budgétaire,
indiquant la planification des dépenses
sur la durée de vie du projet.

Cette courbe se construit pendant la phase de planification du projet ➔



2. AC (Actual Cost/ Coût Réel) : le budget réellement dépensé (La valeur des dépenses réelles à la date).

4. Gestion de la valeur acquise (EVM) - suite

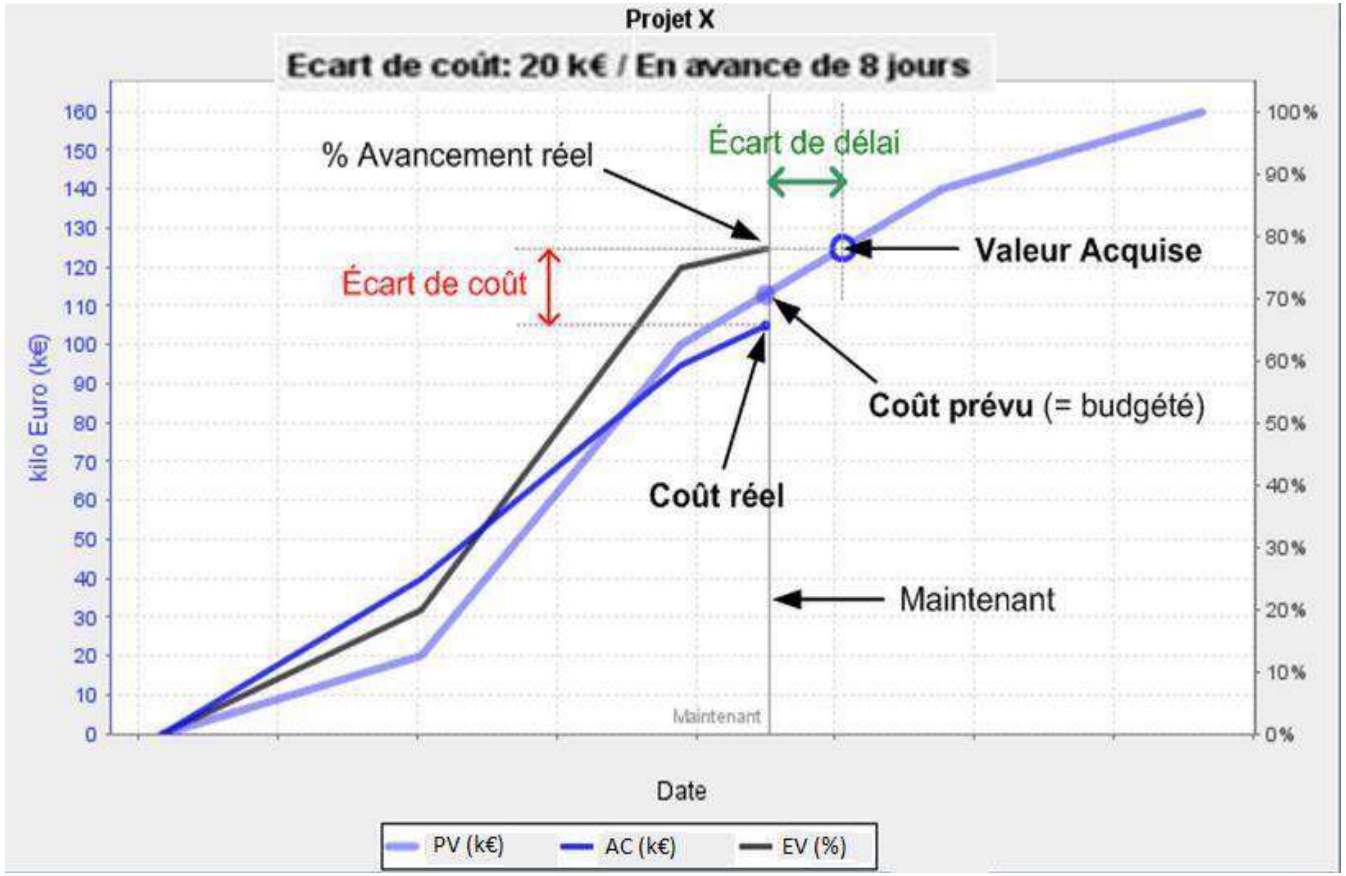
3.EV (Earned Value/Valeur Acquise) : le budget correspondant au travail effectué, indépendamment du budget réellement dépensé.
La valeur du travail réalisé à la date.

- ❑ **Degré d'effort**: l'avancement est égal à la valeur prévue à la date
- ❑ **Pourcentage d'avancement**: il est fixé par le responsable du lot
- ❑**Pourcentage fixe au début/fin**: un pourcentage fixe est associé au début et son complément à la fin
- ❑ **Prorata:** le pourcentage d'avancement est fonction de l'avancement d'une autre tâche
- ❑**Production d'unités**: la valeur acquise est égal au coût prévisionnel du nombre d'unités réalisés à la date
- ❑**Jalons:** plusieurs sont fixés tout au long de la durée de la tâche et pondérés en fonction de l'effort nécessaire pour les atteindre

Exemple *: Une tache budgétée à 10 000 € terminée à 40% possède une EV = 4000 € (40% * 10 000), même si le budget réellement dépensé pour atteindre les 40% d'avancement est différent.*

4. Gestion de la valeur acquise (EVM) - suite

Diagramme de l'EVM:



Son interprétation est très facile puisqu'il n'y a que 4 configurations possibles:

1) Tout est au mieux, c'est à dire moins cher et en avance
2) Rien ne va plus, c'est à dire trop cher et en retard
3) Trop cher mais plus vite que prévu
4) En retard mais moins cher que prévu

Il existe 2 règles pour lire un diagramme de la valeur acquise :

➢Si Valeur Acquise > Coût réel, le projet réalise des économies par rapport au budget. (Et réciproquement)

➢ Si Valeur Acquise > Coût budgété, le projet est en avance. (et réciproquement)

