Université Mohamed Boudiaf - M'sila
Faculté des Sciences et Technologies
Département de Genie Civil

Cours de Probabilité-Statistiques

Chapitre 6 : Variables aléatoires

Merini Abdelaziz*

3 décembre 2022

Table des matières

*

1 Introduction

La notion de variable aléatoire joue un rôle important en probabilité. La majorité des expériences peuvent se modéliser simplement à l'aide d'une variable aléatoire.

2 Définitions et propriétés

Définition 1. *Une variable aléatoire réelle (v.a.r.) X est une application de l'univers Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$,*

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \longmapsto X(\omega)$$

Remarque 1. *Les variables aléatoires sont notées par des lettres majuscules telles que X, Y, Z,...*

Exemple 1. *On jette une pièce de monnaie deux fois de suite.*

L'univers est : $\Omega = \{(p;p);(p;f);(f;p);(f;f)\}$.

Notons X la variable aléatoire indiquant le nombre de « faces » obtenues.

$X(p;p) = 0,\ X(p;f) = 1,\ X(f;p) = 1,\ X(f,f) = 2.$

Donc les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X, sont les suivantes : $0, 1, 2$.

Remarque 2. *X peut prendre diverses valeurs : il s'agit donc bien d'une* ***variable.***

Comme la valeur que prend X dépend de l'issue réalisée donc du hasard, X est donc ***aléatoire.***

Remarque 3. *En général on note l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X ; par $X(\Omega)$ et on l'appelle* ***le support*** *de la variable aléatoire X.*

Exemple 2. *On jette deux dés distincts et on s'intéresse à la somme des points. On note Y cette variable aléatoire, elle est définie par*

$$Y : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$(i,j) \mapsto Y(i,j) = i + j$$

avec $\Omega = \{(1;1);(1;2);(1;3);...;(5;6);(6;6)\}$. *Donc,* $Y(\Omega) = \{2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$.

Exemple 3. *Une urne contient trois boules numérotées* 2; 3 *et* 5. *On tire successivement avec remises deux boules de cette urne.*

$\Omega = \{(2;2);(2;3);(2;5);(3;2);(3;3);(3;5);(5;2);(5;3);(5;5)\}$

Notons Z la variable aléatoire indiquant la somme des points obtenus

$$Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(i,j) \mapsto Z(i,j) = i + j$$

Donc, $Z(\Omega) = \{4;5;6;7;8;10\}$.

Remarque 4. *Dans ces trois exemples, il est possible de calculer la probabilité que la variable aléatoire prenne une valeur donnée.*

Par exemple, $P(X=1) = P(\{(f;p),(p;f)\}) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

On distingue deux types de variables aléatoires :
1. les variables aléatoires discrètes ;
2. les variables aléatoires continues.

2.1 Variables aléatoires discrètes

Définition 2. *On dit qu'une variable aléatoire est discrète si elle ne peut prendre qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs, c-à-d* $X(\Omega)$ *est un sous ensemble dénombrable de R.*

Exemple 4. *Les variables aléatoires définies dans les exemples précédents sont discrètes :*

X *ne peut prendre que trois valeurs, 0 ; 1 ou 2.*
Y *ne peut prendre que onze valeurs, 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ;11 ou 12.*
Z *ne peut prendre que six valeurs, 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ou 10 .*

Remarque 5. *Soient X et Y deux v.a sur* Ω *et* $\lambda \in IR$ *alors :* $X+Y; \lambda X; XY; X-Y; sup(X;Y) et inf(X;Y)$ *sont des v.a sur* Ω.
Si $X \neq 0$ *alors* $\frac{1}{X}$ *est une V.a sur* Ω.

2.1.1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire sur un ensemble fondamental Ω à valeurs finies, c'est à dire

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

Si à chacune de ces valeurs nous associons la probabilité de l'évènement correspondant, nous obtenons alors **la loi de probabilité** ou **la distribution de probabilité** de la variable aléatoire X.

Notations

La variable X peut prendre les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$.
p_1 est la probabilité que X prenne la valeur x_1 : $p_1 = P(X = x_1)$
p_2 est la probabilité que X prenne la valeur x_2 : $p_2 = P(X = x_2)$
$\vdots$
p_n est la probabilité que X prenne la valeur x_n : $p_n = P(X = x_n)$

On donne habituellement **la loi de probabilité de X** sous la forme du tableau suivant :

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

La loi de probabilité satisfait les conditions :
1) $0 \leq P(X = x_i) \leq 1$.
2) $\sum\limits_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$.

