

3. Techniques de planification - PERT, MPM, GANTT -

OUTIL	UTILISATION	REMARQUE
- PERT - MPM	Planification de projets lourds ou d'ouvrages complexes	Durées estimées par loi statistique
- GANTT	Planification de projets simples	durées estimées par similitudes ou par moyenne historique
-Graphe de fabrication	Planification de production	durées calculées en fonction des temps gammes et des besoins en nomenclature
- MPM simplifié	Equilibrage de ligne	Temps de chaque opération mesuré de manière très précise (chronométrage, MOST, MTM)

3.1. La méthode PERT

Historique de la méthode PERT

PERT (USA) : potentiel – étapes

Le PERT (Program Evaluation and Review Technique – Technique d'élaboration et de mise à jour de programme) a été créé en 1958, aux USA pour la planification du programme spatial POLARIS. Le délai initial de ce programme qui a fait intervenir 9000 sous-traitants, était de 6 ans. L'application de la technique du PERT a permis de réduire ce délai à 2,5 ans.

Définitions

- Tâches consécutives : Tâches qui se suivent
- Tâche antérieure : Tâche qui, par rapport à une autre, doit être réalisée avant.
- Tâche antécédente : Tâche immédiatement antérieure à une autre.

3.1. La méthode PERT - suite

a) Le PERT présente d'une façon visuelle l'enchaînement logique des tâches en vue :

- d'en faciliter la coordination et le contrôle,
- d'améliorer les prévisions de durée et de coût.

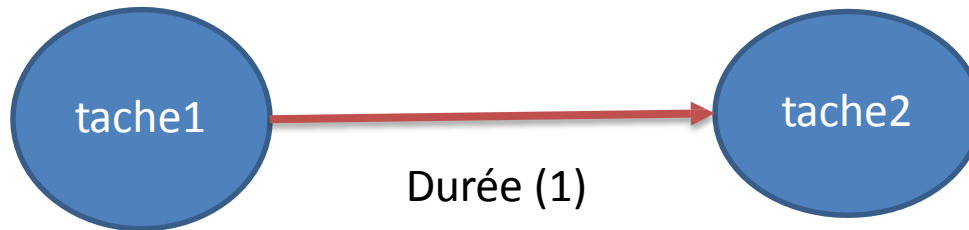
b) Le tracé du réseau PERT permet de connaître le chemin critique (c'est-à-dire le chemin le plus long entre la première et la dernière étape) et par conséquent :

- la durée totale du projet,
- les tâches pour lesquelles tout retard entraîne l'allongement du projet.

3.1. La méthode PERT - suite

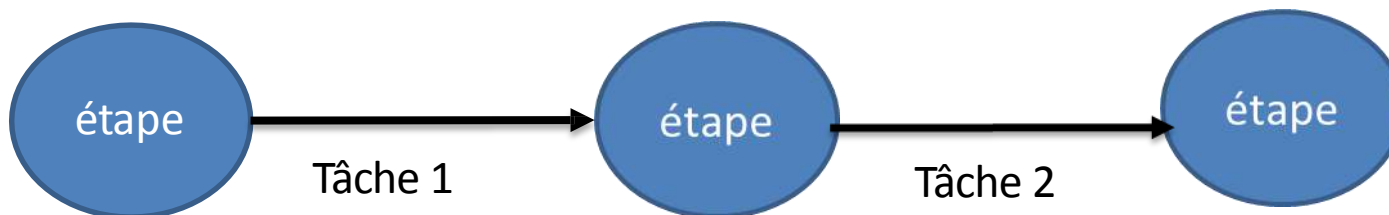
Potentiel-tâches

- Un sommet du graphe correspond à une tâche.
- Chaque arc est porteur d'un "poids" correspondant à la durée de la tâche

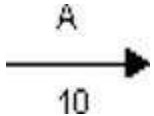
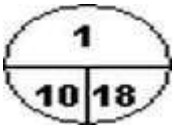
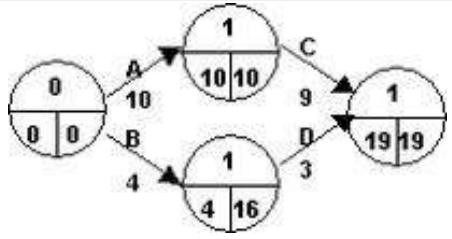
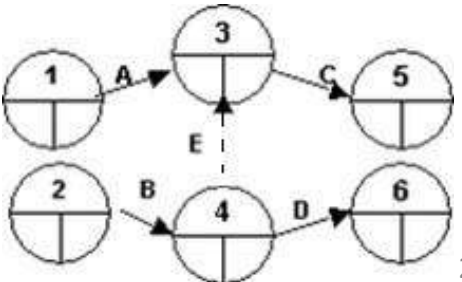


Potentiel- Etapes (PERT)

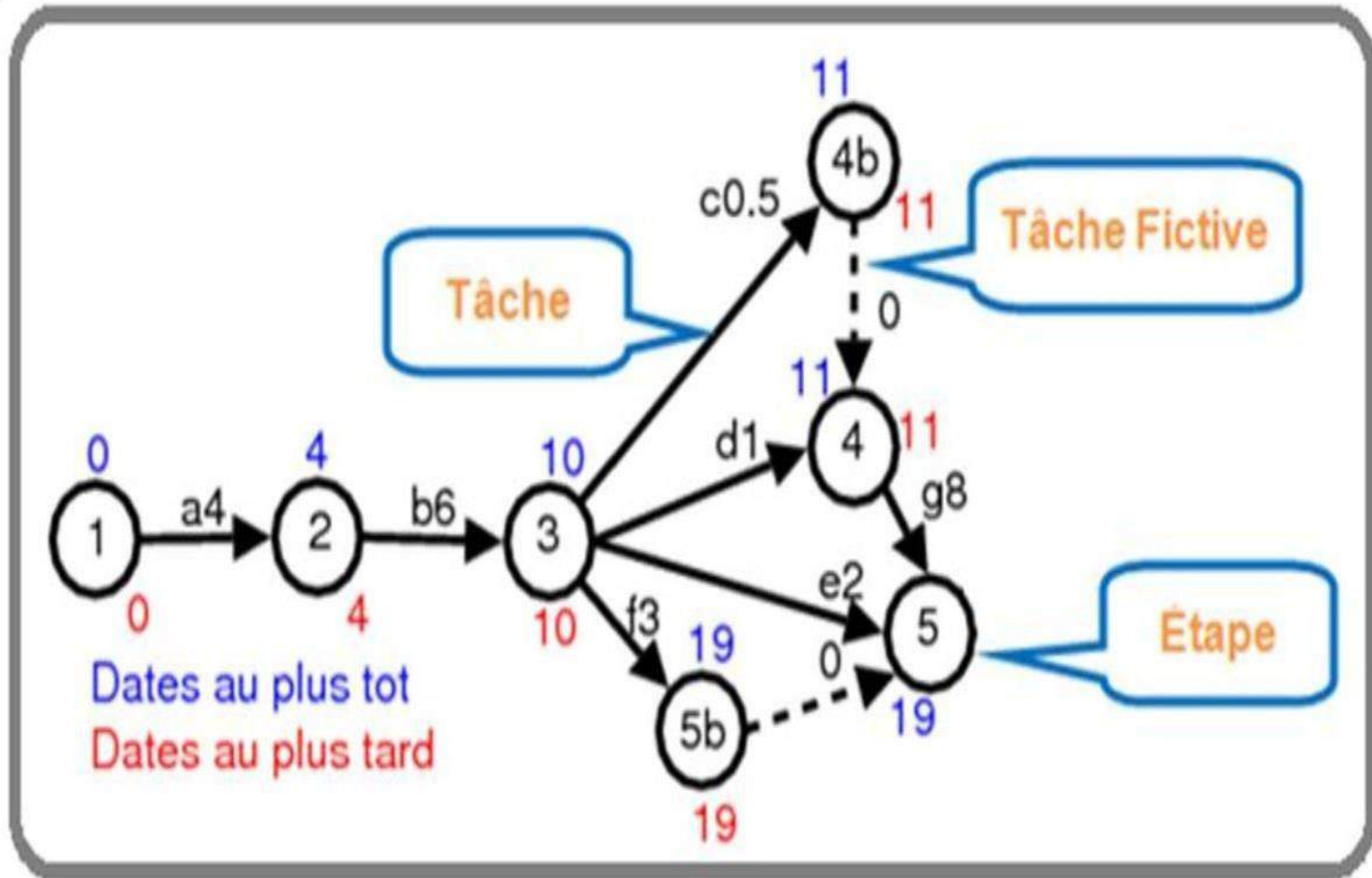
- Chaque arc correspond à une tâche.
- Le début et la fin d'une tâche sont les étapes du projet et correspondent à des sommets du graphe.



3.1. La méthode PERT - suite

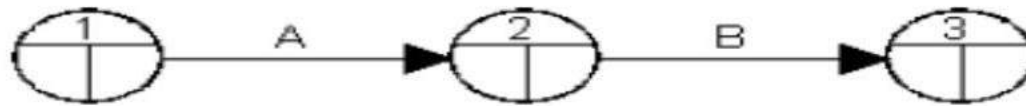
Terme	Définition	Représentation graphique
Tâche	La tâche évolue d'un état initial vers un état final. Chaque tâche a une durée et un coût.	<p>Sa représentation est une flèche évoluant dans le sens du temps. Sa longueur n'est pas proportionnelle à sa durée.</p> <p>A : Nom de la tâche 10 : Durée de la tâche</p> 
Étapes	Une étape est le début ou la fin d'une tâche. Elle n'a pas de durée ni de coût.	<p>1 : N° de l'étape 10 : Date au plus tôt 18 : Date au plus tard</p> 
Réseau	C'est l'ensemble des tâches et des étapes qui définissent le projet. Il met en évidence les relations entre les tâches et les étapes.	
Tâche fictive	C'est une contrainte entre tâches non dépendantes. Sa durée et son coût sont nuls.	<p>Elle est représentée par une flèche en pointillés. Dans le cas ci-dessous, E est fictive.</p> <p>C suit A et B D suit seulement B</p> 

TÂCHE , ETAPE ET TÂCHE FICTIVE

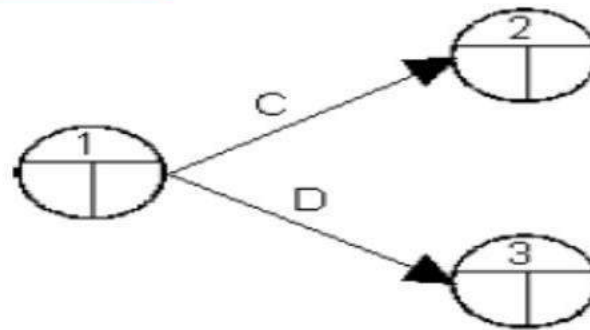


REPRÉSENTATION DU PERT

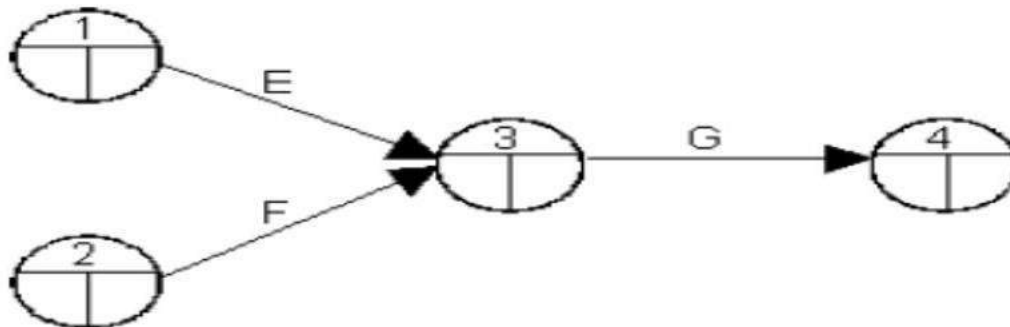
- Toute tâche a une étape de début et une tâche de fin



- Deux tâches simultanées



- Deux étapes convergentes



3.1. La méthode PERT - suite

- Conventions

- 1/ Toute tâche a pour début une étape d'origine et pour extrémité une étape de fin.
- 2/ Une étape ne peut être atteinte que lorsque toutes les tâches qui la précèdent sont terminées.
- 3/ Aucune tâche ne peut être réalisée si l'étape d'origine n'a pas été atteinte.

Méthodologie de mise en œuvre

1/ Liste des tâches à réaliser, de leurs antériorités et de leurs antécédences.

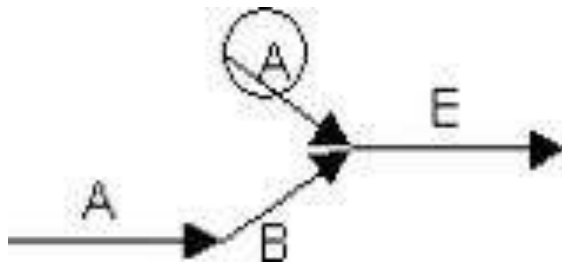
Une grande attention est à porter à cette partie de l'étude. Il est préférable de construire un tableau sur l'exemple suivant. Une première approche est faite en intégrant un grand nombre de tâches antérieures. Afin d'alléger le réseau qui sera à construire, seules les antécédences sont à conserver.

3.1. La méthode PERT - suite

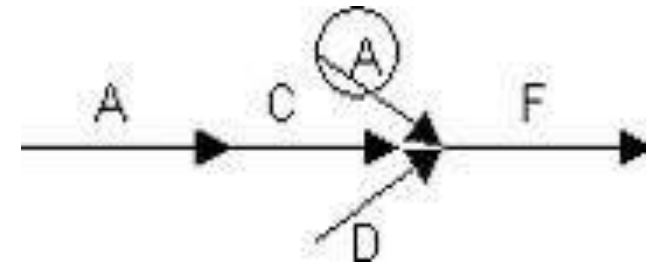
Tâches	Tâches antérieures
A	-
B	A
C	A
D	-
E	AB
F	ACD

'A' n'est pas immédiatement antérieure à 'E' ni à 'F'. Il est inutile de conserver ce surplus d'information, car la tâche 'A' ne peut être représentée qu'une seule fois (voir schémas ci-dessous).