4. Gestion de la valeur acquise (EVM) - suite

A partir de ces 3 indicateurs clés, la technique de la valeur acquise permet d'identifier les retards projet (*schedule variance*) et les dépassements budgétaires (*cost variance*)

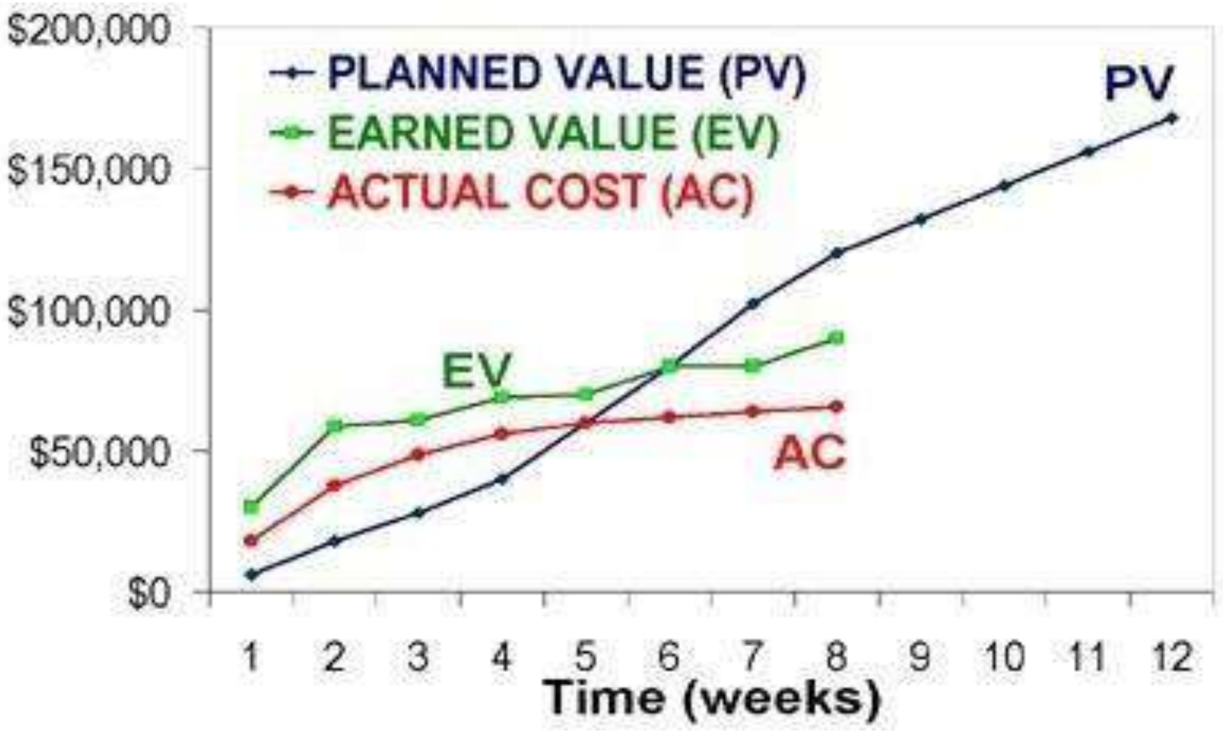
- **SV (schedule variance)** = EV - PV : l'écart entre la valeur acquise et la valeur planifiée permet d'identifier les dérives planning : un SV < 0 indique un retard sur le planning prévisionnel (le travail effectivement effectué est inférieur à celui planifié), un SV > 0 indique une avance sur le planning prévisionnel (le travail effectivement effectué est supérieur à celui planifié)

- **CV (Cost Variance)** = EV - AC : l'écart entre la valeur acquise et le budget réellement consommé permet d'identifier des dérives budgétaires : un CV < 0 indique un dépassement de budget (le coût réel du travail effectué (AC) est inférieur au cout estimé du travail effectué (EV)), un CV > 0 indique un travail moins consommateur que prévu.

4. Gestion de la valeur acquise (EVM) - suite

Un état d'avancement graphique

L'intérêt de la technique de la valeur acquise est d'offrir facilement une vue graphique de l'avancement du projet et de l'évolution des écarts en terme de planning et de budget.



4. Gestion de la valeur acquise (EVM) - suite

Des indicateurs de performances

- **SPI (Schedule Performance Index)** = EV / PV : indicateur de performance vision planning (état d'avancement réel / état d'avancement prévu). Un SPI = 1,2 indique une avance de 20% par rapport au prévisionnel. Un SPI = 0,8 indique par contre un retard de 20% par rapport au prévisionnel.

- **CPI (Cost Performance Index)** = EV / AC : indicateur de performance vision budgétaire (état d'avancement réel / budget réel). Un CPI = 1,2 indique que le coût du travail réalisé est inférieur à 20% par rapport au budget prévisionnel du même travail.

Dans le cas où ces indicateurs montrent des écarts importants (+ de 20% par exemple), cela signifie en général qu'il faut revoir le plan prévisionnel, inadapté par rapport aux réalités du projet.

Des indicateurs complémentaires

Enfin, pour terminer avec les indicateurs, 4 indicateurs permettant d’estimer la fin d’un projet

1. BAC (Budget At Completion) = Budget initial du projet

2. EAC (Estimate At Completion) -> budget réévalué EAC = AC + estimation du travail restant.

L’estimation du travail restant peut être estimé de différentes manières :

— réestimation manuelle

—travail restant = (BAC - EV) / CPI : budget initial - budget correspondant au travail réalisé, pondéré par l’indicateur de performance sur les coûts

3. ETC (Estimate To Completion) -> budget restant à consommer pour terminer le projet. ETC = EAC - AC

4. TCPI (To Complete Performance Index) -> Cost Performance Index évalué sur le reste à faire. TCPI = (BAC - EV) / ETC Cet indicateur, comparé au CPI, permet d’identifier des écarts de performance entre le travail effectué et le travail prévisionnel. Cela permet notamment d’identifier des prévisionnels abusivement optimiste ou de corriger des prévisionnels trop pessimistes.