Exemple 5. *Dans l'exemple 1, .**la loi de probabilité de X** est*

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

Exemple 6. *Dans l'exemple 2, on a*

$P(Y=2)=P(\{(1;1)\})=\frac{1}{36}$.
$P(Y=3)=P(\{(1;2),(2;1)\})=\frac{2}{36}$
$P(Y=4)=P(\{(1;3),(2;2),(3;1)\})=\frac{3}{36}$
$P(Y=5)=P(\{(1;4),(2;3),(3;2),(4;1)\})=\frac{4}{36}$
$P(Y=6)=P(\{(1;5),(2;4),(3;3),(5;1),(4;2)\})=\frac{5}{36}$
$P(Y=7)=P(\{(2;5),(3;4),(4;3),(5;2),(6;1),(1;6)\})=\frac{6}{36}$
$P(Y=8)=P(\{(2;6),(3;5),(4;4),(5;3),(6;2)\})=\frac{5}{36}$
$P(Y=9)=P(\{(3;6),(4;5),(5;4),(6;3)\})=\frac{4}{36}$
$P(Y=10)=P(\{(4;6),(5;5),(6;4)\})=\frac{3}{36}$
$P(Y=11)=P(\{(5;6),(6;5)\})=\frac{2}{36}$
$P(Y=12)=P(\{(6;6)\})=\frac{1}{36}$,
*donc **la loi de probabilité de Y** est*

Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

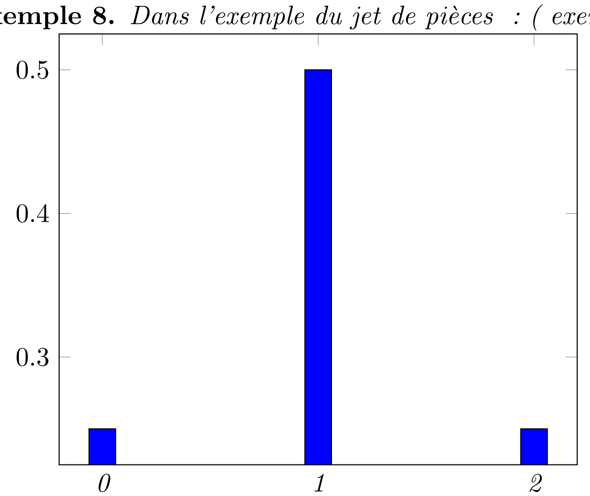
Exemple 7. *Reprenons l'exemple 3, **la loi de probabilité de Z** est*

Z	4	5	6	7	8	10
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

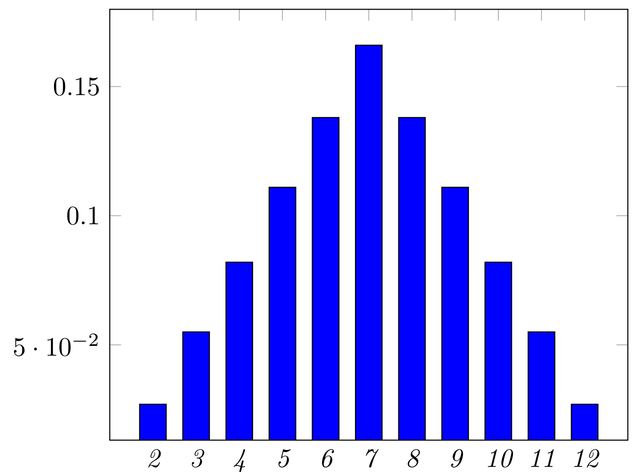
2.1.2 Représentation graphique de la distribution de probabilité

Elle s'effectue à l'aide d'un diagramme en bâtons où l'on porte en abscisses les valeurs prises par la variable aléatoire et en ordonnées les valeurs des probabilités correspondantes.

