Corrigé d'exercice 1:

1. On pose $g(t) = f[x + t(y-x)]$ pour tout $x, y \in \Omega$ et $t \in [0,1]$. Nous avons :

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y-x \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(x + t(y-x)) - \nabla f(x), y-x \rangle \, dt \\ &\geq \alpha \int_0^1 t \|y-x\|^2 \, dt \\ &\geq \frac{\alpha}{2} \|y-x\|^2, \end{aligned}$$

d'où

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle + \frac{\alpha}{2} \|y-x\|^2.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$f(y) \geq f(x) - \|\nabla f(x)\| \|y-x\| + \frac{\alpha}{2} \|y-x\|^2.$$

On fixe $x = x_0 \in \Omega$, on obtient

$$\lim_{\|y-x_0\| \to +\infty} \left[f(x_0) - \|\nabla f(x_0)\| \|y-x_0\| + \frac{\alpha}{2} \|y-x_0\|^2 \right] = +\infty \Rightarrow \lim_{\|y\| \to +\infty} f(y) = +\infty,$$

d'où, la fonction f est coercive et Ω fermé, donc le problème (P) admet au moins un point de minimum global, mais la fonction f est fortement convexe et Ω est convexe c'est à dire l'unicité de la solution globale notée par x^*.

2. Nous avons :

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|\mathcal{P}_\Omega(x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)) - \mathcal{P}_\Omega(x^* - \alpha_k \nabla f(x^*))\|^2 \\ &\leq \|x_k - x^* - \alpha_k (\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*))\|^2 \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha_k \langle \nabla f(x_k) - \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle + \alpha_k^2 \|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*)\|^2 \\ &\leq \left(1 - 2\alpha\alpha_k + M^2 \alpha_k^2\right) \|x_k - x^*\|^2. \end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \beta \|x_k - x^*\|, \quad \text{où } \beta = \max\left\{\sqrt{1 - 2\alpha a + M^2 a^2}, \sqrt{1 - 2\alpha b + M^2 b^2}\right\}.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \|x_1 - x^*\| &\leq \beta \|x_0 - x^*\| \\ \|x_2 - x^*\| &\leq \beta \|x_1 - x^*\| \\ &\vdots \\ \|x_{k-1} - x^*\| &\leq \beta \|x_{k-2} - x^*\| \\ \|x_k - x^*\| &\leq \beta \|x_{k-1} - x^*\|, \end{aligned}$$

Par multiplication, on obtient :

$$\|x_k - x^*\| \leq \beta^k \|x_0 - x^*\|.$$

D'autre part,

$$0 < 1 - 2\alpha a + M^2 a^2 < 1 \text{ et } 0 < 1 - 2\alpha b + M^2 b^2 < 1 \Rightarrow 0 < \beta < 1 \Rightarrow x_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} x^*.$$

Corrigé d'exercice 2: 1. L'opérateur de projection orthogonal $\mathcal{P}_\Omega$ est donné par :

$$\mathcal{P}_\Omega(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \Omega, \\ \frac{2x}{\|x\|} & \text{si} \quad x \notin \Omega,\ x \neq 0. \end{cases}$$

2. Soit $x = (x_1, x_2)^T$. Nous avons :
   (a) La fonction de Lagrange de (2) est donnée par :

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda\left(\|x\|^2 - 4\right) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{2} + \lambda\left(x_1^2 + x_2^2 - 4\right),$$

   d'où la condition de Lagrange est donnée par :

$$\begin{cases} 2x_1 + 2\lambda x_1 = 0, \\ x_2 + 2\lambda x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+\lambda)\, x_1 = 0, \\ (1+2\lambda)\, x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 4. \end{cases}$$

   i. Si $\lambda = -1$, alors $x_2 = 0$ et $x_1 = \pm 2$, les points sont $(2, 0)$ et $(-2, 0)$.
   ii. Si $\lambda = -1/2$, alors $x_1 = 0$ et $x_2 = \pm 2$, les points sont $(0, 2)$ et $(0, -2)$.