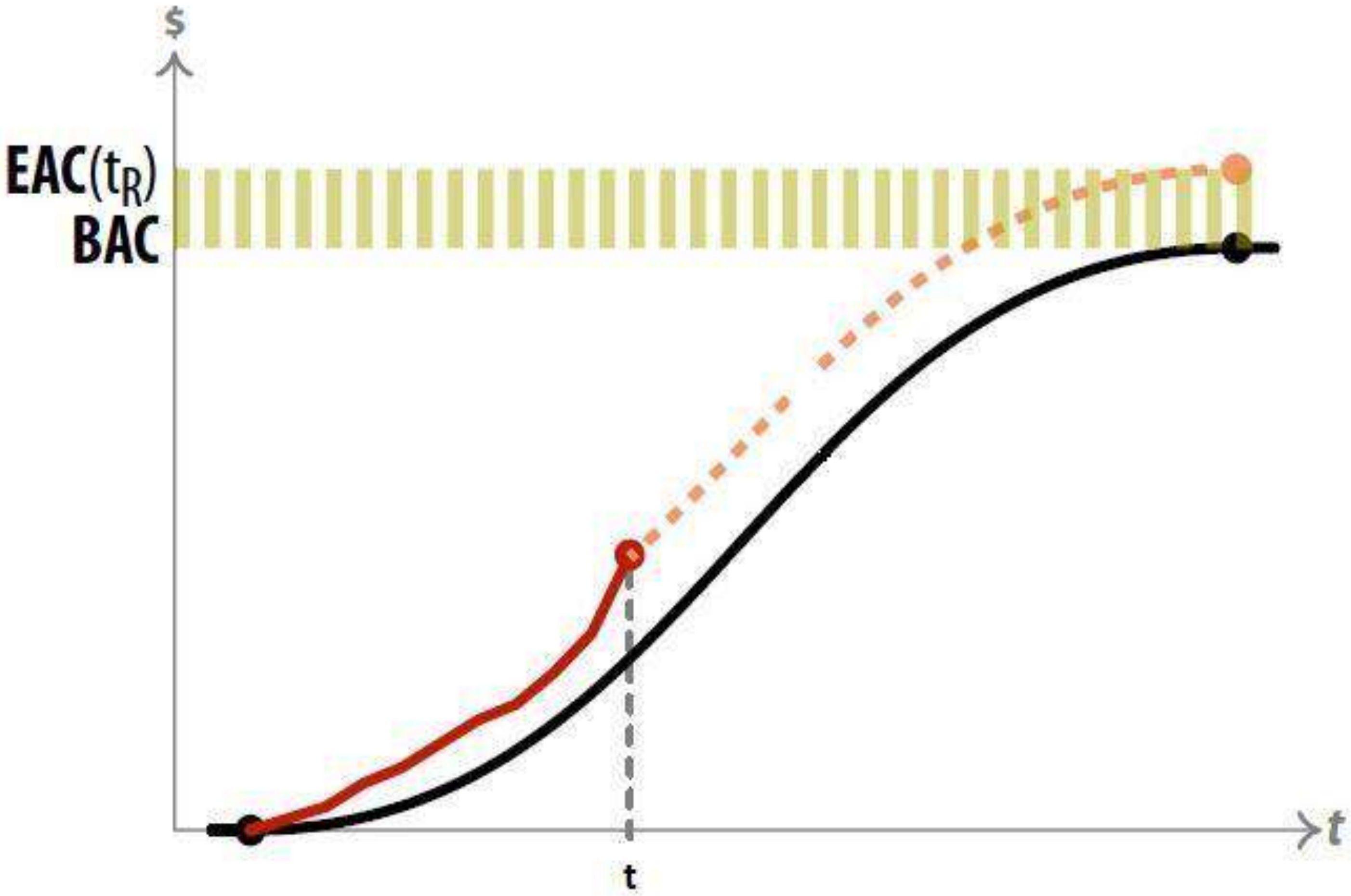
Indicateurs de variance et de performance: (Résumé)

Schedule Variance $SV(t_R) = EV(t_R) - PV(t_R)$	*Cost Variance* $CV(t_R) = EV(t_R) - AC(t_R)$
Schedule Performance Index $SPI(t_R) = \frac{EV(t_R)}{PV(t_R)}$ $SPI(t_R) > 1$ ☺ $SPI(t_R) < 1$ ☹	*Cost Performance Index* $CPI(t_R) = \frac{EV(t_R)}{AC(t_R)}$ $CPI(t_R) > 1$ ☺ $CPI(t_R) < 1$ ☹
Ratio critique, *Critical Ratio* $CR(t_R) = SPI(t_R) \times CPI(t_R)$	Avancement physique du projet $\%_{\varphi}(t_R) = \frac{EV(t_R)}{BAC}$

Outil de prédiction

$$EAC(t_R) = \frac{BAC}{CPI(t_R)}$$

Dans le cas où le CPI restera le même pour le reste du projet.



4. Gestion de la valeur acquise (EVM) - suite

Exemple : Analyse de l'avancement d'un projet

Tâches	Fin prévue en semaine	Coût budgété	Fin réelle en semaine	Coût réel
A	1	1000	1	1500
B	2	2000	2	2200
C	2	1500	Pas commencé	-
D	3	2000	Pas commencé	-
E	4	1000	Pas commencé	-

Coût Budgété du Travail Planifié (CBTP) = 1000 + 2000 + 1500 = 4500

Coût Budgété du Travail Effectué (CBTE) = 1000 + 2000 = 3000

Coût Réel du Travail Effectué (CRTE) = 1500 + 2200 = 3700

- Schedule Performance Index – SPI - Indice de performance des délais
  SPI = CBTE/CBTP = 3000/4500 = 0.67 => 67%
- Cost Performance Index – CPI- Indice de performance des coûts
  CPI = CBTE/CRTE = 3000/3700 = 0.81 => 81%

5. Principes du PERT probabiliste

La durée de chaque tâche i est incertaine

La durée, Di, est une variable aléatoire, ce qui signifie que Di peut prendre plusieurs valeurs, selon une distribution de probabilité. A partir de ces valeurs on pourra calculer la durée moyenne, la variance et l'écart type.

