Chapitre 1

Logique et raisonnement

1.1 Logique

1.1.1 Assertions et connecteurs logiques

Définition 1.1. ***(Assertion)*** *Une proposition (ou assertion) est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.*

Exemple 1.2.
- *L'assertion* $2+2=4$ *est vraie.*
- *L'assertion si* $x>4$ *alors* $x>2$ *et vraie. .*
- M'sila est en France *est fausse.*
- *L'assertion si* $x>2$ *et* $y>4$ *alors* $x+y<0$ *est fausse.*
- *L'expression* $x>0$ *n'est pas une assertion, car elle contient une variable libre* x*, et on ne peut pas répondre á la question l'assertion* $(x>0)$ *est elle vraie ?, car la réponse dépend de* x*.*

Définition 1.3. *Soient* P *et* Q *deux propositions.*

1. ***(La négation)*** *: La négation de* P *est la proposition, notée* $\overline{P}$*, définie par :*
   - $\overline{P}$ *est vraie lorsque* P *est fausse ;*
   - $\overline{P}$ *est fausse lorsque* P *est vraie.*

   Table de vérité :

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

2. ***La conjonction :*** *La conjonction de* P *et de* Q *est la proposition, notée* $P\wedge Q$ *(*P *et* Q*), définie de la maniére suivante :*
   - $P\wedge Q$ *est vraie lorsque* P *et* Q *sont vraies ;*
   - • $P\wedge Q$ *est fausse lorsque l'une au moins des deux propositions est fausse.*

   Table de vérité :

P	Q	$P\wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

3. ***La disjonction :*** *La disjonction de* P *et de* Q *est la proposition, notée* $P\vee Q$ *(*P *ou* Q*), définie de la maniére suivante :*
   - $P\vee Q$ *est vraie lorsque l'une au moins des deux propositions est vraie ;*
   - $P\vee Q$ *est fausse lorsque* P *et* Q *sont fausses.*

Table de vérité :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Définition 1.4. ***(Implication et équivalence)***
Soient P et Q deux assertions.

1. *l'assertion $P \implies Q$ exprime l'idée que si P est vraie, alors Q doit être vraie aussi. La définition mathématique est la suivante "l'implication de Q par P, notée $P \implies Q$, est l'assertion $(\overline{P} \vee Q)$".*

Table de vérité :

P	$\overline{P}$	Q	$P \implies Q$
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	V

2. ***La contraposée*** *de l'implication $P \implies Q$ est l'implication $\overline{Q} \implies \overline{P}$.*
3. ***La réciproque*** *de l'implication $P \implies Q$ est l'implication $Q \implies P$.*
4. ***La négation*** *de l'implication $Q \implies P$: et $P \wedge \overline{Q}$*
5. ***L'équivalence*** *$P \iff Q$ est l'assertion $P \implies Q$ et $Q \implies P$. C'est donc l'assertion qui est vraie lorsque l'implication $P \implies Q$ et sa réciproque $Q \implies P$ sont vraies simultanément. On dit alors que P est équivalent à Q ou encore que P est vraie si et seulement si Q est vraie.*

Proposition 1.5. *Soient P et Q deux propositions alors :*
- $\overline{P \wedge Q} \iff \overline{P} \vee \overline{Q}$
- $\overline{P \vee Q} \iff \overline{P} \wedge \overline{Q}$
- $\overline{P \implies Q} \iff P \wedge \overline{Q}$

1.1.2 Quantificateurs

1. **Le quantificateur universel**, noté $\forall$, signifie « pour tout », exemple : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.
2. **Le quantificateur existentiel**, noté $\exists$, signifie « il existe », exemple : $\exists x \in \mathbb{R}, x \leq 0$.
3. On trouve parfois le symbole $\exists!$ qui signifie « il existe un unique » exemple : $\exists! x \in \mathbb{R}, x^3 = 1$

Université de Mohamed Boudiaf M'sila
Faculté des Sciences et Technologies
Module :Maths 01

Année Universitaire 2022-2023
Licence ST LMD 1ère année

Série d'exercices N°1

Exercice 01

Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Leftrightarrow$; $\Leftarrow$; $\Rightarrow$.

1. $x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = 4..........x = 2.$
2. $z \in \mathbb{C}, \quad \bar{z} = z..........z \in \mathbb{R}.$
3. $x \in \mathbb{R}, \quad x = \pi..........e^{2ix} = 1$

Exercice 02

Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ? donner leur negation

1. $(2+2=4) \wedge (1+1=3)$
2. $(2+2=4) \vee (1+1=3)$
3. $(2+2=4) \implies (1+1=3)$
4. $(1+1=3) \implies (2+2=4)$
5. $\forall x \in [1;+\infty[; x^2 \geq 1$
6. $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 1$
7. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 1.$
8. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 1.$
9. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = x^2.$
10. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2.$
11. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y = x^2.$

Exercice 03

Soit : P « Pour tout nombre réel x, il existe au moins un entier naturel n supérieur ou égal à x »

1. Ecrire la proposition P avec des quantificateurs.
2. Ecrire la négation de P

Exercice 04

On reprend l'implication $(a = b) \implies a^2 = b^2$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

• Déterminer si la contraposée, la réciproque et l'équivalence associées sont vraies. Lorsque ce n'est pas le cas, déterminer un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel les assertions sont vraies.