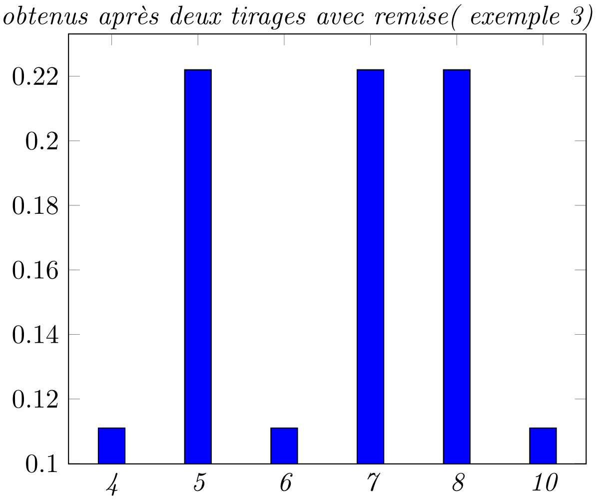
Exemple 8. *Dans l'exemple du jet de pièces : (exemple 1)*



Exemple 9. *Reprenons la variable aléatoire Y indiquant la somme des points de 2 dés obtenus(exemple 2)*



Exemple 10. *Reprenons la variable aléatoire Z indiquant la somme des points obtenus après deux tirages avec remise(exemple 3)*



2.1.3 Fonction de répartition

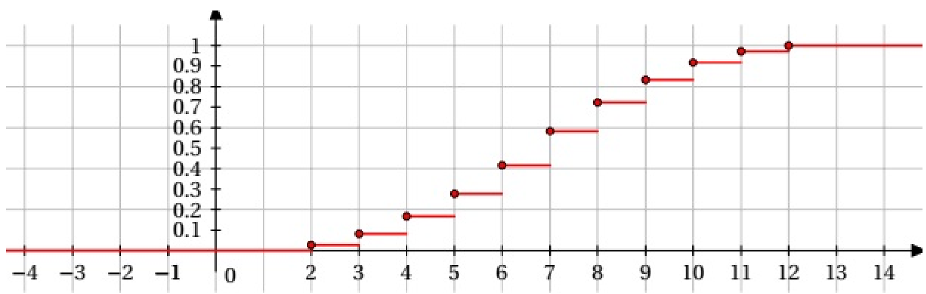
Définition 3. *Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω . On appelle* ***fonction de répartition*** *de X la fonction F_X définie par :*

$$F_X : \mathbb{R} \to [0;1]$$

$$x \to F_X(x) = P(X \leq x)$$

Exemple 11. *Dans l'exemple 3, .**la fonction de répartitionde Z** est*

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & si\ z < 4 \\ \frac{1}{9}, & si\ \ 4 \leq z < 5 \\ \frac{3}{9}, & si\ \ 5 \leq z < 6 \\ \frac{4}{9}, & si\ \ 6 \leq z < 7 \\ \frac{6}{9}, & si\ \ 7 \leq z < 8 \\ \frac{8}{9}, & si\ \ 8 \leq z < 10 \\ 1, & si\ \ 10 \leq x. \end{cases}$$



2.1.4 Propriétés

On a les propriétés suivantes
1) F_X est une fonction en escalier croissante.
2) F_X est continue à droite.
3) pour tout x réel, on a $0 \leq F_X(x) \leq 1$.

Corollaire 1. *1)La connaissance de la loi de probabilité de X permet de calculer la fonction de répartition, et inversement.*
2)La fonction de répartition caractérise la loi de X, autrement dit : $F_X = F_Y$ si et seulement si les variables aléatoires X et Y ont la même loi de probabilité.

2.1.5 Relation entre fonction de répartition et la probabilité de X :

Théorème 1. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, X une v.a.r discrète et F_X sa fonction de répartition, alors :*

1) $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

2) $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) + P(X = a)$.

3) $P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) - P(X = b)$.

4) $P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a) + P(X = a) - P(X = b)$.

5) $P(a < X) = 1 - F_X(a)$.

6) $P(a \leq X) = 1 - F_X(a) + P(X = a)$.