***Remarque* :**

Dire que la durée est incertaine, ne signifie pas qu'elle peut prendre n'importe quelle valeur, mais certaines valeurs connues avec plus ou moins de précision. Ainsi, des travaux de peinture prendront 6 jours, en principe, mais selon l'état des murs, la durée sera plus courte ou plus longue, tout en restant dans une certaine fourchette, par exemple entre 4 et 9 jours.

Exemple : Variable aléatoire avec sa distribution de probabilité

Il s'agit de la durée en heures d'une tâche de peinture, la tâche A.

Durée Possible : Di	Probabilité cores pon-dante Pi	Moyenne = E(D) = somme des Pi Di	Variance = somme des Pi ((Di - E(D))^2
21	0,2	4,2	4,23
25	0,4	10	0,144r
28	0,3	8,4	1,73
30	0,1	3	1,94
Total	1	25,6	8,04
Durée moyenne = E(D)= 25,6			
Variance = V(D) = 8,4 = $\sigma(D)^2$			
écart-type = σ(D) = 2,84			

5. Principes du PERT probabiliste - suite

La durée du projet durée sera toujours la durée du chemin le plus long

- Si la durée d'une tâche se trouve accrue, la durée du projet pourra changer et le chemin critique se déplacer.
- La durée d'un chemin est égale à la somme des durées des tâches du chemin :

  Sd = Σ Di pour toutes les tâches du chemin.
- La somme des durées, Sd, est une variable aléatoire, qui peut prendre plusieurs valeurs selon une distribution de probabilité

La loi normale (ou loi de Laplace-Gauss ou loi de Gauss)

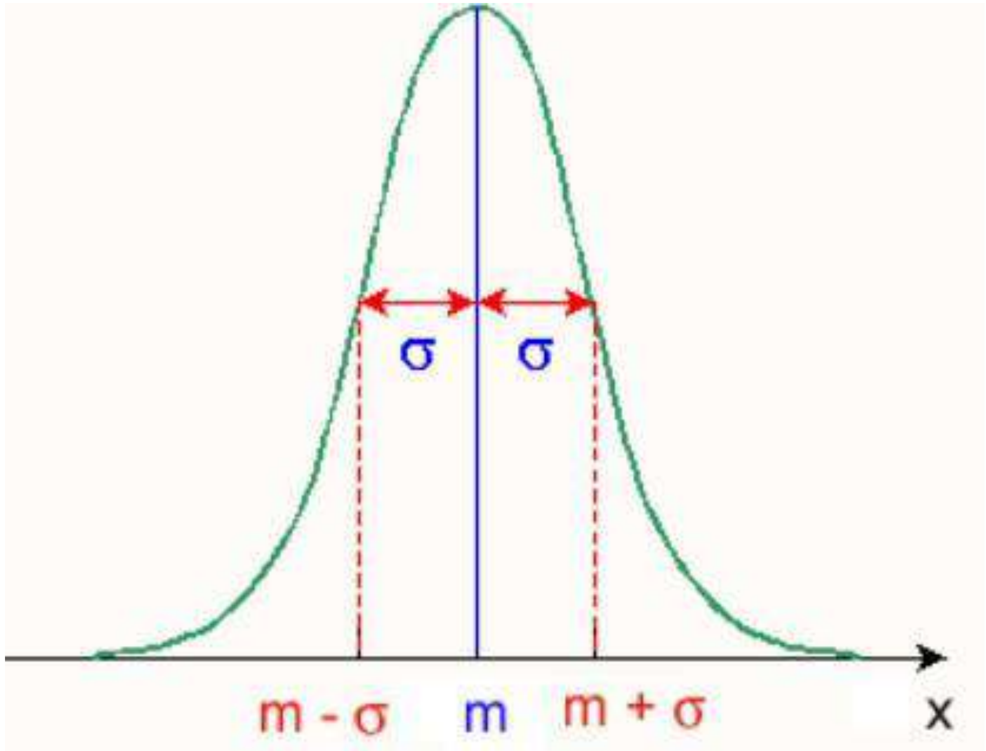
1 – Les fondamentaux

- La distribution normale est une distribution théorique, en ce sens qu'elle est une idéalisation mathématique qui ne se rencontre jamais ***exactement*** dans la nature. Mais de nombreuses distributions réellement observées s'en rapprochent et ont cette fameuse forme de « cloche » (beaucoup d'individus autour de la moyenne, de moins en moins au fur à mesure qu'on s'en éloigne, et ceci de façon symétrique).

- D'autre part, elle est très utilisée en statistiques inférentielles : nous verrons en particulier qu'une moyenne calculée sur un échantillon est une variable aléatoire qui tend à suivre une loi normale quand la taille de l'échantillon augmente, même si la population initiale a une tout autre distribution.

5. Principes du PERT probabiliste - suite

dont la représentation graphique est la suivante :



Notons que :

- la droite x= m est axe de symétrie
- les points d’inflexion sont situés à une distance σ de cet axe de symétrie

