Université Mohamed Boudiaf - M'sila
Faculté des Sciences et Technologies
Département de Genie Civil

Cours de Probabilité-Statistiques
chapitre 5: Conditionnement et indépendance

Merini Abdelaziz*

7 décembre 2022

Table des matières

1 Introduction

Parfois, on dispose d'informations partielles concernant un évènement aléatoire. Le but des probabilités conditionnelles est de prendre en compte cette information partielle pour le calcul de la probabilité.

2 Probabilités conditionnelles

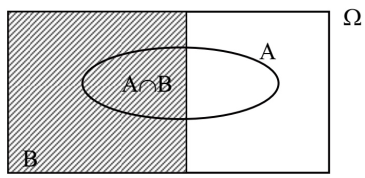
Soit Ω un univers d'une expérience aléatoire et soit P une probabilité sur Ω.

*

Définition 1. *On appelle probabilité de A sachant B,noté $P_B(A)$ (ou $P\left(A\diagup B\right)$ le réel*

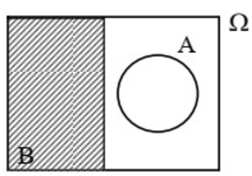
$$P\left(A\diagup B\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)}$$

Remarque 1. *1)$P\left(A\diagup B\right)$ peut s'interpréter comme le fait que Ω se restreint à B et que les résultats de A se restreignent à $A\cap B$.*



2) Si $A\cap B=\emptyset$ (A et B sont incompatibles), A ne peut pas se réaliser si B s'est déjà produit et donc

$$P\left(A\diagup B\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)}=\frac{P\left(\phi\right)}{P\left(B\right)}=0.$$



3) En général $P\left(B\diagup A\right)\neq P\left(A\diagup B\right).$

4) $P(\Omega\diagup B)=\dfrac{P\left(B\cap\Omega\right)}{P\left(B\right)}=1.$

Propriétés

1. Soient A et B deux évènements de Ω tels que $P(A)\neq 0$ et $P(B)\neq 0$ on a :
$$P(A\cap B)=P\left(B\diagup A\right)\times P(A)=P(A\diagup B)\times P(B).$$
2. Soient A, B et C trois évènements de Ω avec $P(A)\neq 0$.
• Si $C\sqsubseteq B$, alors $P(C\diagup A)\leq P\left(B\diagup A\right))$
•$P\left((B\cup C)\diagup A\right)=P\left(B\diagup A\right)+P(C\diagup A)-P\left((B\cap C)\diagup A\right).$
• $P\left(B\diagup A\right))+P(\bar{B}\diagup A)=1.$
3. $P\left(A\diagup A\right)=\dfrac{P(A\cap A)}{P(A)}=1.$

Exemple 1. *On lance 1 dé, considérons les événements* $A = \{5\}$ *et* $B = \{1, 3, 5\}$ *on a :*

$$P(A) = \frac{1}{6} \quad , P(B) = \frac{3}{6} \quad et \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

• *La probabilité que ≪ 5 sorte ≫ sachant qu'il s'agit ≪ d'un nombre impair ≫ est de :*

$$P(A \diagup B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}.$$

• *La probabilité qu'un ≪ nombre impair ≫ sorte sachant qu'il s'agit de ≪ 5 ≫ est de*

$$P(B \diagup A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = 1.$$

On remarque que $P(B \diagup A) \neq P(A \diagup B)$.

• *La probabilité que ≪ 5 ne sorte pas≫ sachant qu'il s'agit ≪ d'un nombre impair ≫ est de :*

$$P(\bar{A} \diagup B) = 1 - P(A \diagup B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

• *La probabilité que ≪ 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6 sorte ≫ sachant qu'il s'agit ≪ d'un nombre impair ≫ est de :*

$$P(\Omega \diagup B) = \frac{P(B \cap \Omega)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

2.1 Formule des probabilités totales.

Définition 2. *Soit* n *un entier supérieur ou égal à 2.*

Dire que n *évènments* $B_1, B_2, ..., B_n$ *forment une partition de l'univers* Ω *signifie que :*

• *Pour tout* $i \in \{1; 2; ...; n\}$, $B_i \neq \emptyset$.
• $\forall i \neq j : B_i \cap B_j = \emptyset$..
• $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_k = \Omega$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

théoreme 1. *Soient* n *´évènements* $B_1, B_2, ..., B_n$ *de probabilités non nulles formant une partition de* Ω.

Pour tout l'évènement A *de* Ω *on a*

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + ... + P(A \cap B_n) \\ &= P(B_1) P(A \diagup B_1) + P(B_2) P(A \diagup B_2) + ... + P(B_n) P(A \diagup B_n) \end{aligned}$$

Remarque 2. *Puisque* ($B \cup \bar{B} = \Omega$ *et* $B \cup \bar{B} = \phi$) *, on peut appliquer la formule des probabilités totales :*

$$P(A) = P(B) \times P(A \diagup B) + P(\bar{B}) \times P(A \diagup \bar{B})$$

Exemple 2. *Trois machines A, B et C produisent respectivement* 40%, 35% *et* 25% *du nombre total de comprimés fabriquées par un laboratoire pharmaceutique. Chacune de ces machines produit respectivement* 5%, 6% *et* 3% *de comprimés défectueux.*

Quelle est la probabilité qu'un comprimé pris au hasard, soit défectueux ?