Tâches antécédentes
-
A
A
-
B
CD



La tâche A est à réaliser avant la tâche B.
Elle n'est donc pas immédiatement antérieure à E.

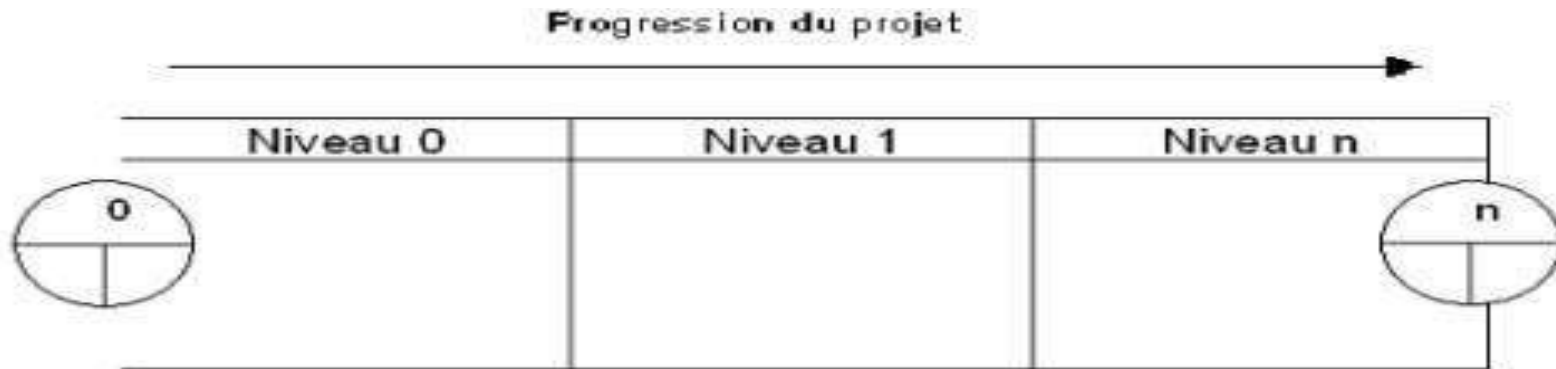


La tâche A est à réaliser avant la tâche C.
Elle n'est donc pas immédiatement antérieure à F.

3.1. La méthode PERT - suite

2 / Détermination des niveaux des tâches.

Afin de réaliser clairement le réseau PERT, il convient de définir un niveau de réalisation pour chaque tâche. Un niveau est un instant dans le temps. Plus ce niveau est élevé, plus cet instant est éloigné de la première étape du projet.



L'objectif est d'identifier quel est le niveau de chaque tâche du projet.

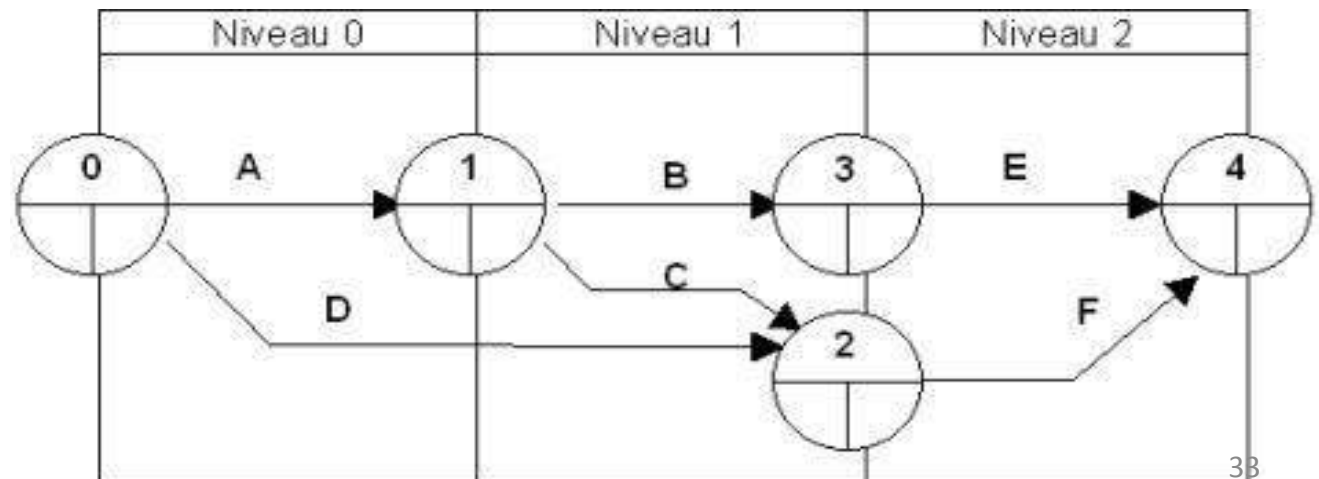
Pour cela, il est nécessaire de construire un tableau sur lequel on identifie les tâches sans antécédence et de les éliminer au fur et à mesure (exemple ci-dessous).

3.1. La méthode PERT - suite

Tâches	Tâches antécédentes	Niveau 0	Niveau 1	Niveau 2
A	-	-	-	-
B	A	A	-	-
C	A	A	B	-
D	-	-	E	-
E	B	B	-	-
F	C D	C D	-	-
Tâches sans antécédence :		A D	B C	E F

Cela permet de placer chaque tâche sur son niveau et de construire le réseau PERT.

Représentation du réseau →



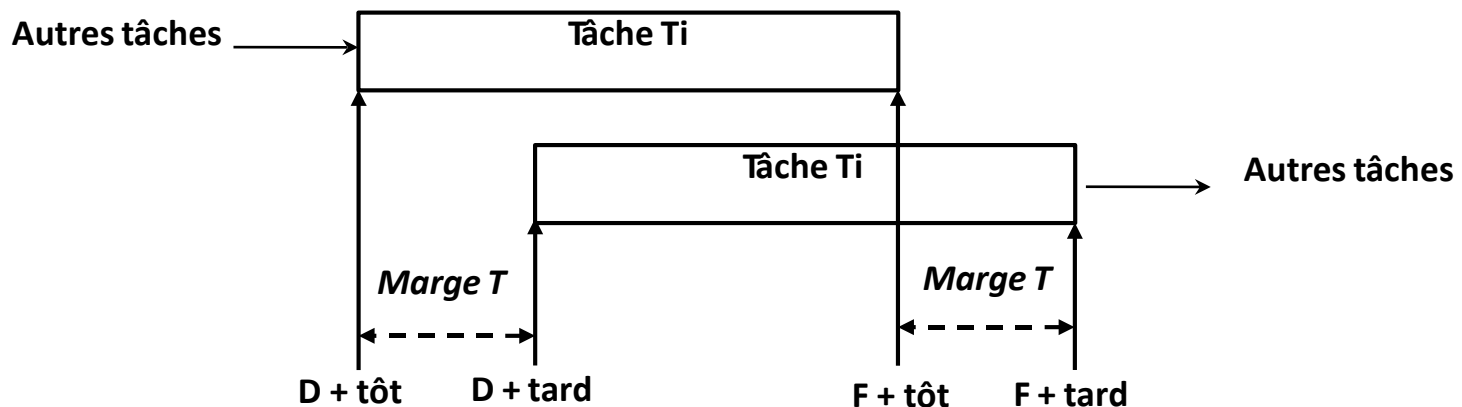
3.1. La méthode PERT - suite

3/ Affectation des durées et définitions des dates d'étapes.

Chaque étape est caractérisée par une date au plus tôt et une date au plus tard. Ces dates sont définies en fonction de la durée des tâches. Nous ne décrivons pas dans ce contenu de quelle manière les durées sont définies. Nous rappellerons simplement qu'une durée dépend de la charge de travail que représente la tâche et du nombre de ressources dont on dispose pour la réaliser. Nous considérerons donc dans notre exemple que ces durées ont été définies et ce, de manière la plus objective.

3.1. Détermination des dates de fin au plus tôt.

Marge totale = Date au plus tard – Date au plus tôt



3.1. La méthode PERT - suite

L'étape initiale du projet débute au jour 0. c'est à partir de cette étape que l'on commence à cumuler les durées de chaque tâche afin de définir les dates de fin au plus tôt amont.

Fin au plus tôt amont = Fin au plus tôt aval + durée de la tâche.

Tâches	Durée (j)	Etape Fin	Fin au + tôt	Date Retenue
A	2	1	$0+2= 2$	2
B	6	3	$2+6 = 8$	8
C	5	2	$2+5= \color{red}{-7}$	10
D	10	2	$0+10=10$	15
E	7	4	$8+7= 15$	
F	4	4	$10+4= \color{red}{-14}$	

✓ La date de fin au plus tôt est la somme de la fin au plus tôt de l'étape aval et de la durée de la tâche.

✓ Dans notre exemple, les dates de fin au plus tôt de l'étape 2 et l'étape 4 sont conditionnées par deux tâches différentes. C'est la somme la plus élevée qui est retenue.

3.1. La méthode PERT - suite

3.2. Détermination des dates de fin au plus tard.

Pour la dernière étape, la date de fin au plus tôt est la même que la date de fin au plus tard. Dans notre exemple, le projet se termine à $j+15$. C'est à partir de l'étape de fin du projet que l'on retranche les durées de chaque tâche pour définir la date de début au plus tard de l'étape aval.

Fin au plus tard aval = fin au plus tard amont – durée de la tâche.

Tâches	Durée (j)	Etape Début	Fin au + tard	Date Retenue
A	2	0	$2-2 = 0$	0
B	6	1	$8-6 = 2$	2
C	5	1	$11-5 = \color{red}{-6}$	8
D	10	0	$11-10 = \color{red}{+1}$	11
E	7	3	$15-7 = 8$	
F	4	2	$15-4 = 11$	

● La date de fin au plus tard est la différence entre la fin au plus tard de l'étape amont et de la durée de la tâche.

● Dans notre exemple, les dates de fin au plus tard de l'étape 0 et l'étape 1 sont conditionnées par deux tâches différentes. C'est le résultat le plus faible qui est retenue.

3.1. La méthode PERT - suite

4/ Identification du chemin critique et des marges.

Une fois ces valeurs définies, on en déduira :

- **Le chemin critique du projet**

Suite des tâches du réseau ne comportant aucune marge (date au plus tôt = date au plus tard).

La durée totale des tâches critiques donne la durée minimale de réalisation du projet. Le moindre retard au démarrage de l'une de ces tâches entraîne un retard équivalent sur la date de fin du projet.

- **Les tâche à marge**

Tâches disposant d'un battement possible dans le temps (date au plus tôt < date de fin au plus tard)

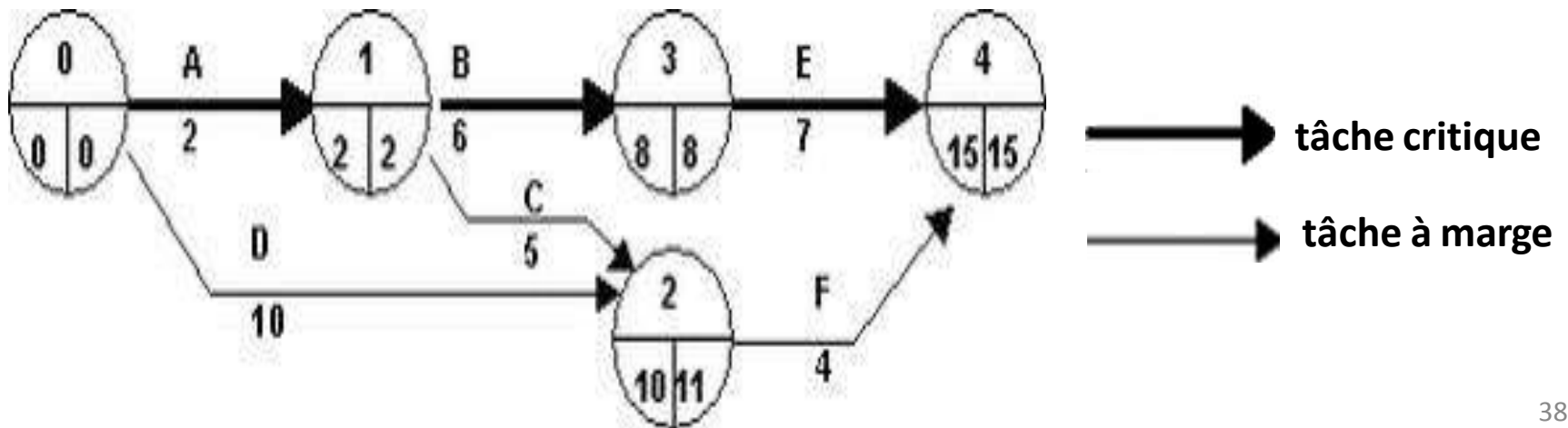
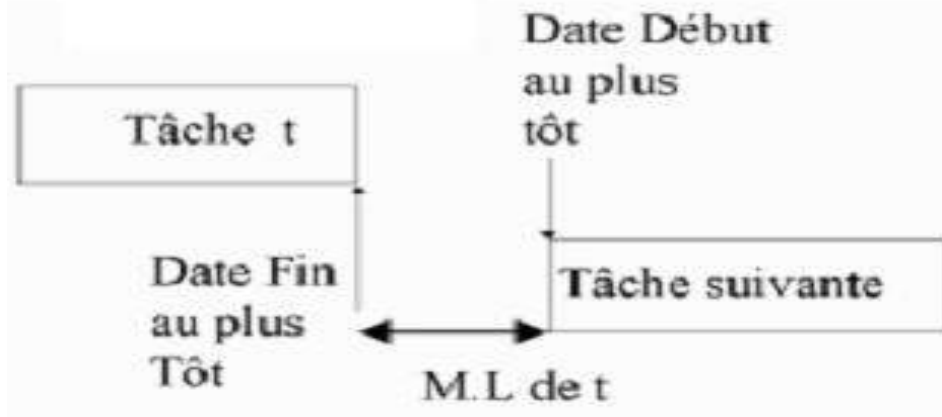
On distingue deux types de marge :

- **La marge totale** : Retard maximum que l'on peut prendre pour débiter une tâche sans remettre en cause les dates au plus tard des tâches suivantes.