5. Principes du PERT probabiliste - suite

3 – Calculs de probabilités sur une loi normale

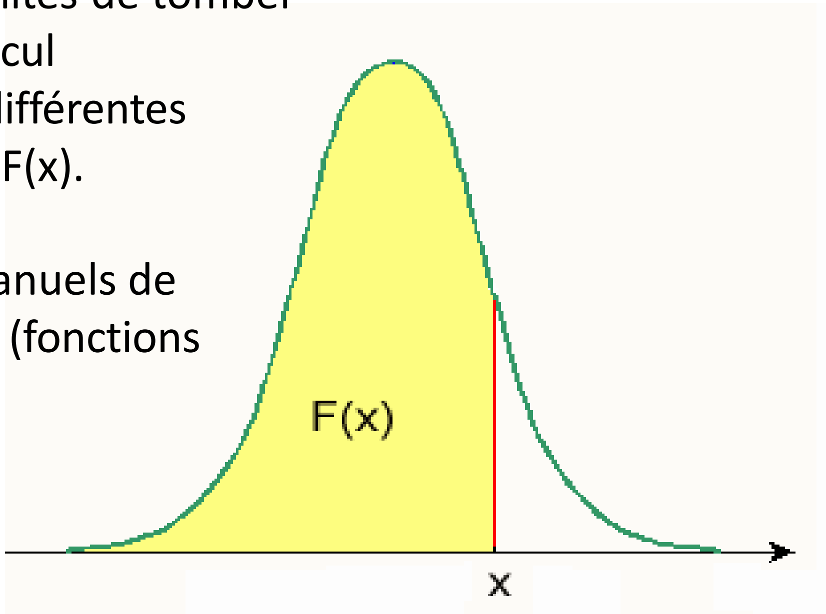
a – Un gros inconvénient : on ne sait pas exprimer F(x) en fonctions de x

- On ne connaît pas de primitive de la fonction e^{-x^2} , donc on ne sait pas donner l'expression algébrique de la fonction de répartition F(x).

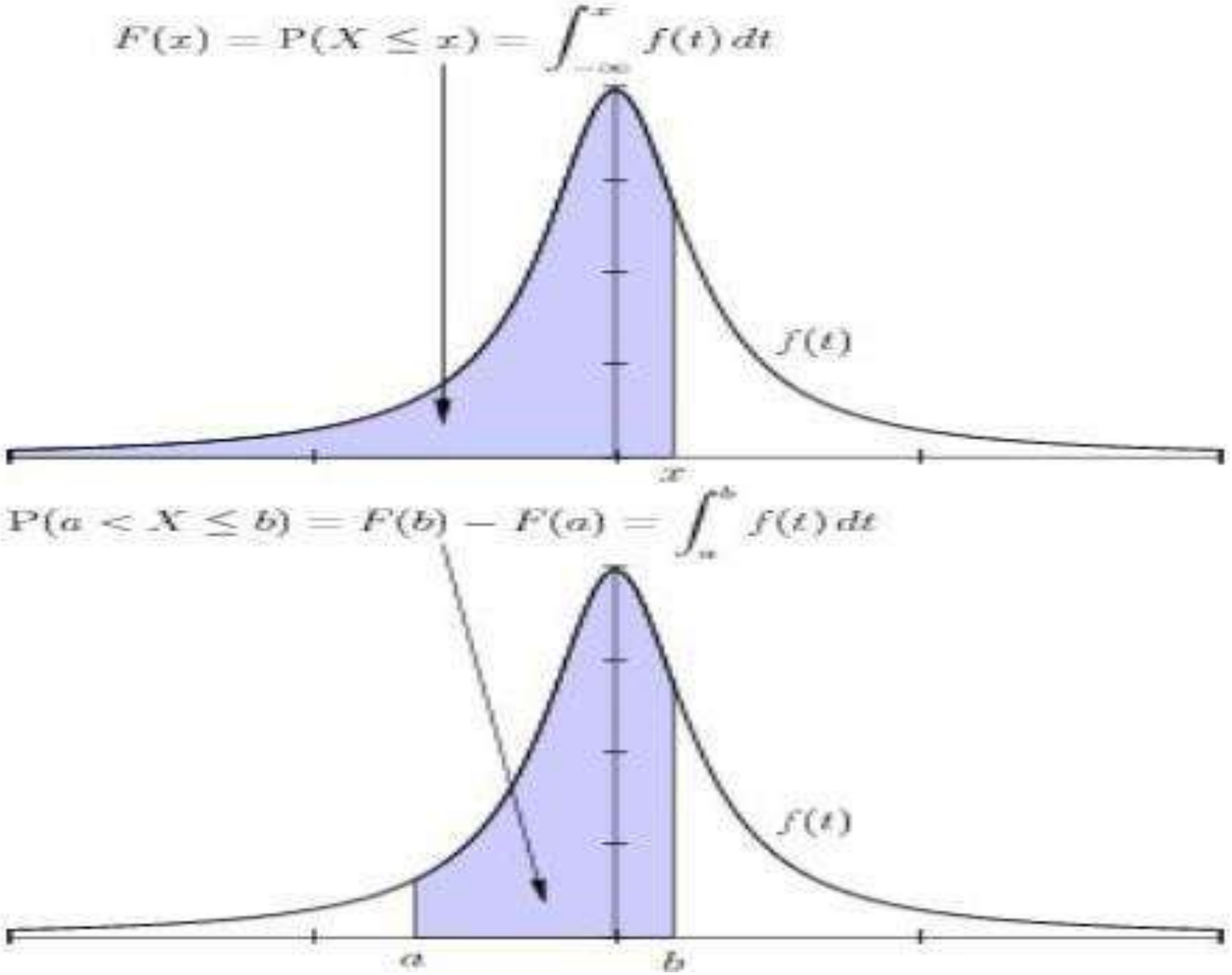
- Comment dans ces conditions calculer les probabilités de tomber entre telle ou telle valeur? Par des techniques de calcul numérique (en mesurant l'aire sous la courbe pour différentes valeurs de x), on a pu constituer des tables donnant F(x).

- Ces tables figurent en annexe de la plupart des manuels de probabilités, et sont intégrées dans certains logiciels (fonctions d'Excel par exemple).

- Pour tous les calculs, on se ramène à la fonction de répartition de la loi N(0,1), dite loi normale centrée réduite.



