Université Mohamed Boudiaf - M'sila
Faculté des Sciences et Technologies
Département de Genie Civil

Cours de Probabilité-Statistiques
Chapitre 4: Introduction aux probabilités

Merini Abdelaziz*

20 octobre 2021

Table des matières

1 Introduction

Le calcul des probabilités a pour objectif un traitement mathématique de la notion intuitive de hasard.

---
*

2 Définitions

Définition 1. *Une expérience aléatoire est une expérience qui possède les deux propriétés suivantes :*

a) on ne peut prédire avec certitude le résultat de l'expérience.

b) on peut décrire, AVANT l'expérience, l'ensemble des résultats possible.

Exemple 1. *a) On jette un dé et l'on observe le résultat obtenu.*

b) Si l'on lance 2 fois de suite une pièce de monnaie, on peut distinguer 4 résultats possibles :

PP, PF, FP, FF.

c) On jette une pièce de monnaie jusqu'à ce que le côté face sorte pour la première fois

Définition 2. *L'univers d'une expérience aléatoire est l'ensemble* Ω *de toutes les issues possibles que l'on peut obtenir au cours de cette expérience.*

•L'ensemble Ω *peut être fini exemples a) et b) ou infini exemple c).*

• Le nombre d'éléments d'un ensemble Ω *est noté* $card\Omega$.

Exemple 2. *Dans l'exemple 1, on a :*

a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $card\Omega = 6$, *b)* $\Omega = \{PP, PF, FP, FF.\}$, $card\Omega = 4$, *c)* $\Omega = \{f, pf, ppf, pppf, ...\}$, $card\Omega = \infty$.

Définition 3. *Soit* Ω *l'univers d'une expérience aléatoire.*

Un événement est un sous-ensemble de l'univers Ω. *On note les événements par des lettres majuscules.*

Le sous-ensemble vide ϕ *est l'événement impossible et l'univers* Ω *est l'événement certain.*

Un événement qui contient un unique élément de Ω *est un événement élémentaire.*

Exemple 3. *On jette un dé à 6 faces non truqué , on a* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $card\Omega = 6$. *A est l'événement ≪ un nombre pair est tiré ≫ alors* $A = \{2; 4; 6\}$

B est l'événement ≪ un nombre impair est tiré ≫ alors $B = \{1; 3; 5\}$

C est l'événement ≪ un nombre ≥ 4 *≫ alors* $C = \{4; 5; 6\}$

D est l'événement élémentaire ≪ le plus petit nombre ≫ alors $D = \{1\}$.

3 Algèbre des évènements

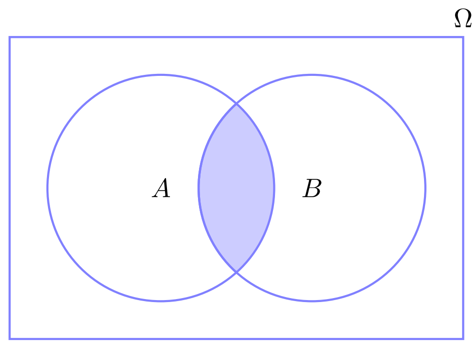
3.1 Opérations de la théorie des ensembles

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire, $A, B \in \Omega$.

Définition 4. *L'intersection de deux ensembles A et B (est noté* $A \cap B$*) est l'ensemble des éléments qui se trouvent simultanément dans A et dans B.*

$$A \cap B = \{x \in A \text{ et } x \in B\}$$

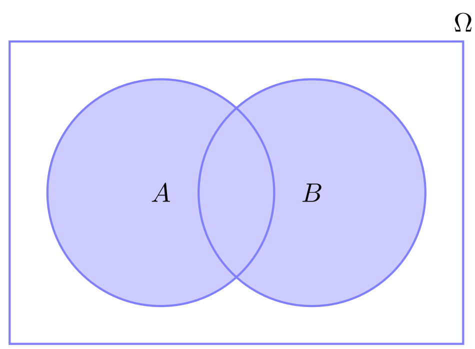
$A \cap B$



Définition 5. *La réunion de deux ensembles A et B (est noté $A \cup B$) est l'ensemble des éléments qui se trouvent dans A, dans B ou dans $A \cap B$.*