- **La marge libre** : Retard maximum que l'on peut prendre pour débiter une tâche sans remettre en cause les dates au plus tôt des tâches suivantes.

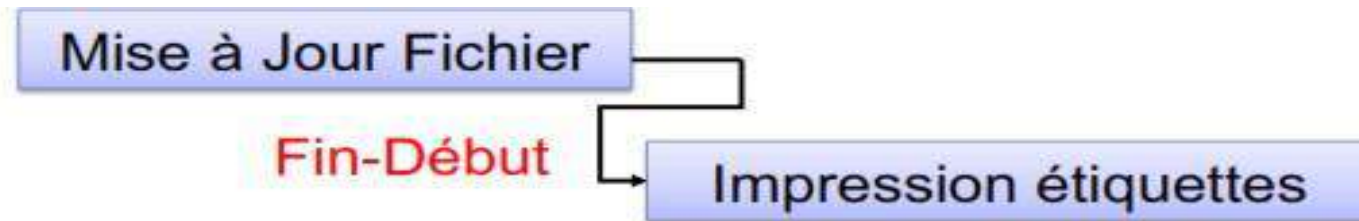
3.1. La méthode PERT - suite

La **marge libre** correspond au temps entre la fin d'une tâche et le début de la tâche suivante, la marge libre représente la différence entre la date de début au plus tôt de la tâche suivante et la date de fin au plus tôt de la tâche précédente.



3.1. La méthode PERT - suite

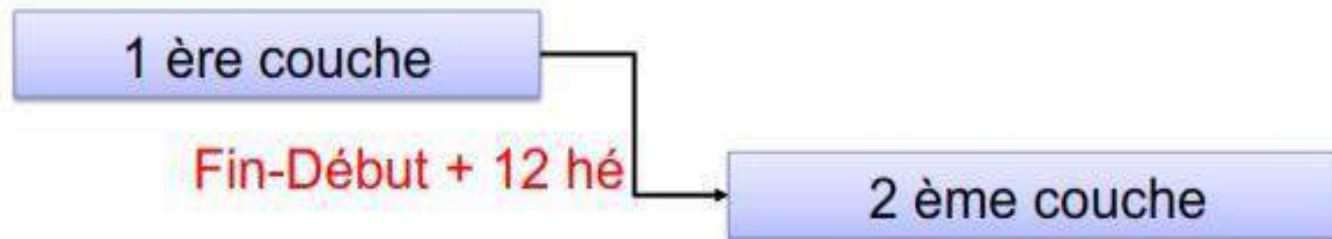
Les types de liens



3.1. La méthode PERT - suite

Les types de liens

Retards et avances



Les tâches fictives

Cas d'introduction des tâches fictives

On peut introduire des tâches fictives dans un graphe Pert en deux cas :

- I-Respect des contraintes de succession.
- II-Cas de tâches parallèles.
- Une tâche fictive ne consomme ni temps ni énergie et de durée nulle , mais elle a un rôle important pour une meilleure lecture d'un graphe PERT.

3.1. La méthode PERT - suite

Les tâches fictives

Cas d'introduction des tâches fictives

Respect des contraintes de succession

3.1. La méthode PERT - suite

Les tâches fictives

Cas d'introduction des tâches fictives

Respect des contraintes de succession

Taches	Antériorité
C	A
D	A,B

En principe on peut présenter ce projet comme suit :



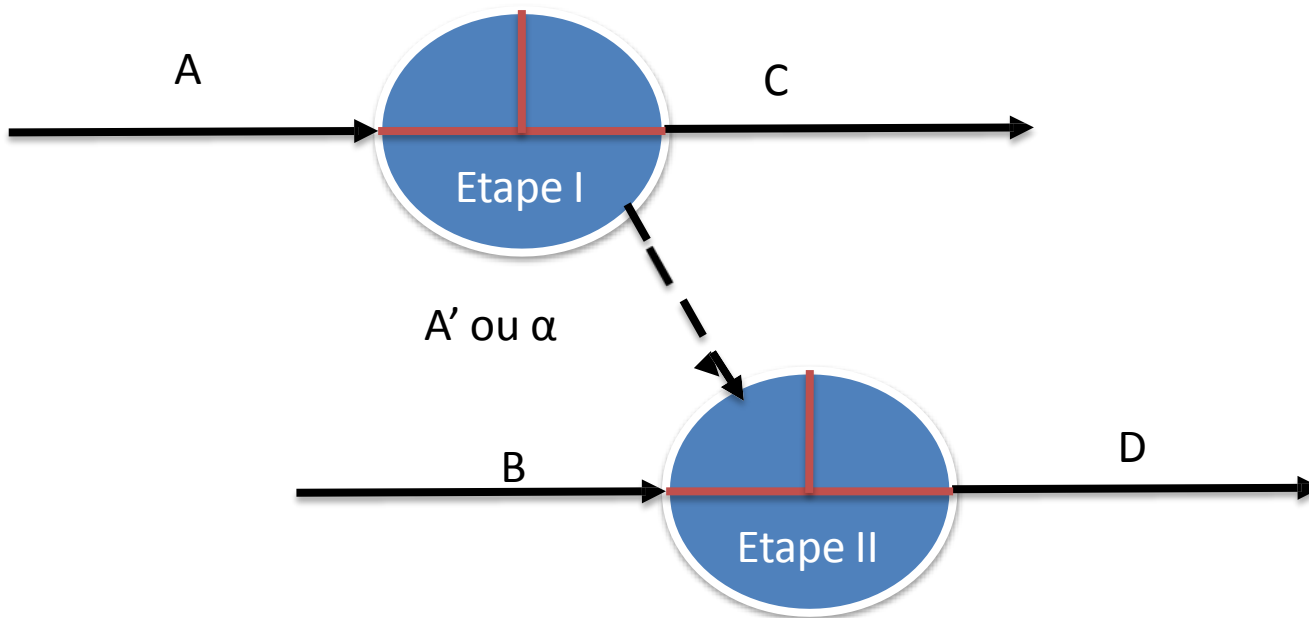
3.1. La méthode PERT - suite

Les tâches fictives

Cas d'introduction des taches fictives

Respect des contraintes de succession

Pour corriger cette représentation fausse .il faut introduire les taches fictives



3.1. La méthode PERT - suite

Les tâches fictives

Application

Soit le projet suivant :

Tache (X)	P(x)	S(x)	Durée en jours	Les niveaux
A	-	C,D	4	0
B	-	D	2	0
C	A	E	1	1
D	A,B	E	3	1
E	C,D	-	5	2

3.1. La méthode PERT - suite

Les tâches fictives

Application

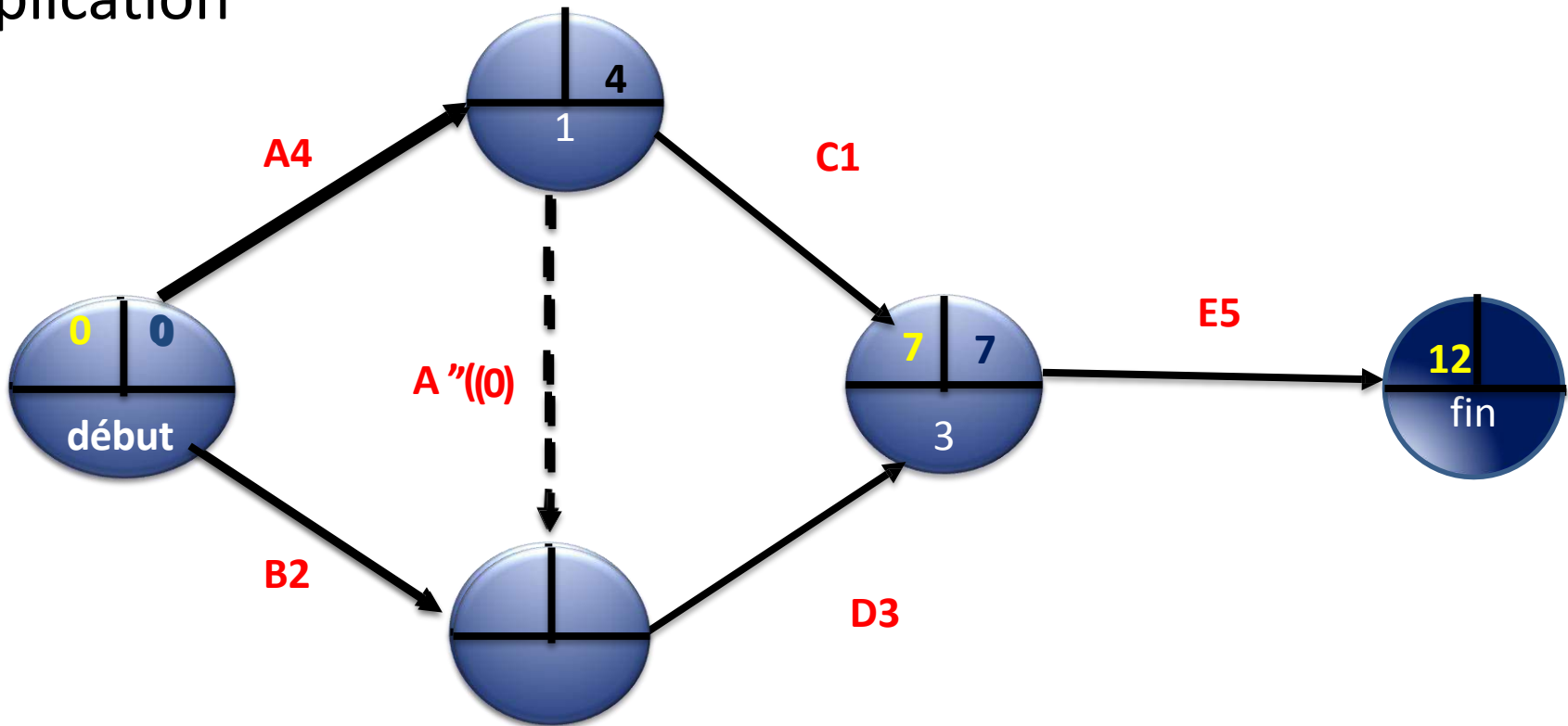
Soit le projet suivant :

Tache (X)	P(x)	Durée en jours
A	-	4
B	-	2
C	A	1
D	A,B	3
E	C,D	5

3.1. La méthode PERT - suite

Les tâches fictives

Application



Le chemin critique : Début ADE Fin

Vérification $4+3+5=12$

3.1. La méthode PERT - suite

Les tâches fictives

Application

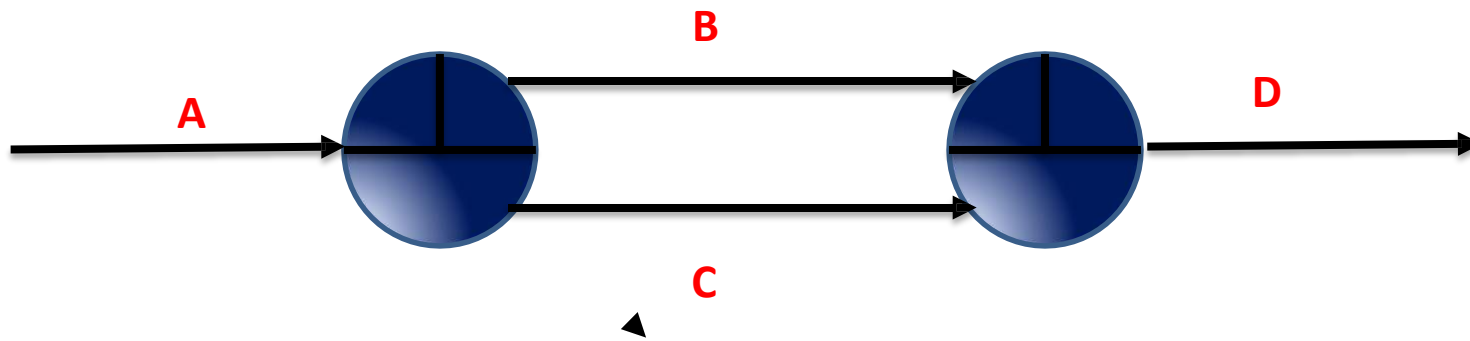
Tache(x)	MT(X)	ML(X)
A	$4-4-0=0$	$4-4-0=0$
B	$4-2-0=2$	$4-2-0=2$
C	$7-1-4=2$	$7-1-4=2$
D	$7-3-4=0$	$7-3-4=0$
E	$12-5-7=0$	$12-5-7=0$



Les tâches fictives

Cas des taches parallèles

Deux tâches sont parallèles si elles précèdent a une même tâche et succèdent a une même tâche.