Exercice 05

1. Donner la contraposée de la proposition suivante : $-1 \leq x \leq 1 \implies |x| \leq 1$
2. Donner la réciproque de la proposition suivante : $-1 \leq x \leq 1 \implies |x| \leq 1$
3. Donner la negation de la proposition suivante : $-1 \leq x \leq 1 \implies |x| \leq 1$

Exercice 06

Soient les quatre assertions suivantes :

(a) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y > 0$

(c) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$

(d) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 > x$

1. Les assertions a,b,c et d sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

Exercice 07 (Raisonnement direct)

1. Monrter que si $a, b \in \mathbb{Q} \implies a+b \in \mathbb{Q}$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que si $a \leq b \implies a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n est multiple de $3 \implies n^2$ est divisible par 9 .

Exercice 08 (Raisonnement par contraposée)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair .
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que si $x^5 + x < 2$ alors, $x < 1$.
3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$x + y > 1 \implies y > \frac{4}{5} \quad \text{ou} \quad x > \frac{1}{5}.$$

Exercice 09 (Raisonnment par récurrence)

1. Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
$$P(n) : \qquad \sum_{k=1}^{n} 3k^2 + k = n(n+1)^2.$$
2. Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
$$P(n) : \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 + k = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$
3. Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n(n+1)$ est pair.
4. Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
$$P(n) : \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Exercice 11 (Raisonnement par l'absured)

1. Montrer par l'absurde que, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ est pair.
2. Soient $a, b \geq 0$. Montrer par l'absurde que, $\left(\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}\right) \implies a = b$.

Exercice 12 (Raisonnement du cas par cas.)

1. Montrer par, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n(n+1)$ est pair.
2. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2 - x + 1 - |x-1| \geq 0$.
3. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2+1} - x \geq 0$.

Exercice 13 (Raisonnment par contre exemple)

1. Montrer par contre exemple que, la proposition $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$. est fausses.

Solution de série d'exercices N° 01

Exercice 01

Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Leftrightarrow$; $\Leftarrow$; $\Rightarrow$.

1. $x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = 4 \Longleftarrow x = 2.$
2. $z \in \mathbb{C}, \quad \bar{z} = z \iff z \in \mathbb{R}.$
3. $x \in \mathbb{R}, \quad x = \pi \implies e^{2ix} = 1$

Exercice 02

Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ? donner leur negation

1. $(2+2=4) \wedge (1+1=3)$ est fausse, sa négation est $(2+2 \neq 4) \vee (1+1 \neq 3)$
2. $(2+2=4) \vee (1+1=3)$ est vraie, sa négation est $(2+2 \neq 4) \wedge (1+1 \neq 3)$
3. $(2+2=4) \implies (1+1=3)$ est fausse, sa négation est $(2+2=4) \wedge (1+1 \neq 3)$
4. $(1+1=3) \implies (2+2=4)$ est vraie, sa négation est $(1+1=3) \wedge (2+2 \neq 4)$
5. $\forall x \in [1; +\infty[; x^2 \geq 1$ est vraie, sa négation est $\exists x \in [1; +\infty[; x^2 < 1$
6. $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 1$ est fausse, sa négation est $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 < 1$
7. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 1.$ est fausse, sa négation est $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 1.$
8. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 1.$ est vraie, sa négation est $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 1.$
9. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = x^2.$ est vraie, sa négation est $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y \neq x^2.$
10. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2.$ est fausse, sa négation est $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \neq y^2.$
11. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y = x^2.$ est fausse, sa négation est $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y \neq x^2$

Exercice 03

Soit : P « Pour tout nombre réel x, il existe au moins un entier naturel n supérieur ou égal à x »

1. La proposition P avec des quantificateurs.

$$P: \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : n \geq x :$$

2. La négation de P

$$\overline{P}: \quad \exists\, x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : n < x :$$

Exercice 04

On reprend l'implication $(a = b) \implies a^2 = b^2$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

✓La contraposée associée á l'implication $(a = b) \implies a^2 = b^2$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$a^2 \neq b^2 \implies (a \neq b) \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{est vraie}$$

✓La réciproque associée á l'implication $(a = b) \implies a^2 = b^2$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, est vraie si $a \times b \geq 0$, donc on prend par exemple $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$

$$a^2 = b^2 \implies (a = b) \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}_+^2$$

✓L'équivalence associée á l'implication $(a = b) \implies a^2 = b^2$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, est vrai si $a \times b \geq 0$, donc on prend par exemple $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$

$$(a = b) \iff a^2 = b^2 \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}_+^2$$

Exercice 05

1. On a la contraposée de $P \implies Q$ est $\overline{Q} \implies \overline{P}$, alors la contraposée de : $-1 \leq x \leq 1 \implies |x| \leq 1$ est

$$|x| > 1 \implies x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

2. On a la réciproque de $P \implies Q$ est $Q \implies P$, alors la réciproque de la proposition $-1 \leq x \leq 1 \implies |x| \leq 1$ est

$$|x| \leq 1 \implies -1 \leq x \leq 1$$

3. On a la négation de $P \implies Q$ est $P \wedge \overline{Q}$, alors la négation de la proposition $-1 \leq x \leq 1 \implies |x| \leq 1$ est

$$(-1 \leq x \leq 1) \wedge (|x| > 1)$$

Exercice 06

Soient les quatre assertions suivantes :

(a) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$ est fausse, sa négation est : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y > 0$ est vraie, sa négation est : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0$

(c) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$ est fausse, sa négation est : $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0$

(d) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 > x$ est vraie, sa négation est : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y^2 \leq x$