$$A \cup B = \{x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

$A \cup B$



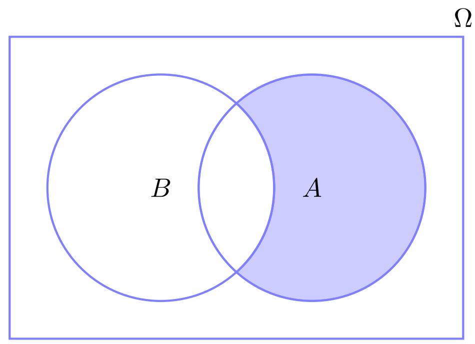
Définition 6. *Le complémentaire d'un ensemble A (est noté $\bar{A}$ ou) est l'ensemble des éléments qui ne se trouvent pas dans A.*

$$\bar{A} = C_{\Omega}^{A} = \{x \in \Omega \text{ et } x \notin A\}$$

Définition 7. *La différence de deux ensembles A et B (est noté $A - B$) est l'ensemble des éléments contenus dans A,mais pas dans B.*

$$A - B = \{x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

$A - B$



Définition 8. *L'ensemble vide ϕ est l'ensemble qui ne contient aucun élément.*

3.2 Opérations sur les événements

L'événement "A et B" est représenté par $A \cap B$.

L'événement "A ou B" est représenté par $A \cup B$.

L'événement "contraire de A " est représenté par $\bar{A}$.

L'événement "A mais pas B "est représenté par $A - B$.

Deux événements A, B sont dits incompatibles si $A \cap B = \phi$.

Exemple 4. *On lance un dé à 6 faces. On considère les événements :*

, $A = \ll$ on obtient un nombre pair $\gg$

, $B = \ll$ on obtient un nombre $> 3 \gg$.

Alors, $A = \{2; 4; 6\}$, $B = \{4; 5; 6\}$

$A \cap B. = \{6; 4\} = \ll$ on obtient un nombre pair et $> 3 \gg$.

$A \cup B = \{2; 4; 5; 6\}$ $= \ll$ obtenir un nombre pair ou un nombre ¿3 $\gg$

$\bar{A} = \{1; 3; 5\} = =$ " obtenir un nombre impair " $\gg$
$\bar{B} = \{1; 2; 3\} = =$ " obtenir un nombre impair ≤ 3 " $\gg$

$A - B = \{2\}$ $=$ " on obtient un nombre pair mais pas plus grand que 3 "

$B - A = \{5\} =\ll$ *on obtient un nombre* > 3 *mais pas UN nombre pair*$\gg$.

4 Espaces probabilisés

4.1 Probabilité d'un événement

Définition 9. *Soit* Ω *l'univers d'une expérience aléatoire.*

La probabilité d'un événement A*, notée* $P(A)$*, est définie par le rapport :*

$$P(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Remarque 1. *1) Cette définition est valable uniquement si tous les tirages ont la même chance de se réaliser. On dira alors que les résultats sont équiprobables.*

2) $0 \leq P(A) \leq 1$.

Exemple 5. *Quelle est la probabilité* $\ll$ *d'obtenir un nombre pair* $\gg$ *en lançant un dé à six faces ?*

Réponse *: Cas possibles : 6 Cas favorables : 3 ,, alors* $P(A) = \frac{3}{6} = 0.5$.

Exemple 6. *Une urne contient 1 boule blanche et 1 boule noire .*

On fait 2 tirages avec remise

Quelle est la probabilité d'avoir 2 Noires ?

Exemple 7. ***Réponse :*** *On a* $\Omega = \{(N,N);(B,B);(B,N);(N,B)\}$. $card\Omega = 4$

Soit A : "avoir 2 Noires". $A = \{(N,N)\}$. *alors* $P(A) = \frac{1}{4}$.

Exemple 8. *On choisit un comité de 3 personnes parmi 4 hommes et 6 femmes.*

Quelle est la probabilité que les 3 personnes choisies soient $\ll$ *2 hommes et 1 femme* $\gg$ *?*

Réponse *: Cas possibles :* $C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!7!} = 120$ *Cas favorables :*$C_4^2 \times C_6^1 = 36$, *alors* $P(A) = \frac{36}{120} = 0.3$.