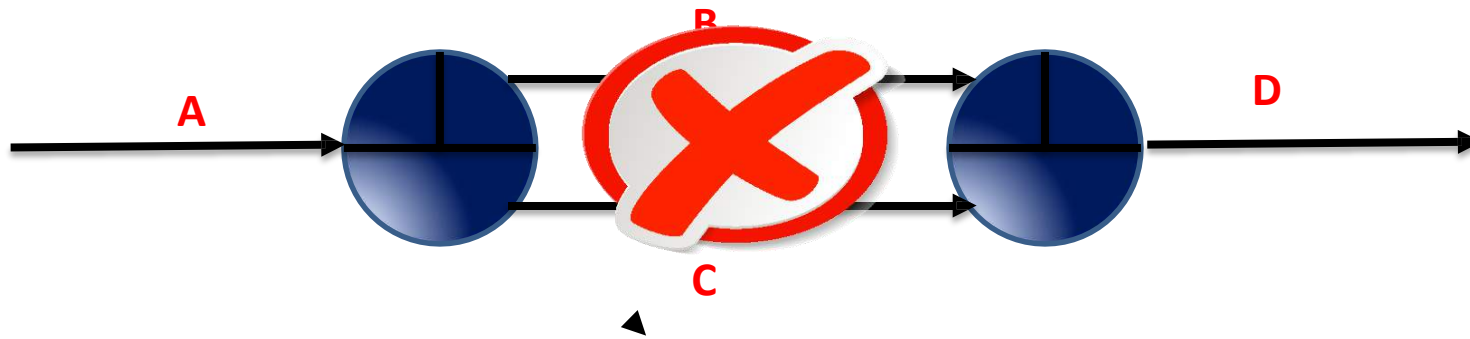


3.1. La méthode PERT - suite

Les tâches fictives

Cas des taches parallèles

Cette représentation est fautive parce que on connaît pas l'aboutissement de B ou C , en d'autres il faut avoir une étape d'arrivée de B ou C.

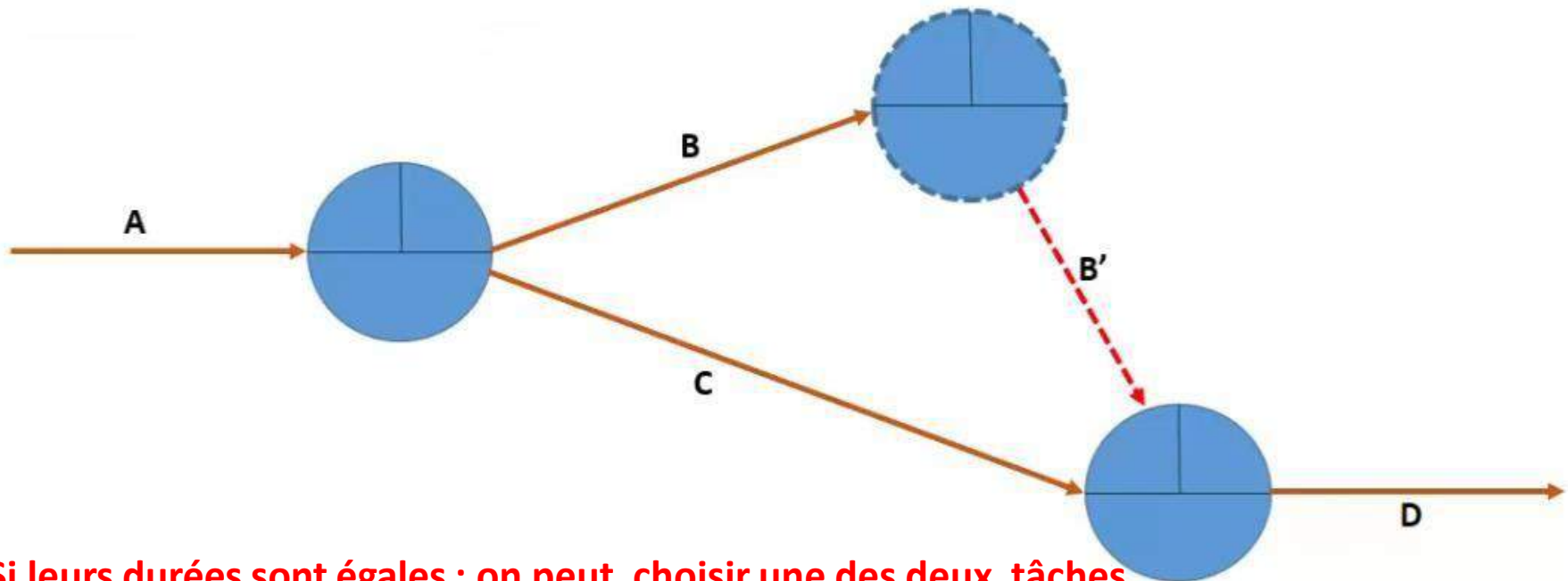


3.1. La méthode PERT - suite

Les tâches fictives

Cas des tâches parallèles

l'étape fictive et la tâche fictive s'attachent a la tâche de plus faible durées des deux tâches parallèles.



**Si leurs durées sont égales ; on peut choisir une des deux tâches
Sinon on attache l'étape fictive a la tâche qui possède la moins durée.**

3.1. La méthode PERT - suite

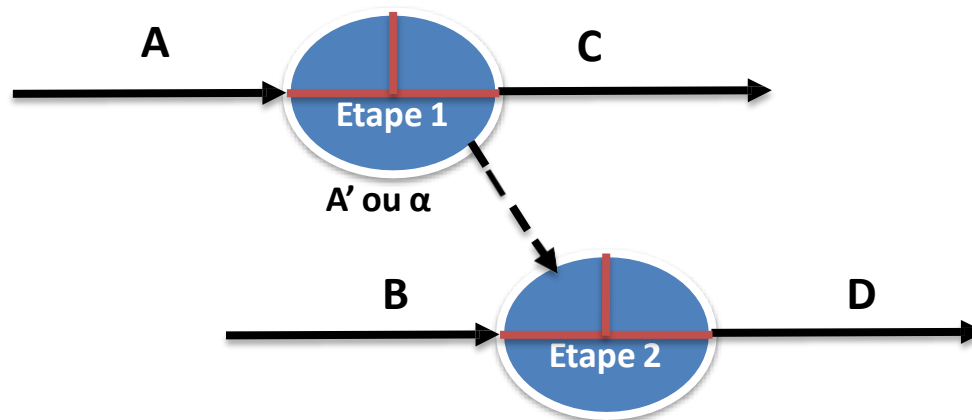
Les tâches fictives

1/ Respect des contraintes de succession

Taches	Antériorité
C	A
D	A,B



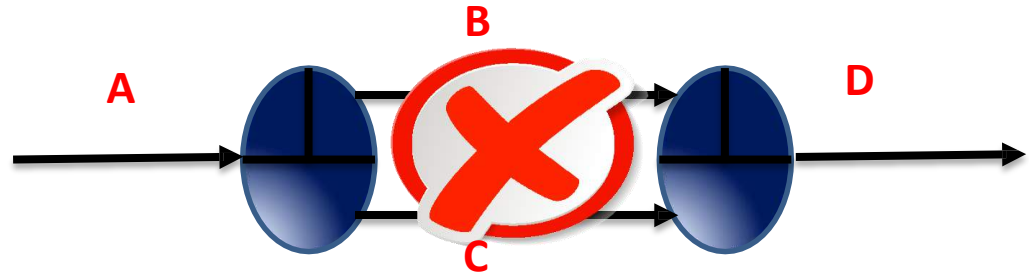
Pour corriger cette représentation fausse .il faut introduire les taches fictives



3.1. La méthode PERT - suite

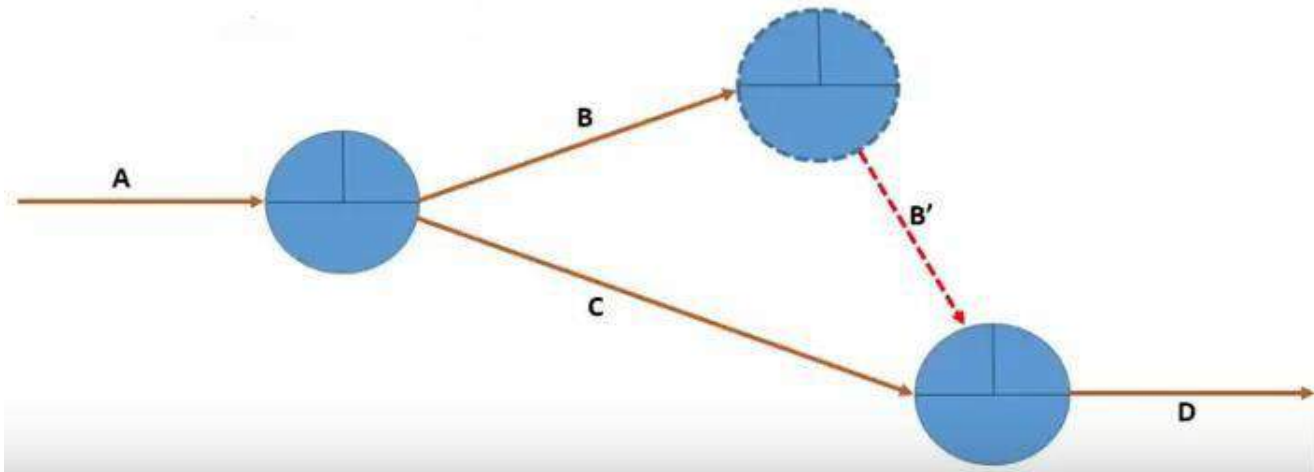
Les tâches fictives - suite

2/ Cas des tâches parallèles



Cette représentation est fautive parce que on connaît pas l'aboutissement de B ou C , en d'autres il faut avoir une étape d'arrivée de B ou C.

Solution:



l'étape fictive et la tâche fictive s'attachent à la tâche de plus faible durées des deux tâches parallèles. Si leurs durées sont égales ; on peut choisir une des deux tâches.

3.1. La méthode PERT - suite

Les tâches fictives

Application

soit le projet suivant :

Tâche (X)	P(X)	Durée en Mois
A	----	2
B	----	5
C	A	4
D	F G H	1
E	B	3
F	E	2
G	C	4
H	C	2

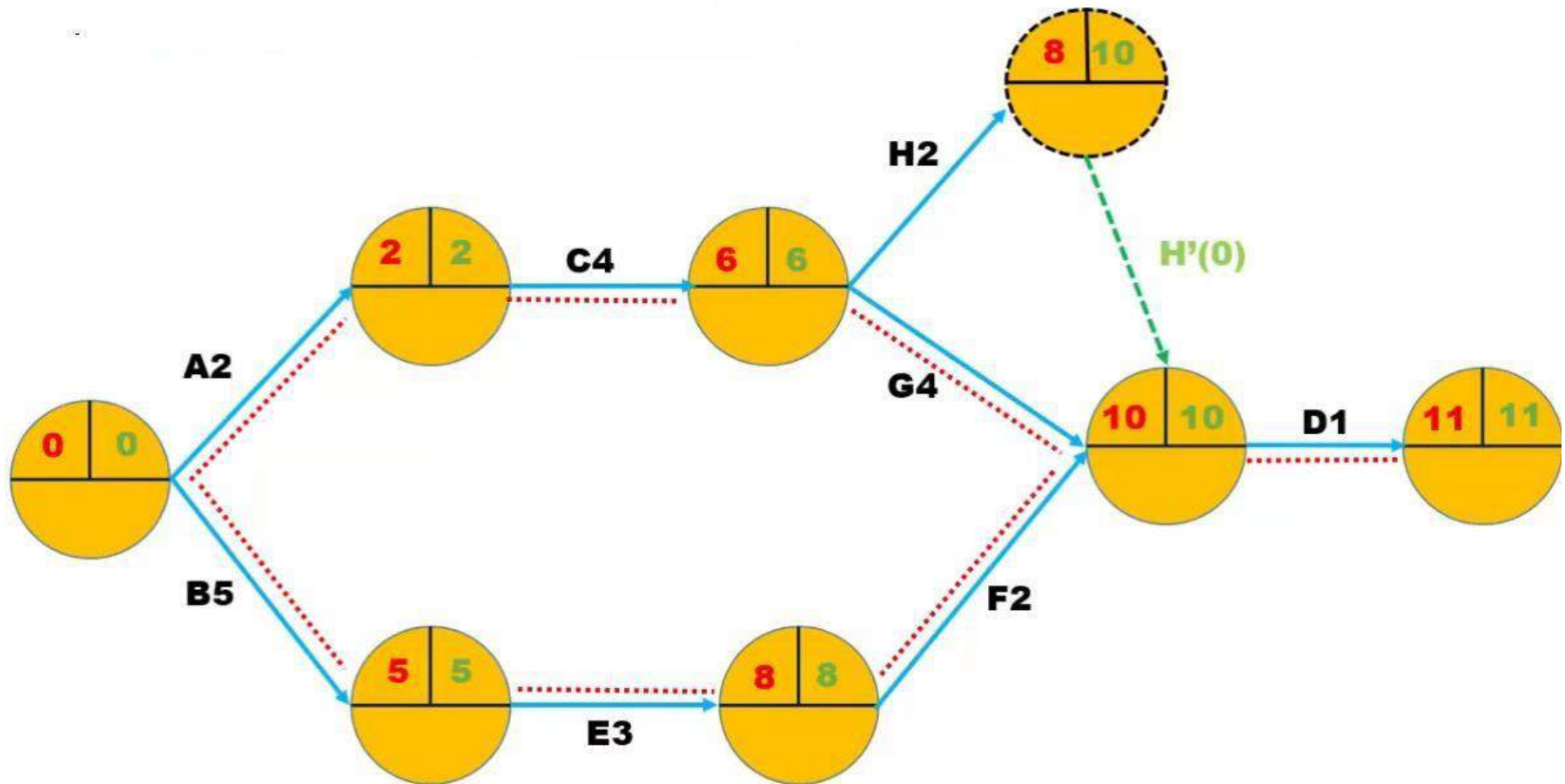
3.1. La méthode PERT - suite

Les tâches fictives Corrigée

Tâche (X)	P(X)	S(X)	Niveaux
A	---	C	Niveau 0
B	---	E	Niveau 0
C	A	G H	Niveau 1
D	F G H	---	Niveau 3
E	B	F	Niveau 1
F	E	D	Niveau 2
G	C	D	Niveau 2
H	C	D	Niveau 2