Démonstration. Il est clair qu'il suffit de montrer la première égalité, Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{c} \{X \leq b\} = \{a < X \leq b\} \cup \{X \leq a\} \\ et \\ \phi = \{a < X \leq b\} \cap \{X \leq a\} \end{array} \right.$$

d'après l'Axiom 3. (Chapitre 4, page 6)

$$\begin{array}{rcl} P(X & \leq & b) = P(\{a < X \leq b\} \cup \{X \leq a\}) \\ & = & P(a < X \leq b) + P(X \leq a) \\ F_X(b) & = & P(a < X \leq b) + F_X(a) \end{array}$$

Par conséquent

$$\{ \; P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

□

Exemple 12. *Dans l'exemple 3, calculer les probabilités suivantes :*
$P(Z \leq 8) = F_Z(8) = \frac{8}{9}$.
$P(Z > 5) = 1 - P(Z \leq 5) = 1 - F_Z(5) = 1 - \frac{3}{9} = \frac{6}{9}$
$P(6 \leq Z \leq 7.5) = P(6 \leq Z \leq 7) = F_Z(7) - F_Z(6) + P(6) = \frac{6}{9} - \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9}$

2.1.6 Espérance mathématique

Définition 4. *Considérons X une variable aléatoire pouvant prendre les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$ avec des probabilités respectives $p_1, p_2, ..., p_n$.*

L'espérance mathématique de X est :

$$m = E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i.$$

Exemple 13. *Dans l'exemple 1, on a .*

X	0	1	2	$\sum$
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	*1*
$P.X$	*0*	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	*1*

donc $E(X) = 1$.

Exemple 14. *Dans l'exemple 2, on a*

Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	*1*
$P.Y$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{42}{36}$	$\frac{40}{36}$	$\frac{36}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{12}{36}$	7

donc $E(Y) = 7$.

Exemple 15. *Reprenons l'exemple 3, on a*

Z	4	5	6	7	8	10	$\sum$
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1
$P.Z$	$\frac{4}{9}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{14}{9}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{60}{9}$

donc $E(Z) = \frac{60}{9} \approx 6.67$.

Interprétation

L'espérance $E[X]$ représente la valeur moyenne que prend X.

Définition 5. *On dit qu'une expérience est équitable si* $E(X) = 0$.

2.1.7 Propriétés de l'espérance mathématique

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω, α et β deux constantes réelles.

1. $.E(\alpha X) = \alpha E(X), \forall \alpha \in R.$
2. $E\left(E(X)\right) = E(X)$, puisque $E[(X)$ n'est pas une variable aléatoire.
3. $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y), \forall \alpha; \beta \in R.$

2.1.8 Variance et écart type d'une variable aléatoire discrète

Définition 6. *La variance de X, notée $V(X)$ est, en notant $m = E(X)$:*

$$V(X) = p_1\left(x_1 - m\right)^2 + p_2\left(x_2 - m\right)^2 + ... + p_n\left(x_n - m\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i\left(x_i - m^2\right)$$

L'écart-type de X, noté $\sigma(X)$ est :

$$\sigma(X) = V(X)$$

Proposition 1. *La variance de X, notée $V(X)$ peut se calculer, en notant $m = E(X)$:*

$$V(X) = p_1{x_1}^2 + p_2{x_2}^2 + ... + p_n{x_n}^2 - m^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i{x_i}^2 - m^2$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - m\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i^2 - 2mx_i + m^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(p_i x_i^2 - 2mp_i x_i + m^2 p_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - 2m \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + m^2 \sum_{i=1}^{n} p_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - 2m \times m + m^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - m^2
\end{aligned}$$

□

Exemple 16. *Dans l'exemple 1, on a .*

X	0	1	2	$\sum$
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1
$P.X$	0	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	1
PX^2	*0*	$\frac{2}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{6}{4}$

et $E(X) = 1$.

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^2 - m^2 \\
&= 0 + \frac{2}{4} \times 1^2 + \frac{1}{4} \times 2^2 - 1^2 \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

2.1.9 Interprétation

Variance : pour une v.a. X, la variance $Var(X)$ représente la dispersion de X autour de sa moyenne.

Ecart type : pour des raisons d'unités physiques, il est plus clair de raisonner en termes d'écart type

2.1.10 Propriétés de $V(X)$ et $\sigma(X)$

Désignons par X une variable aléatoire définie sur Ω, α et β deux constantes réelles.

1. . La variance d'une constante est nulle : $V(\alpha) = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
2. $V(X + \alpha) = V(X), \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
3. $V(\alpha X) = \alpha^2 V(X), \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
4. $V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X), \forall \alpha; \beta \in \mathbb{R}$.