5. Principes du PERT probabiliste - suite



5. Principes du PERT probabiliste - suite

Allure de la densité normale centrée réduite

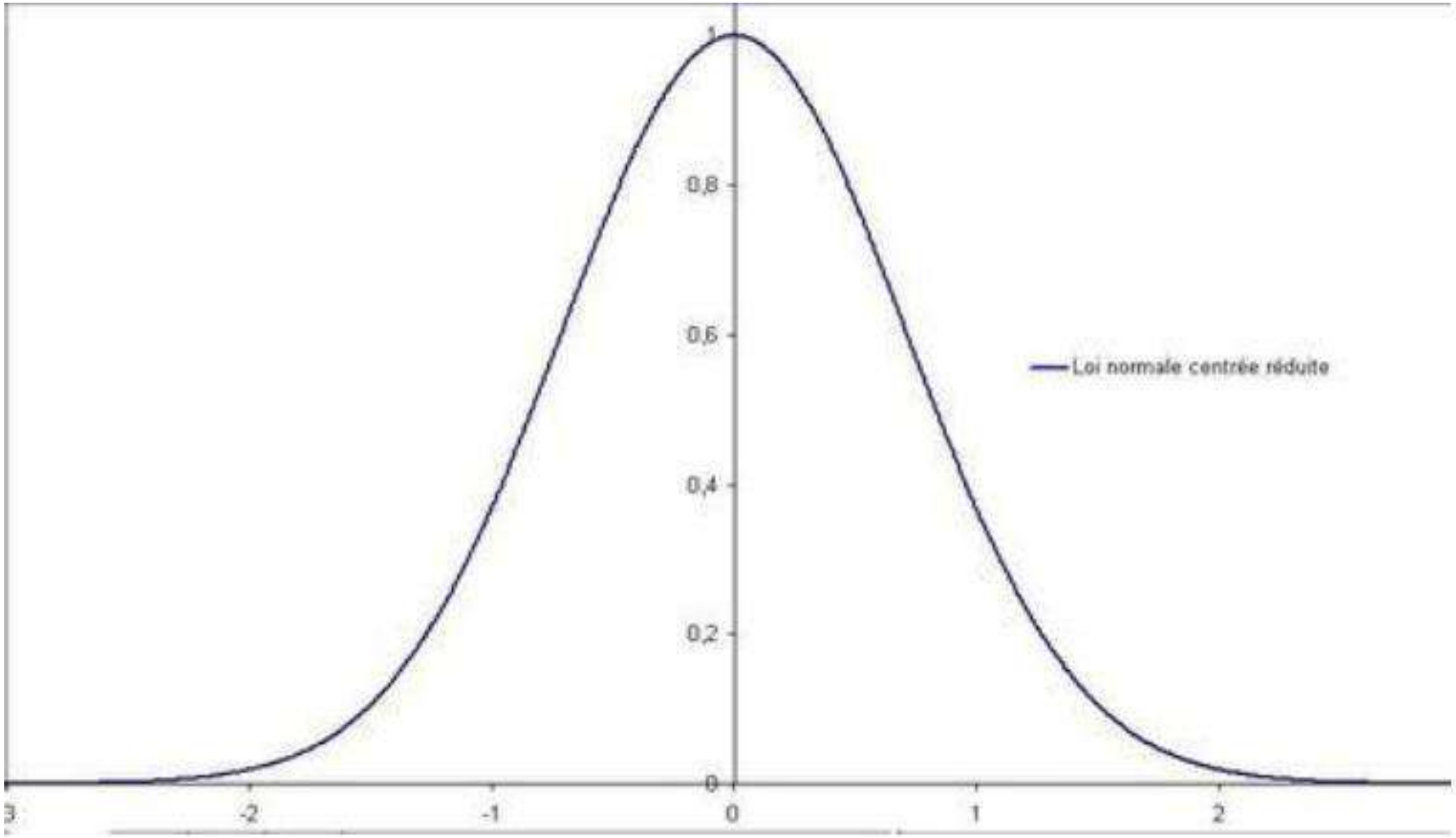
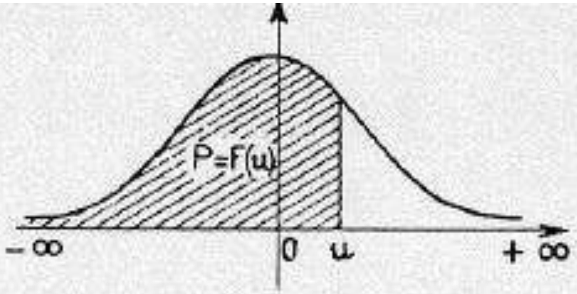


Table de la loi normale centrée réduite



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	[illegible]	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	[illegible]	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	[illegible]	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	[illegible]	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	[illegible]	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	[illegible]	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852

On lit par exemple P(X ≤ 0, 64) = 0,7389.

5. Principes du PERT probabiliste - suite

Exemple :

Somme de deux variables aléatoires (A et B) avec sa distribution de probabilité

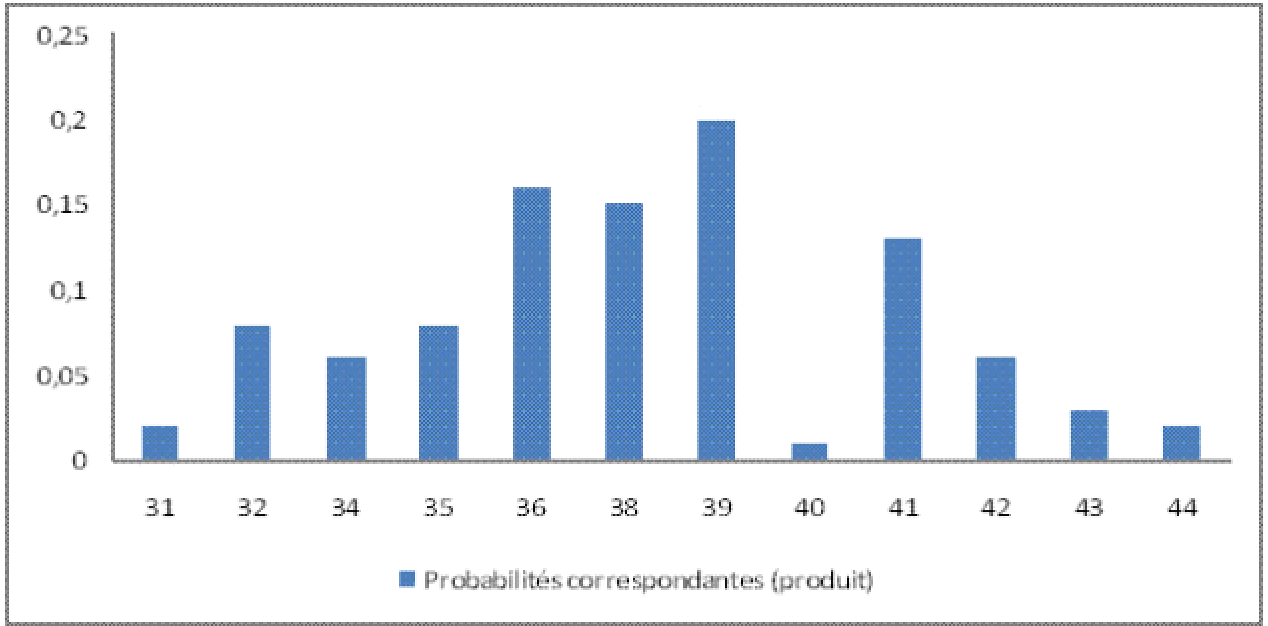
A ➔ correspond à la durée en heures d'une tâche de peinture,