3.1. La méthode PERT - suite

Les tâches fictives Corrigée



Les tâches critiques et non fictives :A B C D E F G

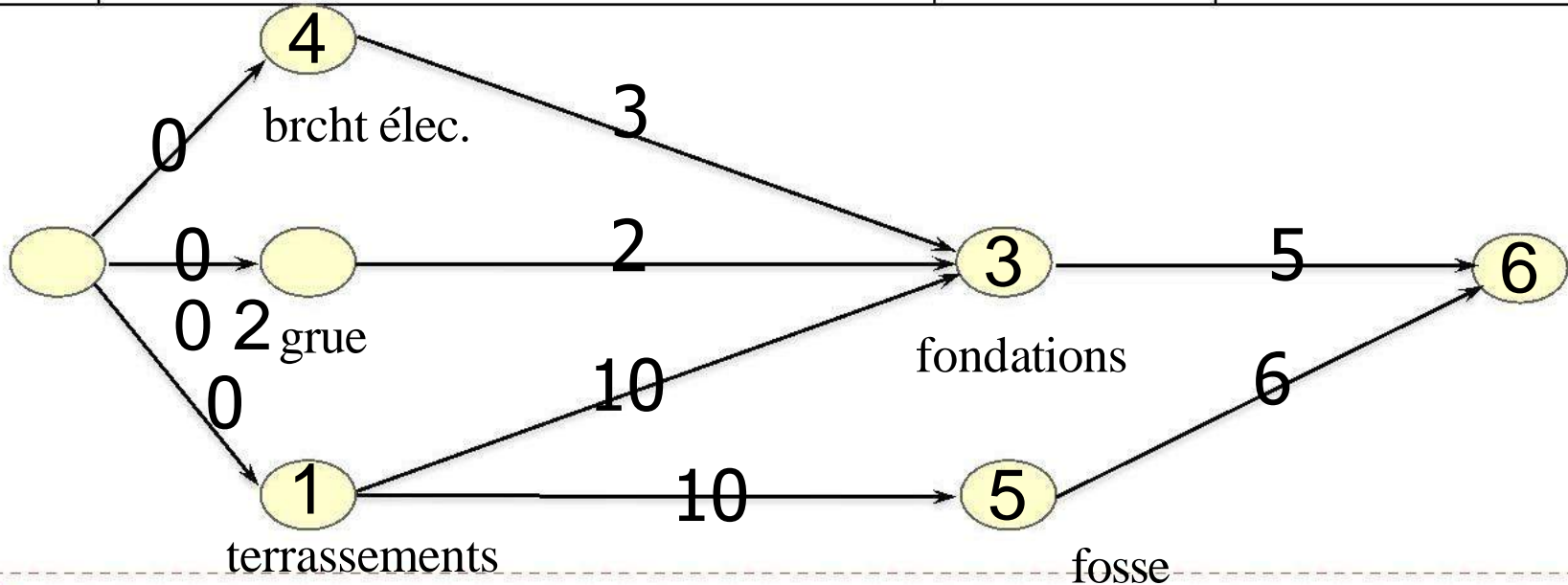
3.1. La méthode PERT - suite

Code	Opérations	Durée (jours)	Antécédents
1	Exécution des terrassements	10	-
2	Mise en place de la grue	2	-
3	Fondation	5	1;2;4
4	Branchement électrique	3	-
5	Installation de la fosse septique	6	1

□ On a besoin de la grue et du branchement électrique pour les fondations.

3.1. La méthode PERT - suite

Code	Opérations	Durée (jours)	Antécédents
1	Exécution des terrassements	10	-
2	Mise en place de la grue	2	-
3	Fondation	5	1;2;4
4	Branchement électrique	3	-
5	Installation de la fosse septique	6	1



DATES AU PLUS TÔT

La fin au plus tôt est égale à la date de début au plus tôt + la durée de la tâche.

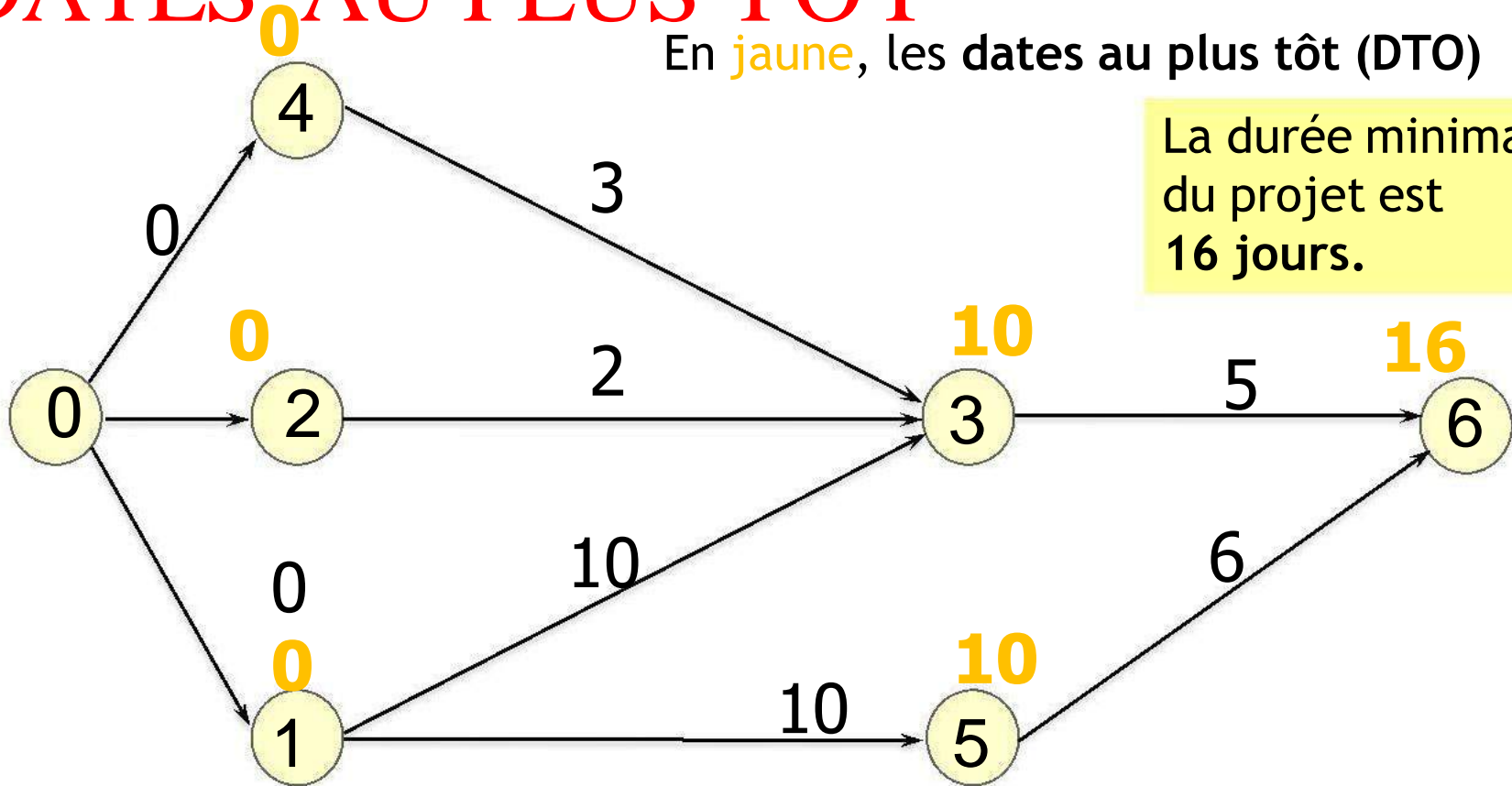
$$FTO(i) = DTO(i) + \text{durée}(i)$$

La date de début au plus tôt de la tâche i est égale au max des fins au plus tôt de toutes les activités dont i dépend immédiatement.



DATES AU PLUS TÔT

En **jaune**, les dates au plus tôt (DTO)



La durée minimale du projet est 16 jours.

$$FTO(3) = DTO(3) + \text{durée}(3)$$

$$FTO(3) = 10 + 5 = 15$$

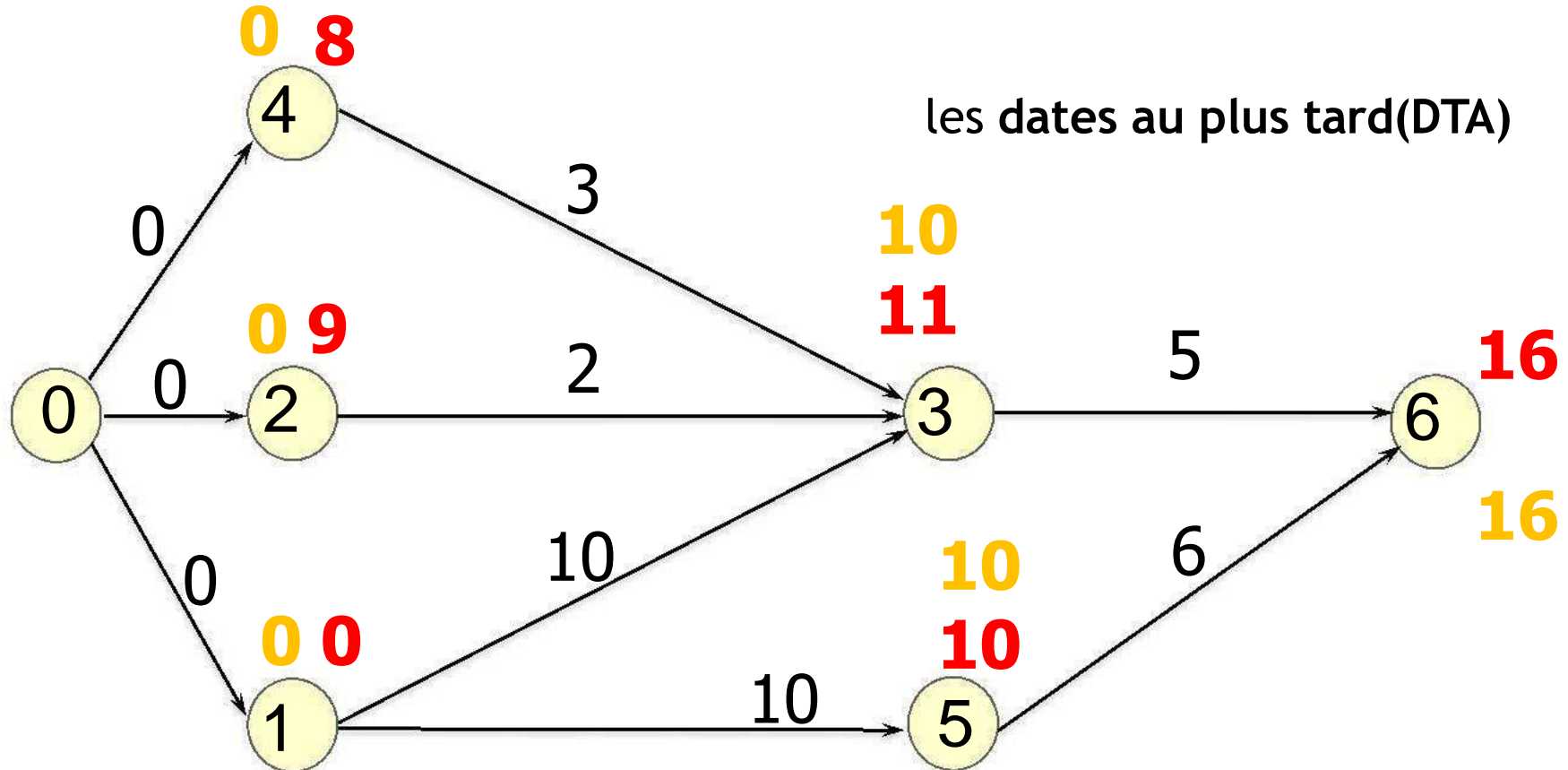
DATES AU PLUS TARD

Le début au plus tard d'une tâche i c'est la date la plus tardive à laquelle peut débuter cette tâche si on ne veut pas que la durée minimale du projet soit dépassée.

La date de fin au plus tard est égale à la date de début au plus tard augmentée de la durée de la tâche. $FTA(i) = DTA(i) + \text{durée}(i)$