Réponse : *Considérons les évènements suivants :*

A : "le comprimé provient de la machine A" ; $P(A) = 0.40$

B : "le comprimé´e provient de la machine B" ; $P(B) = 0.35$

C : "le comprimé provient de la machine C" ; $P(C) = 0.25$

D : "le comprimé est d´efectueux"

On a

$$P(D/A) = 0.05; P(D/B) = 0.06; \quad P(D/C) = 0.03.$$

On cherche $P(D) =?$

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) \\ &= 0.40 \times 0.05 + 0.35 \times 0.06 + 0.25 \times 0.03 \\ &= 0.0485 \end{aligned}$$

2.2 Formule des probabilités composées

théoreme 2. *Soient A, B, C, D .... des évènements d'un univers* Ω*.*

a) $P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$.

b) $P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B/A)P(C/(B \cap A))$

c) $P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A).P(B/A)P(C/(B \cap A)).P(D/(A \cap B \cap C))$.

Démonstration. a) D'après la définition

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B/A).$$

b) D'après la définition

$$\begin{aligned} P(C/(B \cap A)) &= \frac{P((A \cap B) \cap C)}{P(A \cap B)} \\ &\Longrightarrow P(A \cap B \cap C) = P((A \cap B))P(C/(B \cap A)) = P(A).P(B/A)P(C/(B \cap A)) \end{aligned}$$

□

Exemple 3. *Considérons une urne contenant 4 boules blanches et 6 boules rouges. On tire successivement 3 boules sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage constitué de 3 boules blanches ?*

Réponse *On note* B_i *l'évènement : la i-*$^{\text{ème}}$ *boule tirée est blanche. Clairement*

$$P(B_1) = \frac{4}{10}$$

$$P(B_2 \diagup B_1) = \frac{3}{9}$$
$$P(B_{3\diagup}(B_2 \cap B_1)) = \frac{2}{8}.$$

Par probabilités composées, on obtient alors

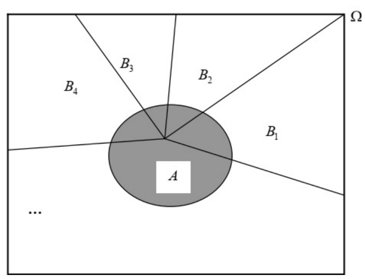
$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{30}.$$

3 Formule de Bayes.

théoreme 3 (Théorème de Bayes)**.** *Soient $B_1, B_2, ..., B_n$, n évènements disjoints deux à deux c'est-à-dire $\forall i \neq j : Bi \cap Bj = \emptyset$ et tels que $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = \Omega$. Soit A un évèment*

Alors,

$$\begin{aligned} P(B_i \diagup A) &= \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} \\ &= \frac{P(B_i) P(A \diagup B_i)}{\sum_{k=0}^{n} P(B_k) P(A \diagup B_k)} \end{aligned}$$



Démonstration. On a $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = \Omega$ et $A \cap \Omega = A$

Donc

$$\begin{aligned} A \cap (B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n) &= A \Leftrightarrow \\ (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup ... \cup (A \cap B_n) &= A. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup ... \cup (A \cap B_n)) &= P(A) \Leftrightarrow \\ P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + ... + P(A \cap B_n) &= P(A) \Leftrightarrow \\ P(B_1) \times P(A \diagup B_1) + ... + P(B_n) \times P(A \diagup B_n) &= P(A) \Leftrightarrow \\ \sum_{k=0}^{n} P(B_k) P(A \diagup B_k) &= P(A). \end{aligned}$$

Donc,

$$P\left(B_i \diagup A\right) = \frac{P\left(B_i\right) P\left(A \diagup B_i\right)}{\sum\limits_{k=0}^{n} P\left(B_k\right) P\left(A \diagup B_k\right)}$$

$\square$

Exemple 4. *Une entreprise utilise trois types d'ampoules T_1 T_2 et T_3 , dans la proportion de 60%, 30% et 10%. La probabilité que ces ampoules fonctionnent est respectivement 90%, 80% et 50%.*

Quelle est la probabilité qu'une ampoule défectueuse provienne de T_1 ? ***Réponse :***