B ➔ au travail préalable de préparation du mur.

Exemple de somme de 2 variables			
Durées Possibles de A : Da	Probabilité correspondante Pi pour A	Durées possibles de B : Db	Probabilité correspondante Pi pour B
21	0,2	10	0,1
25	0,4	11	0,4
28	0,3	13	0,3
30	0,1	14	0,2
Total	1		1

Tableau

Ensemble des durées possibles pour les tâches consécutives A + B	Probabilités correspondantes (produit)		Ensemble des durées possibles pour les tâches consécutives A + B	Probabilités correspondantes (produit)
31	0,02		31	0,02
32	0,08		32	0,08
34	0,06		34	0,06
35	0,04		35	0,08
35	0,04		36	0,16
36	0,16		38	0,15
38	0,12		39	0,2
39	0,08		40	0,01
38	0,03		41	0,13
39	0,12		42	0,06
41	0,09		43	0,03
42	0,06		44	0,02
40	0,01		Total	1
41	0,04			
43	0,03			
44	0,02			



Loi Bêta

- Il arrive très souvent que la durée d'une tâche et donc de ses couts ne soit pas certaine ce qui entraine une incertitude sur la durée totale du projet…
- De ce fait, la durée d'une tâche peut être considérée comme une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité.

Définition : Loi Bêta

La durée de chaque tâche du projet est considérée comme aléatoire et la distribution Bêta est systématiquement utilisée pour calculer une durée probable selon 3 paramètres.

Il suffit de se poser les trois questions suivantes :

1. Quelle est la durée minimale ?
2. Quelle est la durée maximale ?
3. Quelle est la durée la plus probable ?

Cette loi, appelée "loi bêta" ou encore "loi de Pert" est présentée sous la forme suivante:

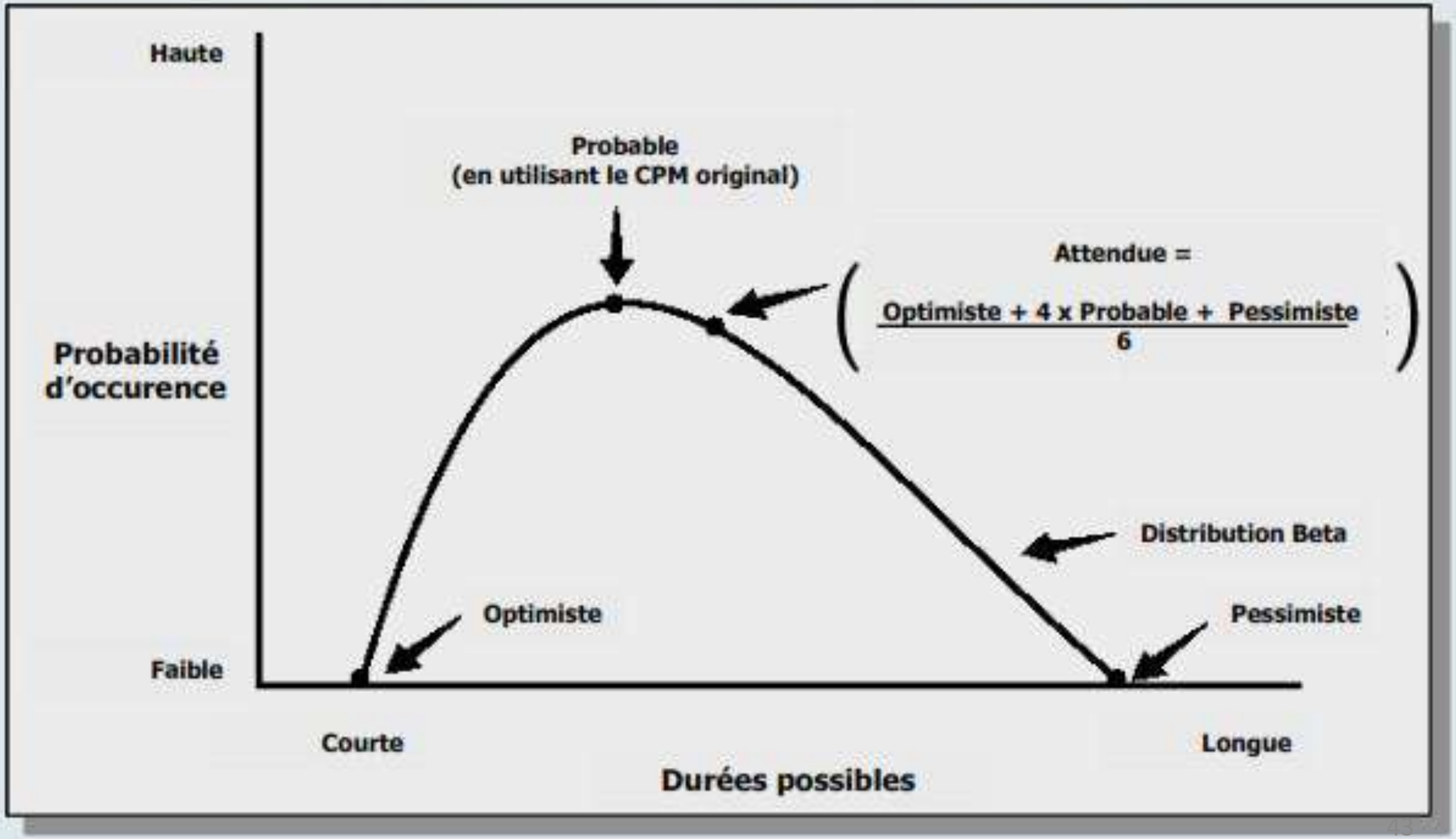
$$t_{Pr}(T_i) = \frac{t_O(T_i) + 4 \cdot t_V(T_i) + t_P(T_i)}{6}$$