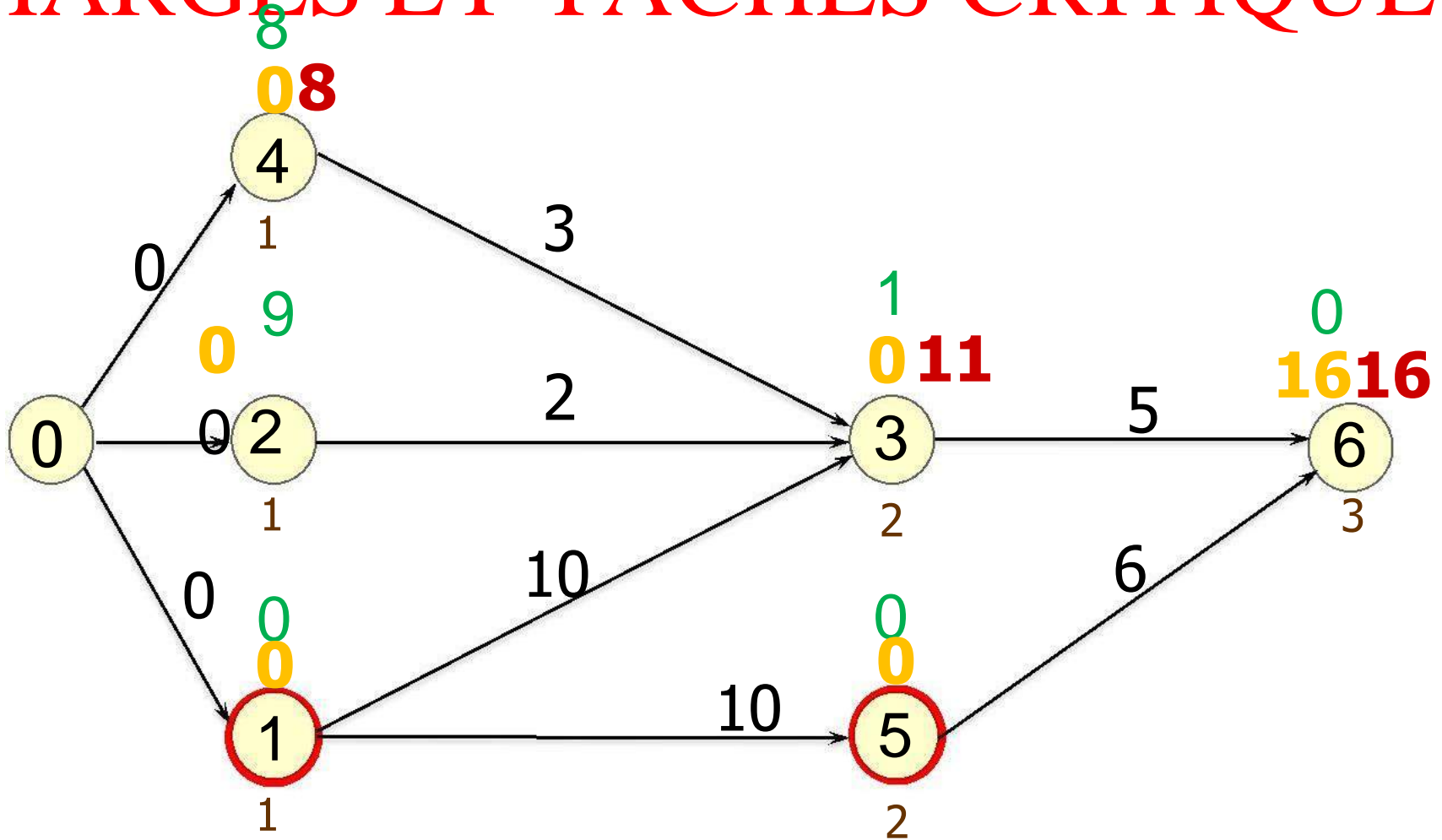
DATES AU PLUS TARD



Le début au plus tard d'une tâche i c'est la date la plus tardive à laquelle peut débuter cette tâche si on ne veut pas que la durée minimale du

▶ projet soit dépassée.

MARGES ET TÂCHES CRITIQUES



MARGES ET TÂCHES CRITIQUES

La Marge Libre:

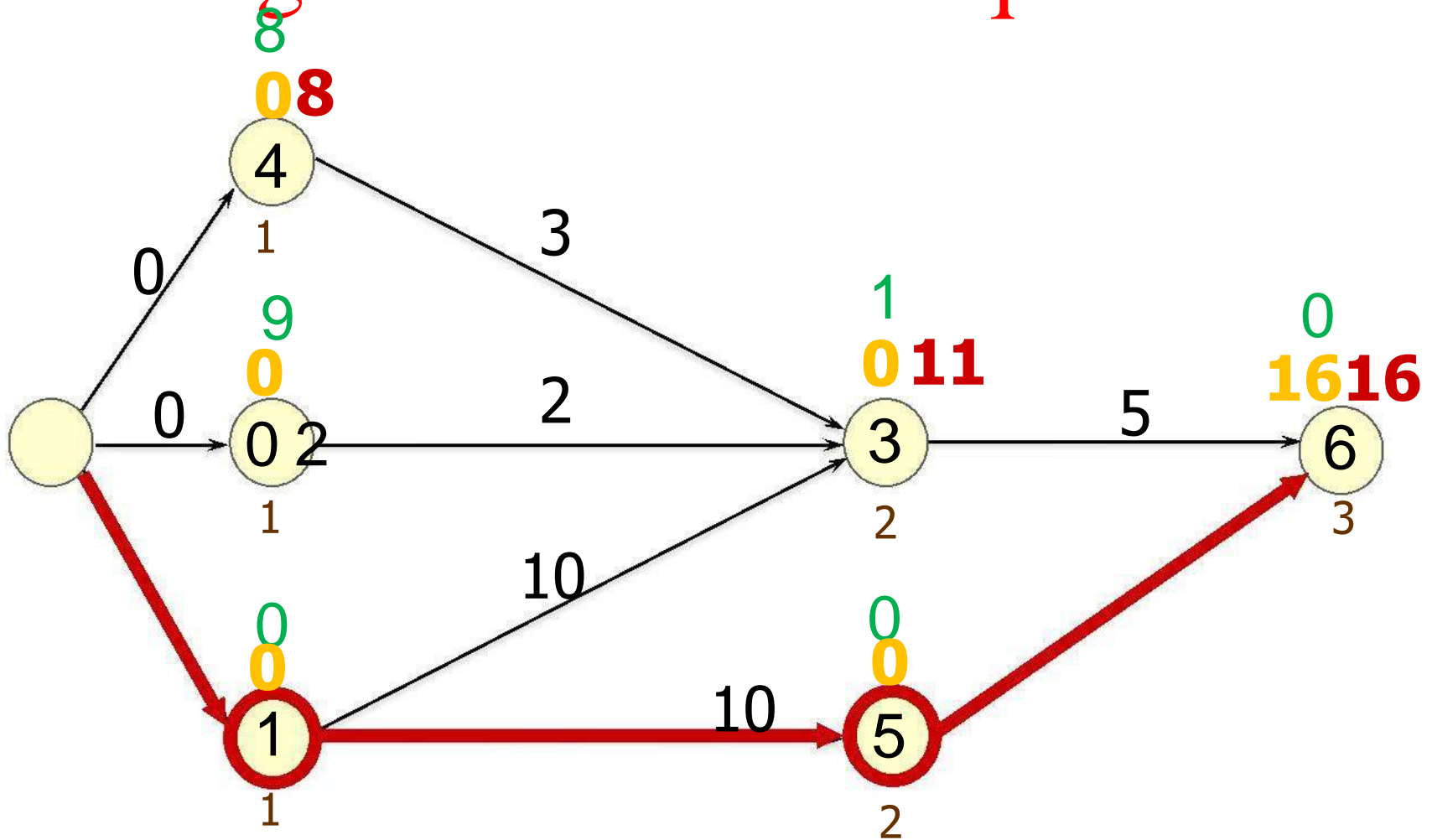
$$ML(i) = \min [DTO(i+1) - FTO(i)]$$

La Marge Totale:

$$MT(i) = DTA(i) - DTO(i)$$



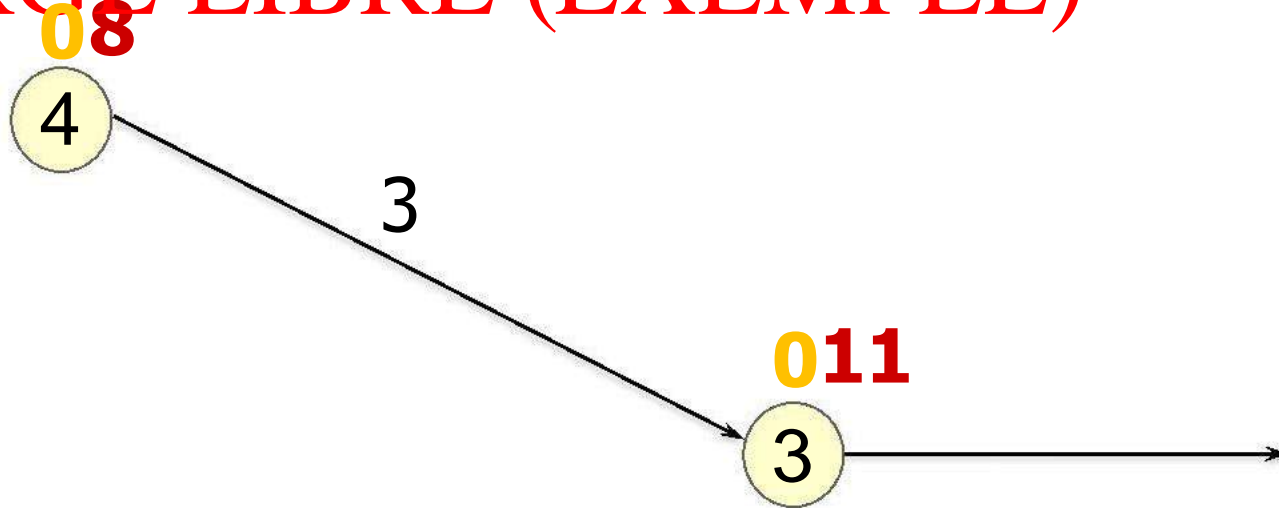
Marges et chemin critique



Si $MT(i) = 0$: i est une tâche critique



MARGE LIBRE (EXEMPLE)



La Marge Libre:

$$ML(i) = \min [DTO(i+1) - FTO(i)]$$

$$ML(4) = [DTO(3) - FTO(4)]$$

$$ML(4) = [DTO(3) - \{ DTO(4) + \text{durée}(4) \}]$$

$$ML(4) = [10 - \{ 0 + 3 \}] = 7$$



3.1. La méthode PERT - suite

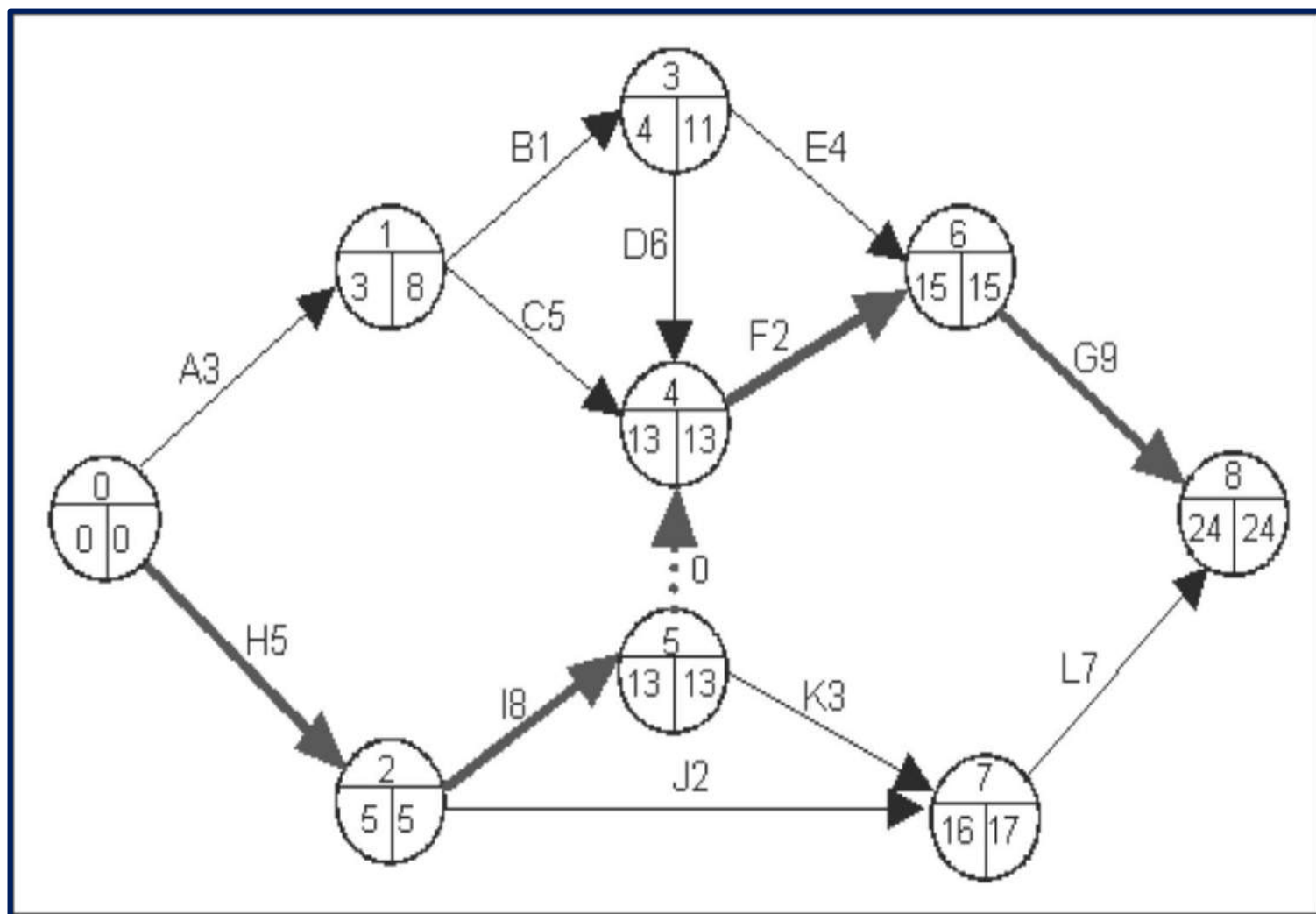
Exercice

Taches	Antécédents	Durée
A	-----	3
B	A	1
C	A	5
D	B	6
E	B	4
F	C-I-D	2
G	E-F	9
H	-----	5
I	H	8
J	H	2
K	H	3
L	K-J	7

Tâches	Antécédents	Durée
A	/	3
B	A	1
C	A	5
D	B	6
E	B	4
F	C-I-D	2
G	E-F	9
H	/	5
I	H	8
J	H	2
K	I	3
L	K-J	7

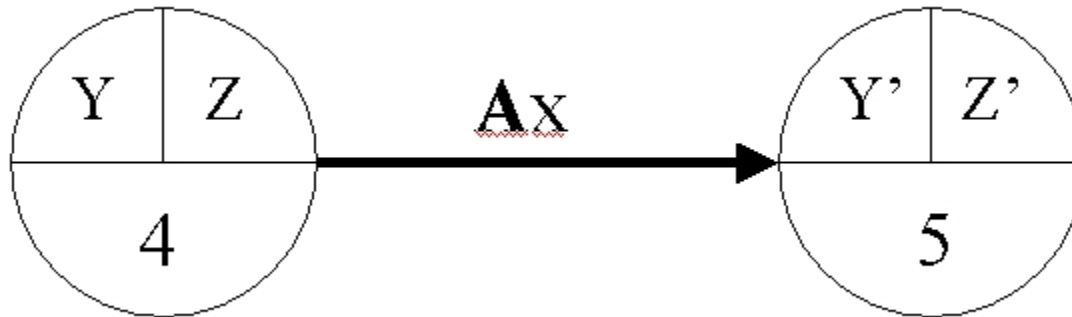
3.1. La méthode PERT - suite

Solution



3.1. La méthode PERT - suite

MARGE LIBRE / MARGE TOTALE (PERT)