D'où
1. $\sigma(X + \alpha) = \sigma(X), \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
2. $\sigma(\alpha X) = |\alpha| \sigma(X), \forall \alpha \in \mathbb{R}$

2.2 Variables aléatoires continues.

Définition 7. *Une variable aléatoire est dite continue lorsqu'elle peut prendre un nombre infini non dénombrable de valeurs.*

Cela revient à dire qu'une telle variable peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle réel.

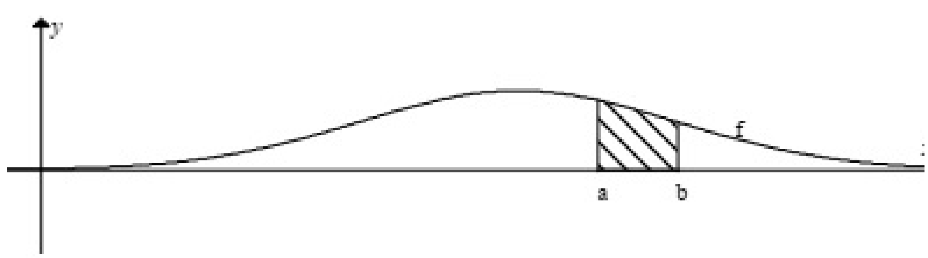
Exemple 17.
- *Le poids d'un enfant à la naissance est compris entre* $2;7kg$ *et* $5;6kg$.
- *Intervalle de temps entre 2 passages de train ;*
- *Durée de vie en secondes d'une pièce mécanique*

2.2.1 Densité de probabilité

Définition 8. *La fonction* f *est appelée densité de probabilité attachée à la variable aléatoire* X *si elle vérifie les conditions suivantes :*

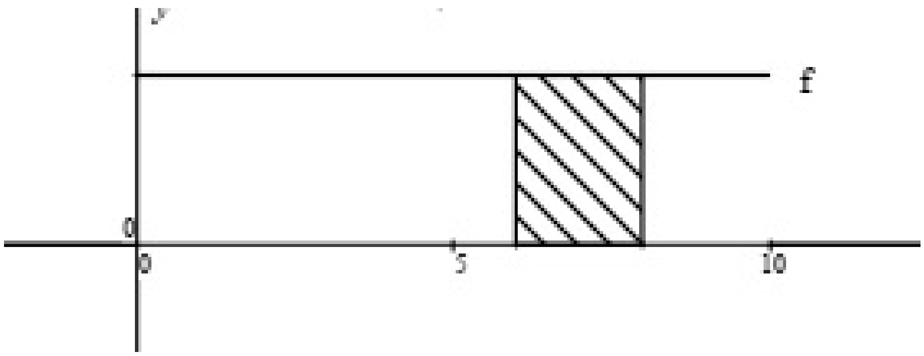
1. $f(x) \geq 0 \quad , \forall x \in \mathbb{R}$.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Remarque 6. *1) La probabilité que X prenne une valeur comprise entre a et b correspond à l'aire du domaine hachuré.*
2) L'aire totale sous f mesure 1. (100 %)
3) $P(X = a) = \int_a^a f(t)\, dt = 0$
4) $P(X \leq a) + P(X \geq a) = 1 \Longrightarrow P(X \geq a) = 1 - P(X \leq a)$
5) $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\, dt$



Exemple 18. *Un arrêt de tram est desservi toutes les 10 minutes. Notons X la variable aléatoire indiquant le temps d'attente (en minutes) jusqu'à l'arrivée du prochain tram lorsque nous nous rendons à l'arrêt sans tenir compte de l'horaire.*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & si \quad 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & sinon \end{cases}$$



La probabilité d'attendre entre 6 et 8 minutes est

$$P(6 < x < 8) = \int_6^8 \frac{1}{10} dt = \frac{1}{10} [x]_6^8 = \frac{1}{10} [8 - 6] = \frac{2}{10} = 0.2$$

2.2.2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire continue

Définition 9. *La fonction de répartition d'une variable continue X est définie par :*

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{dF_X(x)}{dx} = f(x)$$

c'est-à-dire la fonction de répartition F_X est la primitive de la fonction densité de probabilité f, et permet d'obtenir les probabilités associées à la variable aléatoire X

Propriétés

1. F_X est positive et est croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
2. $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(t)\, dt$.