et donne la durée probable t_{pr} d'une tâche où nous avons t_0, t_v, t_p qui sont respectivement les durées optimistes, vraisemblables et pessimistes de la tâche

5. Principes du PERT probabiliste - suite

PERT (Program Evaluation and Review Technique)

❖ Distribution Bêta



5. Principes du PERT probabiliste - suite

Une fois estimée, la durée moyenne de chaque tâche, on calcule pour chacune d'elle la variance.

Variance d'une tâche « *i* » ➔ $$(\sigma_i^2) = \left(\frac{t_p - t_o}{6}\right)^2$$

On admet que la somme des durées aléatoires des tâches tend à suivre une loi normale, définie par :

- ***la durée moyenne du projet*** (T Projet) correspondant à la somme des durées moyennes des tâches du chemin critique

$$T_{projet} = \sum_{i=1}^{n} t_{mi}$$

- ***l'écart type du projet*** correspondant à la racine carrée de la somme des variances des tâches critiques, soit :

$$\sigma_{projet} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}$$

5. Principes du PERT probabiliste - suite

Exemple

Soit un chemin critique comprenant trois tâches {A, B et C}, dont les différentes durées (optimiste, pessimiste et probable) sont mentionnées dans le tableau ci-dessous.

Tâches	t_o	t_t	t_p	t_m	σ^2
A	10	14	18		
B	6	7	11		
C	7	9	11		
			somme		

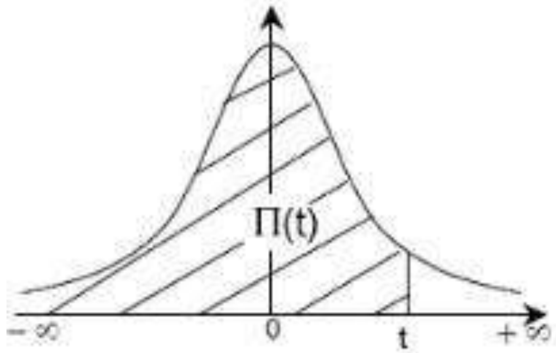
On obtient les résultats suivants :

- Durée moyenne du projet, ***T projet*= 30,5 jours**
- Ecart type du projet, $\sigma_{projet} = \sqrt{2{,}88} = 1{,}69 \text{ jours}$

Si, par exemple, on désire connaître la probabilité de terminer le projet dans moins de 33j, on utilise la table de la loi normale réduite, soit : $u = (t_x - t_m)/\sigma_{Projet} = (33 - 30{,}5)/1{,}69 = 1{,}48$

❑En consultant une table de loi normale réduite, nous pouvons déterminer la probabilité correspondant à cette valeur « u ». La probabilité de terminer le projet en moins de 33jours, est de **93,06%.**

5. Principes du PERT probabiliste - suite



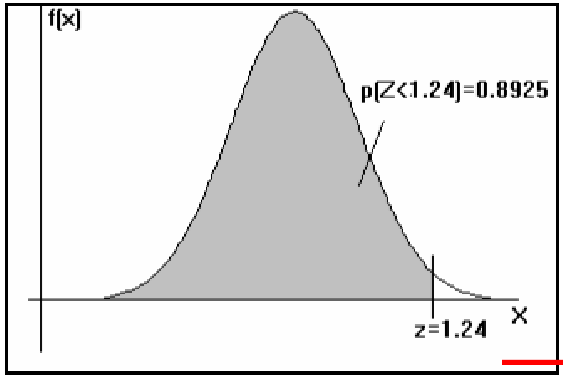
$$\Pi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Table pour les grandes valeurs de t :

t	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4	4,2	4,4	4,6	4,8
Π(t)	0,99865003	0,99931280	0,99966302	0,99984085	0,99992763	0,99996831	0,99998665	0,99999458	0,99999789	0,99999921

5. Principes du PERT probabiliste - suite



Rappels:

1/ P(Z > z) = 1 - P(Z < z) et 2/ P(Z < -z) = P(Z > z)
Exemple: Sachant P(Z < 1,24) = 0,8925, on en déduit:
1/ (P(Z > 1,24) = 1 - P(Z < 1,24) = 1- 0,8925 = 0,1075
2/ P(Z < -1,24) = P(Z > 1,24) = 0,1075

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

5. Principes du PERT probabiliste - suite

- On peut également fixer un délai pour une probabilité donnée. Par exemple, quel délai fixé à mon client en regard d'une probabilité de 99,86%.

- La table de la loi normale réduite nous indique la valeur « u » correspond à cette probabilité, soit ***u = 3***. Le délai à fixer sera de : **30,5 + (3 x 1,69)**) ≈ **36** jours.

On peut donner une mesure du risque par le ratio :

$$R = (t_{pes} - t_{opt}) / t_{pes}$$

Et considérer que :

$R<0.25$: *risque faible*

$0.25 < R < 0.5$: **risque moyen**

$R>0.5$: **risque fort**