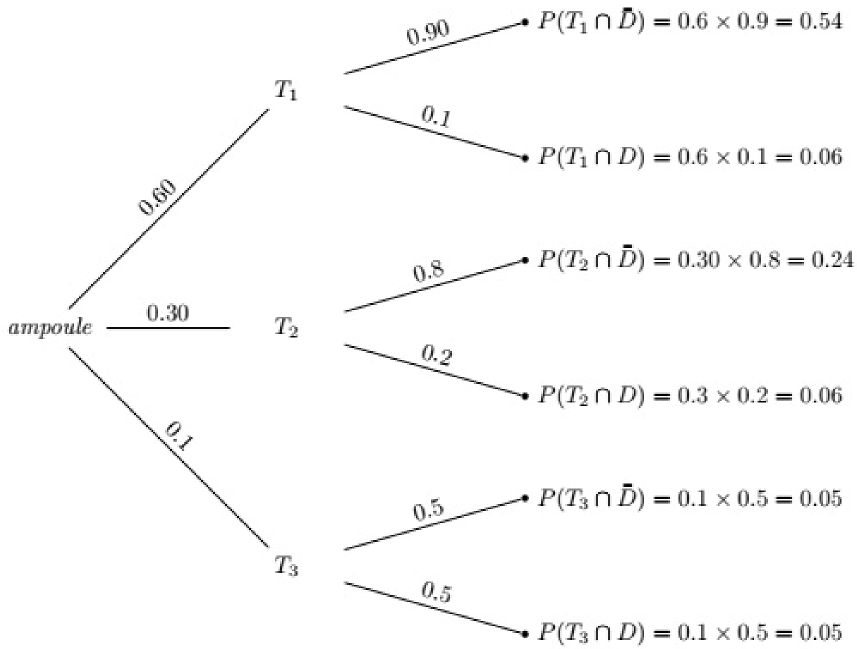
T_1= ≪ utiliser une ampoule T_1 ≫ donc $P\left(T_1\right) = 0.60$

T_2= ≪ utiliser une ampoule T_2 ≫ donc $P(T_2) = 0.30$

T_3 = ≪ utiliser une ampoule T_3 ≫ donc $P(T_3) = 0.10$

D = ampoule défectueuse. $\bar{D}$ = ampoule non défectueus.

On cherche $P\left(T_1 \diagup A\right)$ =?. On a



$$P\left(D \diagup T_1\right) = 0.10; P\left(D \diagup T_2\right) = 0.20; \quad P\left(D \diagup T_3\right) = 0.50$$

alors

$$\begin{aligned} P\left(D\right) &= P\left(T_1\right) P\left(D \diagup T_1\right) + P\left(T_2\right) P\left(D \diagup T_2\right) + P\left(T_3\right) P\left(D \diagup T_3\right) \\ &= 0.60 \times 0.10 + 0.30 \times 0.20 + 0.10 \times 0.50 \\ &= 0.17 \end{aligned}$$

Donc

$$P\left(T_1\diagup A\right)=\frac{p\left(T_1\cap D\right)}{P\left(D\right)}=\frac{.60\times 0.10}{0.17}=\frac{6}{17}$$

4 Evénements indépendants

Définition 3. *On dit que deux évènements A et B d'un univers Ω sont indépendants si $P(A\cap B)=P(A)P(B)$*

Dans le cas contraire on dit qu'ils sont dépendants.

Remarque 3. *a) Il est facile de voir que deux évènements A et B sont indépendants si $P\left(B\diagup A\right)=P\left(B\right)$, ou de manière équivalente si$P\left(A\diagup B\right)=P\left(A\right)$*

b) Il ne faut pas confondre évènements indépendants et incompatibles.

Dans le cas d'évènements indépendants, la réalisation de l'un des évènements n'empêche pas celle du second. Par contre au d'évènements incompatibles, la réalisation del'un des événements interdit celle de l'autre.

Exemple 5. *On lance deux dés simultanément. On note A, B et C les événements suivants : "j'obtiens 1 avec le premier dé", " j'obtiens 4 avec le second dé" et "j'obtiens 3*

avec le premier dé".

Les événements A et B sont indépendants alors que les événements A et C sont incompatible.

Exemple 6. *On jette successivement deux dés équilibrés. On note les événements suivants :*

$A=\ll$ la somme des dés est 7 $\gg$, alors $A=\left\{(1;6),(2;5),(3;4),(6;1),(5;2),(4;3)\right\}$ *ainsi* $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

$B=\ll$ le premier dé donne 4 $\gg$, ce qui donne $B=\left\{(4;6),(4;5),(4;4),(4;1),(4;2),(4;3)\right\}$ *ainsi* $P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

$A\cap B=\ll$ la somme des dés est 7 et le premier dé donne 4 $\gg$, alors $A\cap B=\left\{(4;7)\right\}$ *ainsi* $P\left(A\cap B\right)=\frac{1}{36}$

On observe donc, sur cet exmple, que

$$P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\times P\left(B\right)$$

donces événements A et B sont indépendants.

Références

[1] Jean-Philippe Javet, Combinatoire et Probabilités, http ://www.gymomath.ch/javmath/polycopie/3Ms

[2] Serge Picchione, COMBINATOIRES ET PROBABILITÉS, Collège Sismondi (Genève / Suisse)., 2013 http ://disciplines.sismondi.ch/MA/espace-perso-profs/serge-picchione