- **La marge totale (Mt)** : d'une tâche, est le délai maximum que l'on peut appliquer à sa date de début « au plus tôt », ce qui implique d'avoir réalisé toutes les tâches antérieures au plus tôt et toutes les tâches restantes appartenant au même chemin, au plus tard.

$$Mt = Z' - (x + Y)$$

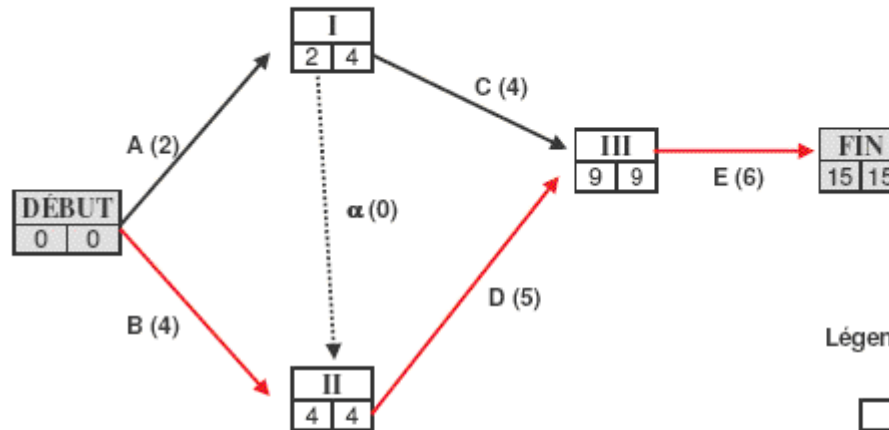
- **La marge libre (MI)** : d'une tâche est le délai maximum que l'on peut appliquer à sa date de début « au plus tôt », sans affecter les dates de début « au plus tôt » des tâches suivantes se trouvant sur le même chemin. Ce type de marge est très utile pour l'ordonnement d'un projet.

$$MI = Y' - (x + Y)$$

3.1. La méthode PERT - suite

MARGE LIBRE / MARGE TOTALE (PERT)

GRAPHE PERT DU PROJET Y :



Légende :

N° ÉTAPE	
Date au plus tôt	Date au plus tard

NOM TÂCHE (Durée tâche)



TÂCHE FICTIVE (Durée nulle)



Remarque : sur ce graphique il a été nécessaire d'introduire une "tâche fictive α " (de durée nulle) pour traduire le fait que la tâche D ne pouvait commencer qu'après complet achèvement des tâches A et B.

3.1. La méthode PERT - suite

MARGE LIBRE / MARGE TOTALE (PERT)

La **date au plus tôt** d'un réseau PERT correspond à la date à laquelle une étape peut être atteinte au plus tôt.

Elle s'obtient en ajoutant à la date au plus tôt de l'étape précédente, la durée de la tâche qui les sépare :

$$\text{Date au plus tôt "étape j"} = \text{Date au plus tôt "étape i"} + \text{Durée tâche "ij"}$$

Lorsque plusieurs arcs arrivent à un même sommet (c'est à dire que plusieurs tâches doivent être réalisées pour atteindre une étape donnée), il convient de faire ce calcul pour toutes les tâches menant à l'étape en question et de retenir comme "date au plus tôt" de l'étape le maximum des valeurs ainsi trouvée (en effet, l'étape ne sera vraiment atteinte que lorsque toutes les tâches y menant auront été accomplies) :

$$\text{Date au plus tôt "étape j"} = \text{Max. (Date plus tôt "étapes i"} + \text{Durée tâches "ij")}$$

Dans cette formule, "i" représente l'ensemble des tâches immédiatement antérieures à "j"

La détermination des dates au plus tôt des différentes sommets se fait donc par calculs successifs, à partir de l'étape initiale "Début" (dont, par convention, la date au plus tôt est fixée à 0).

La durée minimale du projet correspond donc à la date au plus tôt de l'étape "Fin".

3.1. La méthode PERT - suite

MARGE LIBRE / MARGE TOTALE (PERT)

La **date au plus tard** d'un réseau PERT correspond à la date à laquelle une étape doit être atteinte au plus tard pour que la durée globale du projet reste minimum.

Elle s'obtient en retirant de la date au plus tard de l'étape qui lui succède la durée de la tâche qui les relie :

$$\text{Date au plus tard "étape i"} = \text{Date plus tard "étape j"} - \text{Durée tâche "ij"}$$

Lorsque plusieurs arcs partent d'un même sommet (c'est à dire que plusieurs tâches commencent à partir d'une même étape), il convient de faire ce calcul pour toutes les tâches (y compris s'il s'agit de tâches fictives) succédant à l'étape en question et de retenir comme "date au plus tard" de l'étape le minimum des valeurs ainsi trouvées :

$$\text{Date au plus tard "étape i"} = \text{Min. (date au plus tard "étapes j"} - \text{Durée tâches "ij")}$$

Dans cette formule, "j" représente l'ensemble des tâches immédiatement postérieures à "i"

Ainsi, dans notre exemple précédent (projet Y), la date au plus tard de l'étape I = $\text{Min} [(9 - 4) , (4 - 0)] = 4$

La détermination des dates au plus tard des différents sommets se fait donc à rebours du graphe, par calculs successifs, en partant de l'étape finale "Fin" (pour laquelle, par convention, on considère que la date au plus tard est égale à sa date au plus tôt).

3.1. La méthode PERT - suite

MARGE LIBRE / MARGE TOTALE (PERT)

On appelle "marge" d'une tâche le retard qu'il est possible de tolérer dans la réalisation de celle-ci, sans que la durée optimale prévue du projet global en soit affectée.

Il est possible de calculer trois types de marges : la marge totale, la marge certaine et la marge libre.

La marge totale d'une tâche indique le retard maximal que l'on peut admettre dans sa réalisation (sous réserve qu'elle ait commencé à sa date au plus tôt) sans allonger la durée optimale du projet.

Elle se calcule en retirant la durée de la tâche en question à l'écart qu'il peut y avoir entre sa date de au plus tôt de début et sa date au plus tard de fin :

**Marge totale tâche "ij" = Date au plus tard "étape j" - Date au plus tôt "étape i" -
Durée tâche "ij"**

Ainsi, dans notre exemple précédent (projet Y) :

- Marge totale de A = $(4 - 0 - 2) = 2$

- Marge totale de C = $(9 - 2 - 4) = 3$

Sauf cas particulier, un retard correspondant à la marge totale d'une tâche se traduit par une modification des dates au plus tôt des tâches qui lui succèdent et entraîne, généralement, l'apparition d'un second chemin critique.

Il n'est donc pas possible de cumuler des retards correspondant à leur marge totale sur plusieurs tâches successives, sans remettre en cause la durée optimale prévue pour le projet.

3.1. La méthode PERT - suite

MARGE LIBRE / MARGE TOTALE (PERT)

La marge libre d'une tâche indique le retard que l'on peut admettre dans sa réalisation (sous réserve qu'elle ait commencé à sa date au plus tôt) sans modifier les date au plus tôt des tâches suivantes et sans allonger la durée optimale du projet.

Elle se calcule en retirant la durée de la tâche en question à l'écart qu'il peut y avoir entre ses dates au plus tôt de début et de fin :

**Marge libre tâche "ij" = Date au plus tôt "étape j" - Date au plus tôt "étape i" -
Durée tâche "ij"**

Ainsi, dans notre exemple précédent (projet Y) :

- Marge libre de A = $(2 - 0 - 2) = 0$

- Marge libre de C = $(9 - 2 - 4) = 3$

Un retard correspondant à la marge libre d'une tâche reste sans conséquence sur les marges des tâches qui lui succèdent. Il est donc possible de cumuler des retards, s'inscrivant dans leur marge libre, pour plusieurs tâches successives, sans remettre en cause la durée optimale prévue pour le projet.

3.1. La méthode PERT - suite

MARGE LIBRE / MARGE TOTALE (PERT)

La marge certaine d'une tâche indique le retard que l'on peut admettre dans sa réalisation (quelle que soit sa date de début) sans allonger la durée optimale du projet.

Elle se calcule en retirant la durée de la tâche en question à l'écart qu'il peut y avoir entre sa date au plus tard de début et sa date au plus tôt de fin :

Marge certaine tâche "ij" = Max [0 , (Date au plus tôt "étape j" - Date au plus tard "étape i" - Durée tâche "ij")]

D'après cette formule, la marge certaine est considérée comme nulle lorsque son calcul donne un nombre négatif

Ainsi, dans notre exemple précédent (projet Y) :

- Marge certaine de A = Max [0, (2 - 0 - 2)] = 0
- Marge certaine de C = Max [0, (9 - 5 - 4)] = 0

Un retard correspondant à la marge certaine d'une tâche reste sans conséquence sur les marges des tâches qui lui succèdent, même si elle commence à sa date au plus tard. Il est donc possible de cumuler des retards, s'inscrivant dans leur marge certaine, pour plusieurs tâches successives, même si elles commencent à leur date au plus tard, sans remettre en cause la durée optimale prévue pour le projet.

3.2. La méthode MPM

Historique de la méthode MPM

MPM (Fr) : potentiel – tâches

La Méthode des Potentiels et antécédents Métra (MPM) est une méthode d'Ordonnancement basée sur la théorie des graphes, et visant à optimiser la planification des tâches d'un projet. Semblable au Pert, les principales différences entre les deux méthodes reposent essentiellement dans la construction du graphe. Elle a été développée par le chercheur français Bernard Roy, en 1958 (développe l'outil et l'applique lors de la construction d'une centrale nucléaire EDF).

Quelques fois préférée à la méthode PERT, La MPM est jugée beaucoup plus souple d'utilisation. Elle permet de :

- Déterminer la durée optimale nécessaire pour réaliser un projet dans les meilleurs délais;
- Définir les dates de début au plus tôt et au plus tard des tâches ;
- Calculer les marges des différentes tâches (marge de manœuvre pour l'équipe de pilotage du projet) ;
- Identifier les tâches qui ne doivent souffrir d'aucun retard sous peine de retarder l'ensemble du projet (tâches critiques) ;
- Etudier les coûts de réalisation de chaque tâche et le coût global du projet ;
- Effectuer le suivi du projet afin de détecter le plus tôt possible tout retard et appliquer à temps, des actions correctives.

3.2. La méthode MPM - suite

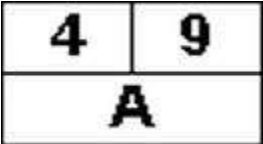
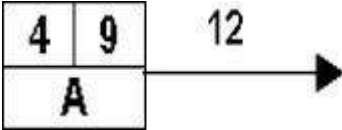
- **Avantages**

Comme vous pourrez le remarquer, la représentation graphique de la MPM à l'avantage de ne pas faire appel aux tâches fictives parfois nécessaires lors de la mise en œuvre d'un PERT.

- **Méthodologie de mise en œuvre**

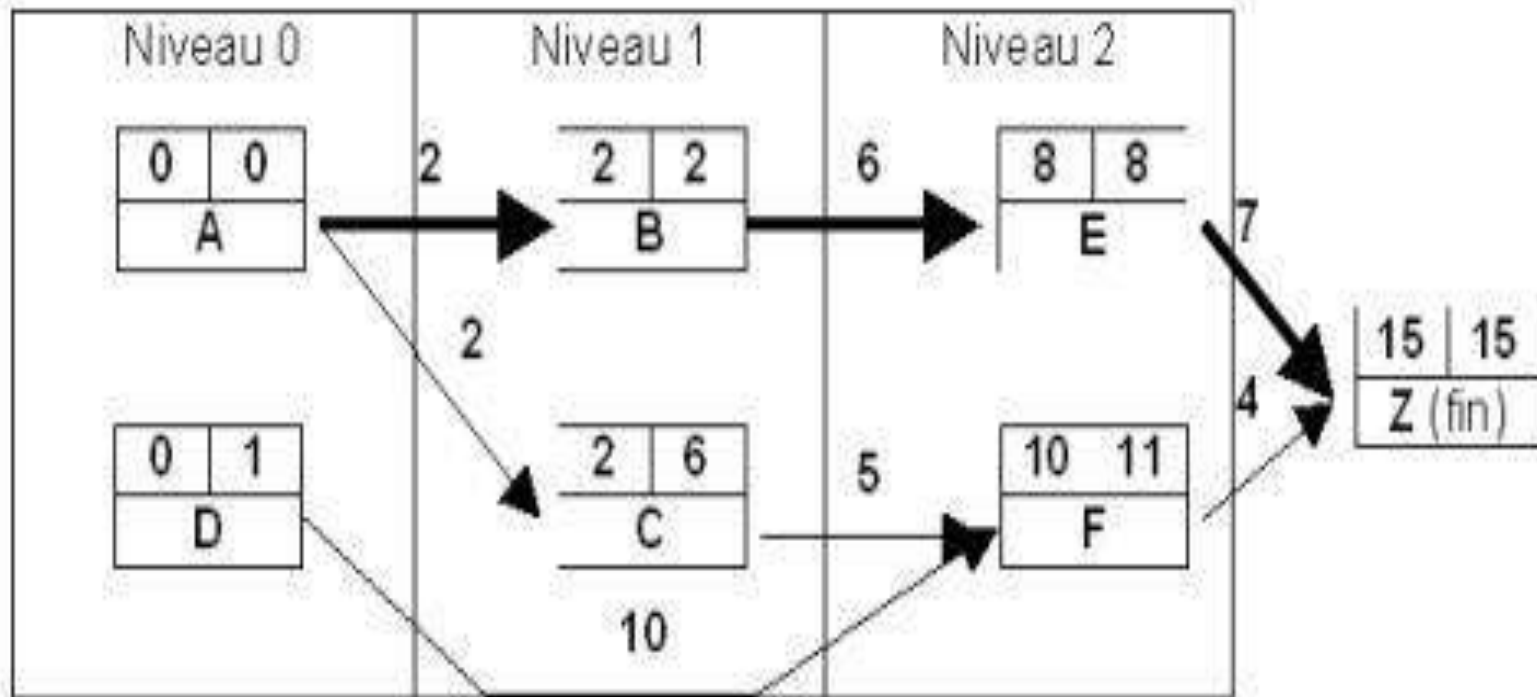
Les règles de mise en œuvre de la méthode MPM sont proches de celles que nous avons abordées précédemment pour la méthode du PERT. Nous ne reviendrons donc pas sur ces règles. La seule différence est que la représentation d'un réseau MPM est inversée par rapport à celle du PERT.

