1^{re} **Année Master**
Option : AMN
Semestre : 2

Université Mohamed Boudiaf - M'sila

TD $N°1$
Chapitre1 : Méthodes du gradient projeté
Année universitaire : 2022/2023

Exercice 1. Soient Ω un sous-ensemble convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que

- ☞ f est fortement convexe c'est à dire

$$\exists \alpha > 0,\ \forall x, y \in \Omega, \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2 .$$

- ☞ L'application ∇f est lipschitzienne c'est à dire

$$\exists M > 0,\ \forall x, y \in \Omega,\ \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq M \|x - y\| .$$

On considère le problème d'optimisation suivant :

$$(P) : \begin{cases} \min f(x) \\ x \in \Omega \end{cases}$$

1. Montrer que le problème (P) admet une solution globale unique notée par x^*.
2. Soit (x_k) la suite de la méthode du gradient projeté donnée par :

$$\begin{cases} x_0 \in \Omega, \\ x_{k+1} = \mathcal{P}_\Omega [x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)],\ \forall k \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{1}$$

   où $\mathcal{P}_\Omega$ désigne l'opérateur de projection orthogonal sur Ω. S'il existe deux réels a et b tels que α_k satisfasse $0 < a < \alpha_k < b < 2\alpha/M^2$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que la méthode du gradient définie par (1) converge pour tout choix de x_0, de façon géométrique, autrement dit

$$\exists \beta \in \,]0, 1[\,,\ \|x_{k+1} - x^*\| \leq \beta^k \|x_0 - x^*\| .$$

Exercice 2 (Examen final, 2019/2020)**.** On considère le problème d'optimisation avec contraintes d'égalités suivant :

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2} x^T A x \\ x \in \Omega \end{cases} \tag{2}$$

où A est une matrice carrée d'ordre n, symétrique et définie positive et $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 2\}$.

Nous appliquons à ce problème l'algorithme de gradient projeté à pas fixe suivant :

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}^n, \\ x^{k+1} = \mathcal{P}_\Omega \left[x^k - \alpha \nabla f\left(x^k\right)\right], \end{cases} \tag{3}$$

où $\alpha > 0$ et $\mathcal{P}_\Omega$ est l'opérateur orthogonal de projection sur Ω.

1. Écrire $\mathcal{P}_\Omega(x)$ en fonction de x.

2. On pose :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Résoudre le problème (2).
   (b) Soit $y^k = x_1^k / x_2^k$. Montrer que $\left(y^k\right)$ est une suite géométrique.
   (c) On suppose que $x_2^0 \neq 0$. Montrer que la suite $\left(x^k\right)$ définie par (3) converge vers une solution optimale de problème (2).

<u>**Exercice**</u> **3** (Examen final, 2021/2022)**.** Soit le problème d'optimisation avec contraintes d'égalités suivant :

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle - \langle c, x\rangle \\ Ax = b, \end{cases} \tag{4}$$

où Q est une matrice carré d'ordre n symétrique et définie positive, $c \in \mathbb{R}^n$ et A est une matrice rectangulaire de taille $m \times n$ avec $m < n$ et $rang\,(A) = m$. Soit $\left(x^k\right)$ la suite de la méthode de gradient projeté à pas optimal définie par :

$$\begin{cases} x^0 \in \Omega, \\ x^{k+1} = \mathcal{P}_\Omega\left[x^k - \alpha_k \nabla f\left(x^k\right)\right] = x^k - \alpha_k P \nabla f\left(x^k\right), \ \forall k \in \mathbb{N}, \\ \alpha_k \text{ est le point de minimum global de la fonction } \varphi(\alpha) = f\left[x^k - \alpha P \nabla f\left(x^k\right)\right]. \end{cases}$$

où $P = I - A^T\left(AA^T\right)^{-1} A$.

1. Monter que la suite $\left(x^k\right)$ est donnée par :

$$x^{k+1} = x^k - \frac{g_k^T P g_k}{g_k^T P Q P g_k} P g_k,$$

   où $g_k = \nabla f\left(x^k\right) = Qx^k - c$.
2. Montrer que $g_{k+1}^T P g_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que le vecteur $x^{k+1} - x^k$ est orthogonal sur le vecteur $x^{k+2} - x^{k+1}$.