4.2 Axiomes des probabilités

Définition 10. *Soit Ω un univers. Une probabilité P est une application de l'ensemble des événements Ω dans l'intervalle $[0;1]$.*

Une probabilité doit satisfaire aux trois axiomes suivants :

Axiom 1. $0 \leq P(A) \leq 1$ *pour tout événement A.*

Axiom 2. $P(\Omega) = 1$ *(La probabilité de l'événement certain Ω est égale à 1 = 100%)*

Axiom 3. *Si $A \cap B = \phi$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.*

5 Théorèmes généraux de probabilités

Théorème 1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Démonstration. On a : $(A \cup \bar{A}) = \Omega$ et $(A \cap \bar{A}) = \phi$, donc :

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) \qquad (d\prime après\ l'axiome\ 2) \\ &= P\left(A \cup \bar{A}\right) \\ &= P(\bar{A}) + P(A) \qquad (d\prime après\ l'axiome\ 3) \\ &\Longrightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A). \end{aligned}$$

: □

Exemple 9. *Quelle est la probabilité d'avoir* ***au moins une fois*** *pile en lançant 3 pièces de monnaie ?*

Réponse :

$$\begin{aligned} P(0 \textit{ fois pile}) + P(1 \textit{ fois pile})) + P(2 \textit{ fois pile})) + P(3 \textit{ fois pile})) &= 1 \Leftrightarrow \\ P(1 \textit{ fois pile})) + P(2 \textit{ fois pile})) + P(3 \textit{ fois pile})) &= 1 - P(0 \textit{ fois pile}) \Leftrightarrow \\ P(\textit{ au moins une fois pile}) &= 1 - P(0 \textit{ fois pile}) \\ &= 1 - \frac{1}{8} \\ &= \frac{7}{8} = 0.875\% \end{aligned}$$

:

Théorème 2. $P(B-A) = P(B) - P(A \cap B)$

Démonstration. $\left(B \cap \bar{A}\right) \cup (B \cap A) = B$ et $\left(B \cap \bar{A}\right) \cap (B \cap A) = \phi$, donc

$$\begin{array}{rcl} P(B) & = & P\left(\left(B \cap \bar{A}\right) \cup (B \cap A)\right) \\ & = & P\left(B \cap \bar{A}\right) + P(B \cap A) \;\; (\text{ axiome } 3) \\ & \Rightarrow & P\left(B \cap \bar{A}\right) = P(B) - P(B \cap A) \end{array}$$

□

Remarque 2. *Si* $A \subseteq B$ *alors* $B \cap A = A$ *, donc* $P(B-A) = P(B) - P(A)$

Théorème 3. *Si* $A \subseteq B$ *alors* $P(A) \leq P(B)$.

Démonstration. $\left(B \cap \bar{A}\right) \cup A = B$ et $\left(B \cap \bar{A}\right) \cap A = \phi$, donc

$$\begin{array}{rcl} P(B) & = & P\left(\left(B \cap \bar{A}\right) \cup A\right) \\ & = & P\left(B \cap \bar{A}\right) + P(A) > P(A) \;\; (\text{ axiome } 3) \\ \textit{car } P\left(B \cap \bar{A}\right) & \geq & 0 \;(\text{ axiome } 1) \end{array}$$

□

Remarque 3. $\phi \subseteq A \subseteq \Omega$ *alors* $0 \leq P(A) \leq 1$

Théorème 4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(B \cap A)$.

Démonstration. a) Si $P(B \cap A) = \phi$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(\phi)\underbrace{= 0}$

b) Si $P(B \cap A) \neq \phi$, on a

$A \cup B = (B-A) \cup A$ et $(B-A) \cap A = \phi$, donc

$$\begin{array}{rcl} P(A \cup B) & = & P((B-A) \cup A) \\ & = & P(B-A) + P(A) \\ & = & P(B) - P(A \cap B) + P(A) \\ & = & P(A) + P(B) - P(B \cap A) \end{array}$$

□

Références

[1] Jean-Philippe Javet, Combinatoire et Probabilités, http ://www.gymomath.ch/javmath/polycopie/3Ms

[2] Mohammed Bouznit, Polycopié de Cours de Statistique II (Probabilités), Université de Bejaia, Algerie, 2018

[3] Serge Picchione, COMBINATOIRES ET PROBABILITÉS, Collège Sismondi (Genève / Suisse)., 2013 http ://disciplines.sismondi.ch/MA/espace-perso-profs/serge-picchione