3.2. La méthode MPM - suite

Terme	Représentation graphique
<p>Tâche</p> <p>Sa représentation est un cadre identifié par le nom de la tâche. Les dates au plus tôt et au plus tard son inscrites dans la partie supérieure.</p> <p>A : Nom de la tâche 4 : Début au plus tôt 9 : Début au plus tard</p>	
<p>Contrainte de succession</p> <p>Les contraintes de succession sont représentées par une flèche qui part de la tâche antécédente et se dirige vers la suivante. La durée de la contrainte correspond à la durée de sa tâche de démarrage. Cette valeur est indiquée au-dessus de la flèche.</p> <p>12 : Durée de la tâche A</p>	
<p>Réseau</p> <p>Par convention, un réseau MPM doit se terminer par une tâche unique qui détermine la fin du projet. Cette tâche n'aura aucune durée.</p>	

3.2. La méthode MPM - suite

Le réseau pris en exemple lors de l'application de la méthode PERT devient le suivant en MPM :



3.2. La méthode MPM - suite

MARGE LIBRE /MARGE TOTALE (MPM)

Date au plus tôt :

Date à laquelle on peut commencer la tâche parce que les tâches précédentes sont terminées.

formule : = Max (Dates au plus tôt précédentes + durées précédentes).

Date au plus tard :

Date maximale à laquelle on peut commencer la tâche sans repousser la fin du projet.

formule : = Min (Date au plus tard suivantes) - durée de la tâche.

Marge totale :

Retard autorisé à la tâche sans retarder la fin du projet.

formule : = Date au plus tard - Date au plus tôt.

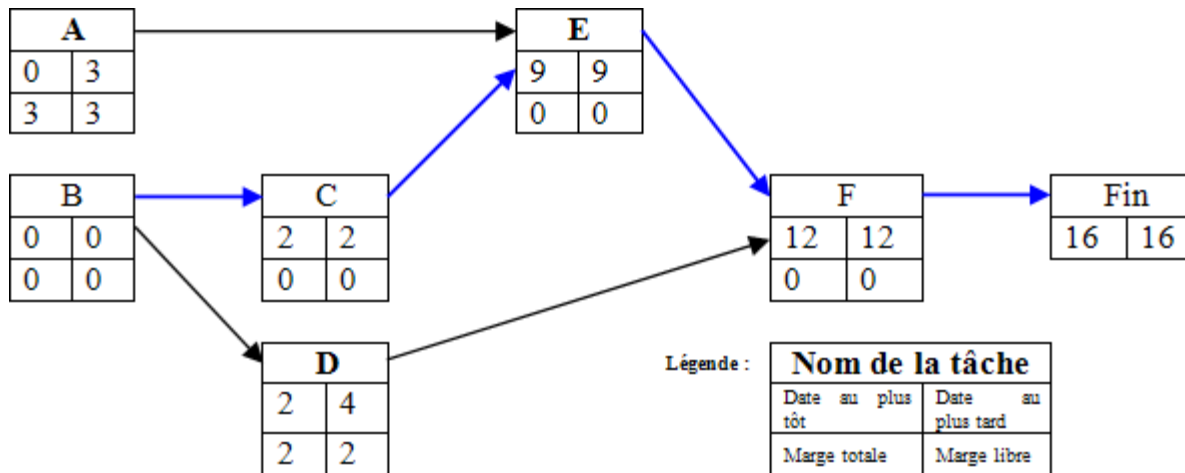
Marge libre :

Retard autorisé sans retarder aucune des tâches suivantes.

formule : = Min (Dates au plus tôt suivantes) - Durée de la tâche - Date au plus tôt de la tâche.

3.2. La méthode MPM - suite

MARGE LIBRE /MARGE TOTALE (MPM)



MARGE LIBRE /MARGE TOTALE (MPM)

La date au plus tôt d'un réseau MPM correspond à la date à laquelle une tâche peut commencer au plus tôt.

Elle s'obtient très simplement en ajoutant à la date au plus tôt de la tâche précédente la durée de la tâche en question :

$$\text{Date au plus tôt tâche T} = \text{Date au plus tôt tâche S} + \text{Durée tâche S}$$

Lorsque plusieurs arcs arrivent à un même sommet (c'est-à-dire que plusieurs tâches sont immédiatement antérieures à la tâche considérée), il convient, d'effectuer ce calcul pour toutes les tâches précédant la tâche en question et de retenir comme "date au plus tôt" de cette dernière le maximum des valeurs ainsi trouvée (en effet, cette tâche ne pourra vraiment débiter que lorsque toutes les tâches qui lui sont immédiatement antérieures auront été terminées). La formule précédente devient donc :

$$\text{Date au plus tôt tâche T} = \text{Max. (Date plus tôt tâches S} + \text{Durée tâches S)}$$

Dans cette formule, "S" représente l'ensemble des tâches immédiatement antérieures à "T"

La détermination des dates au plus tôt des différents sommets se fait donc par calculs successifs, à partir du sommet "Début" (dont, par convention, la date au plus tôt est fixée à 0). La durée minimale du projet correspond donc à la date au plus tôt du sommet "Fin".

MARGE LIBRE /MARGE TOTALE (MPM)

La date au plus tard d'un réseau MPM correspond à la date à laquelle une tâche doit être exécutée au plus tard pour ne pas remettre en cause la durée optimale totale du projet.

Elle s'obtient en retirant de la date au plus tard de la tâche qui lui succède sa propre durée :

$$\text{Date au plus tard tâche S} = \text{Date au plus tard tâche T} - \text{durée tâche S}$$

Lorsque plusieurs arcs partent d'un même sommet (i.e. que plusieurs tâches succèdent à une tâche donnée), il convient de faire ce calcul pour toutes les tâches succédant à la tâche en question et de retenir comme "date au plus tard" de cette dernière le minimum des valeurs ainsi trouvées :

$$\text{Date au plus tard tâche S} = \text{Min. (date au plus tard tâches T - durée tâche S)}$$

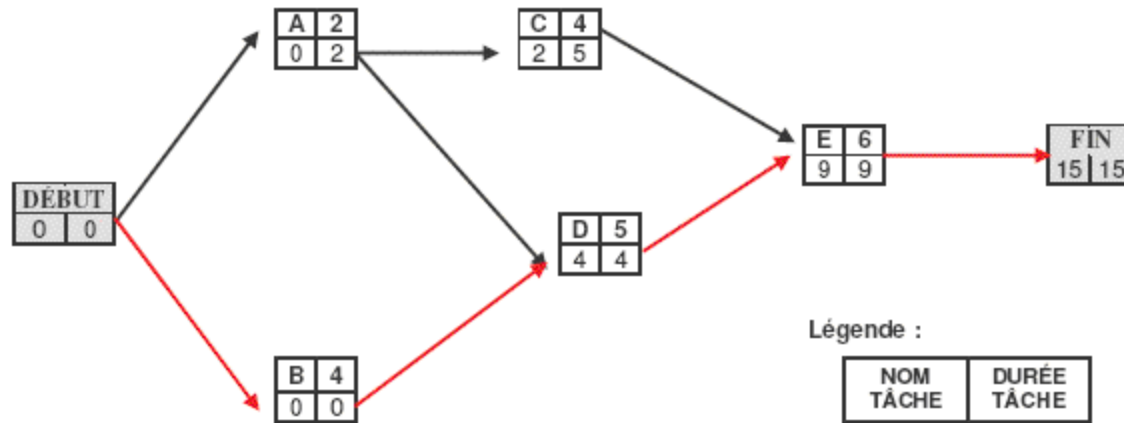
Dans cette formule, "T" représente l'ensemble des tâches immédiatement postérieures à "S"

La détermination des dates au plus tard des différentes tâches se fait donc à rebours du graphe, par calculs successifs, en partant du sommet "Fin" (pour lequel, par convention, on considère que la date au plus tard est égale à sa date au plus tôt).

On appelle chemin critique la succession des tâches pour lesquels aucun retard n'est possible sans remettre en cause la durée optimale du projet (tâches pour lesquelles date au plus tôt = date au plus tard). Dans notre exemple, celui-ci est indiqué en rouge.

MARGE LIBRE /MARGE TOTALE (MPM)

GRAPHE MPM DU PROJET Y :



Légende :

NOM TÂCHE	DURÉE TÂCHE
Date au plus tôt	Date au plus tard

MARGE LIBRE /MARGE TOTALE (MPM)

On appelle "marge" d'une tâche le retard qu'il est possible de tolérer dans la réalisation de celle-ci, sans que la durée optimale prévue du projet global en soit affectée.

Il est possible de calculer trois types de marges : la marge totale, la marge certaine et la marge libre.

La marge totale d'une tâche indique le retard maximal que l'on peut admettre dans sa réalisation (sous réserve qu'elle ait commencé à sa date au plus tôt) sans allonger la durée optimale du projet.

Elle se calcule très facilement en faisant la différence entre la date au plus tard et la date au plus tôt de la tâche en question.

Marge totale tâche S = Date plus tard tâche S - Date plus tôt tâche S

Ainsi, dans notre exemple précédent (projet Y) :

- Marge totale de A = (2 - 0) = 2

- Marge totale de C = (5 - 2) = 3

Sauf cas particulier, un retard correspondant à la marge totale d'une tâche se traduit par une modification des dates au plus tôt des tâches qui lui succèdent et entraîne, généralement, l'apparition d'un 2^o chemin critique. Il n'est donc pas possible de cumuler des retards correspondant à leur marge totale sur plusieurs tâches successives, sans remettre en cause la durée optimale prévue pour le projet.

MARGE LIBRE /MARGE TOTALE (MPM)

La marge libre d'une tâche indique le retard que l'on peut admettre dans sa réalisation (sous réserve qu'elle ait commencé à sa date au plus tôt) sans modifier les date au plus tôt des tâches suivantes et sans allonger la durée optimale du projet.

Elle se calcule en retirant la durée de la tâche en question à l'écart existant entre sa date au plus tôt de la date au plus tôt de la tâche suivante :

Marge libre tâche S = Date plus tôt tâche T - Date plus tôt tâche S - Durée tâche S

Lorsque plusieurs arcs partent d'un même sommet (c'est-à-dire lorsque la réalisation de la tâche conditionne le début de plusieurs autres tâches indépendantes) il convient de faire ce calcul pour toutes les tâches succédant à la tâche en question et de retenir comme "marge libre" de la tâche en question la valeur minimale des marges ainsi déterminées :

Marge totale tâche S = Min (Date plus tôt tâches T - Date plus tôt tâche S - Durée tâche S)

Dans cette formule T représente l'ensemble des tâches succédant immédiatement à S

Ainsi, dans notre exemple précédent (projet Y) :

- Marge libre de A = Minimum [(2 - 0 - 2) , (4 - 0 - 2)] = Min [0, 2] = 0

- Marge libre de C = (9 - 2 - 4) = 3

Un retard correspondant à la marge libre d'une tâche reste sans conséquence sur les marges des tâches qui lui succèdent. Il est donc possible de cumuler des retards, s'inscrivant dans leur marge libre, pour plusieurs tâches successives, sans remettre en cause la durée optimale prévue pour le projet.

MARGE LIBRE /MARGE TOTALE (MPM)

La marge certaine d'une tâche indique le retard que l'on peut admettre dans sa réalisation (quelle que soit sa date de début) sans allonger la durée optimale du projet.

Elle se calcule en retirant la durée de la tâche en question à l'écart qu'il peut y avoir entre sa date au plus tard de début et sa date au plus tôt de fin :

Marge certaine tâche S = Max [0 , Min (Date au plus tôt tâche T - Date au plus tard tâche S - Durée tâche S)]

D'après cette formule, la marge certaine est considérée comme nulle lorsque son calcul donne un nombre négatif. Lorsque plusieurs arcs partent d'un même sommet (c'est-à-dire lorsque la réalisation de la tâche conditionne le début de plusieurs autres tâches indépendantes) il convient de faire ce calcul pour toutes les tâches succédant à la tâche en question et de retenir comme "marge certaine" de cette dernière la valeur minimale des marges ainsi déterminées :

Marge certaine tâche S = Max [0, Min (Date au plus tôt tâches T - Date au plus tard tâche S - Durée tâche S)

Dans cette formule T représente l'ensemble des tâches succédant immédiatement à S

Ainsi, dans notre exemple précédent (projet Y) :

- Marge certaine de A = Max [0, Min ([2 - 2 - 2], [4 - 2 - 2])] = Max [0, Min (-2, 0)] = 0

- Marge certaine de C = Max [0, (9 - 5 - 4)] = 0

Un retard correspondant à la marge certaine d'une tâche reste sans conséquence sur les marges des tâches qui lui succèdent, même si elle a commencé à sa date au plus tard.

Il est donc possible de cumuler des retards, s'inscrivant dans leur marge certaine, pour plusieurs tâches successives, même si elles commencent à leur date au plus tard, sans remettre en cause la durée optimale prévue pour le projet.