3. La représentation graphique de F_X prend la forme d'une courbe cumulative.

Remarque 7. *Dans le cas d'une variable aléatoire continue, on a :*

1. *La probabilité attachée à un point x est nulle : $P(X = x) = 0$.*
2. *$P(X \leq x) = P(X < x) + P(X = x) = P(X < x)$.*
3. *La probabilité que la v.a. $X \in [a; b]$ est donnée par :*

$$\begin{aligned} P(a &\leq X \leq b) = P(a < X \leq b) \\ &= P(a \leq X < b) \\ &= P(a < X < b) \\ &= P(X < b) - P(X < a) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Quelques formules

Si f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire continue X, alors :

1) Espérance $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$.

2) Variance $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot [x - E(X)]^2 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - E^2(X)$.

3) Ecart-type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple 19. *Dans l'exemple précédent, (attente à l'arrêt de tram) nous obtenons :*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = E(X) = \int_0^{10} x \cdot \frac{1}{10}dx = \frac{1}{20}\left[x^2\right]_0^{10} = \frac{1}{20}(100 - 0) = 5.$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - E^2(X) = \int_0^{10} x^2 \cdot \frac{1}{10}dx - 5^2 = \frac{1}{30}\left[x^3\right]_0^{10} - 25 = \frac{1}{30}(1000) - 25 \approx 8.33$$

$$\sigma(X) = \sqrt{8.33} \approx 2.88 \; munites.$$

Exemple 20. *Soit X une variable aléatoire continue avec la fonction de densité suivante :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & si \;\; 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

a) Montrer que $f(x)$est bien une fonction de densité.
b) Calculer $P(1 \leq X \leq 1.5)$ et $P(X \geq 1.5)$
c) Calculer $E(X)$.
d) Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$.

***Répons**e :*

a) on a 1)si $x \in [0; 2]$: $f(x) = \frac{x}{2} \geq 0$ et si $x \notin [0; 2]$: $f(x) = 0$ donc $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^2 \frac{x}{2}dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^2 = 1$. *Donc* $f(x)$ *est une fonction de densité.*

b) $P(1 \leq X \leq 1.5) = \int_1^{1.5} f(x)dx = \int_1^{1.5} \frac{x}{2}dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{1.5} = \frac{1.5^2}{4} - \frac{1^2}{4} = 0.312\,5.$

$P(X \geq 1.5) = 1 - P(X \leq 1.5) = 1 - \int_0^{1.5} f(x)dx = 1 - \int_0^{1.5} \frac{x}{2}dx = 1 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{1.5} = 1 - \frac{1.5^2}{4} = 0.437\,5.$

c) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2}dx = \frac{4}{3}$

d) $V\ (X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - \ E^2(X) = \int_0^2 \frac{x^3}{2}dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} \approx 0.222$ *et* $\sigma(X) = \sqrt{0.222.} = 0.47.$

3 Covariance et moments.

3.1 Moments

Définition 10. *- Si X est une variable aléatoire discrète , on appelle moment d'ordre k , s'il existe, le nombre .*

$$E\left[X^k\right] = m^k = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^k$$

Si X est une variable aléatoire continue , on appelle moment d'ordre k , s'il existe, le nombre .

$$E\left[X^k\right] = m^k = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, x^k dx$$

Définition 11. $Var(X) = E\left[X^2\right] - E^2[X]$

Définition 12. *Si les v.a. X et Y ont des moments d'ordre 2, on appelle covariance du couple aléatoire (X, Y) la quantité :*

$$\begin{aligned} cov(X,Y) &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y). \end{aligned}$$

3.1.1 Propriétés

1) $var(X) = cov(X, X)$, et $var(X) \geq 0$.
2) $var(X + Y) = var(X) + var(Y) + 2cov(X, Y)$

Références

[1] Mohammed Bouznit, Polycopié de Cours de Statistique II (Probabilités), Université de Bejaia, Algerie, 2018

[2] Boukhari Fakhreddine, Polycopié de Cours de Probabilités , Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen , Algerie, 2019

[3] HAMDAOUI Abdenour, Polycopié Probabilités Cours et exercices d'applications, CUniversité des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf -Oran, Algerie, 2019