   D'autre part, nous avons :

$$2 = f(0, 2) = f(0, -2) < f(2, 0) = f(-2, 0) = 4,$$

   d'où $(0, 2)$ et $(0, -2)$ sont solutions optimales de (2).

   (b) On pose $x^k = \left(x_1^k, x_2^k\right)^T$. Nous avons :

$$x^{k+1} = \mathcal{P}_\Omega\left[x^k - \alpha \nabla f\left(x^k\right)\right] = 2\frac{x^k + \alpha \nabla f\left(x^k\right)}{\|x^k + \alpha \nabla f\left(x^k\right)\|} = 2\beta_k\left(I - \alpha A\right) x^k,$$

   où $\beta_k = 1/\left\|\left(I - \alpha A\right) x^k\right\|$. Dans le cas particulier de A, nous avons :

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = 2\beta_k\left(1 - 2\alpha\right) x_1^k, \\ x_2^{k+1} = 2\beta_k\left(1 - \alpha\right) x_2^k. \end{cases} \Rightarrow y^{k+1} = \frac{x_1^{k+1}}{x_2^{k+1}} = \left(\frac{1 - 2\alpha}{1 - \alpha}\right) y^k.$$

   Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$\frac{y^{k+1}}{y^k} = \left(\frac{1 - 2\alpha}{1 - \alpha}\right) \Rightarrow \left(y^k\right) \text{ est une suite géométrique.}$$

(c) On suppose que $x_2^0 \neq 0$. Nous avons :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ y^k = \left(\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}\right)^k y^0.$$

D'où, $\alpha > 0$ et $(1-2\alpha)/(1-\alpha) < 1$, donc $y^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned} 2 = \left\|x^k\right\| &= \sqrt{\left(x_1^k\right)^2 + \left(x_2^k\right)^2} \\ &= \left|x_2^k\right| \sqrt{1+(y^k)^2}, \end{aligned}$$

D'où,

$$\left|x_2^k\right| = \frac{2}{\sqrt{1+(y^k)^2}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 2.$$

c'est à dire

$$x_2^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 2 \quad \text{où} \quad x_2^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} -2.$$

Alors,

$$y^k = \frac{x_1^k}{x_2^k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \Rightarrow x_1^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

D'où, la suite converge vers $(0,2)$ ou $(0,-2)$ solutions optimales du problème (2).

Corrigé d'exercice 3: 1. Soit x^k la suite de la méthode de gradient projeté à pas optimal pour le problème (4) définie par :

$$x^{k+1} = \mathcal{P}_\Omega\left[x - \alpha_k \nabla f\left(x^k\right)\right] = x^k - \alpha_k P \nabla f\left(x^k\right),$$

où α_k est le point de minimum global de la fonction $\varphi(\alpha) = f\left(x^k - \alpha P \nabla f\left(x^k\right)\right)$. Nous avons :

$$g_k = \nabla f\left(x^k\right) = Qx^k - c.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) = f\left[x^k - \alpha P g_k\right] &\Rightarrow \varphi'(\alpha_k) = \left\langle \nabla f\left(x^k - \alpha_k P g_k\right), P g_k \right\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \left\langle Q\left(x^k - \alpha_k P g_k\right) - c, P g_k \right\rangle = 0, \\ &\Rightarrow \left\langle Qx^k - c, P g_k \right\rangle - \alpha_k \left\langle QP g_k, P g_k \right\rangle = 0, \\ &\Rightarrow \left\langle g_k, P g_k \right\rangle = \alpha_k \left\langle QP g_k, P g_k \right\rangle, \\ &\Rightarrow \alpha_k = \frac{\left\langle g_k, P g_k \right\rangle}{\left\langle QP g_k, P g_k \right\rangle} = \frac{g_k^T P g_k}{g_k^T PQP g_k}. \end{aligned}$$

D'où, la suite de la méthode de gradient projeté à pas optimal est donnée par :

$$x^{k+1} = x^k - \frac{g_k^T P g_k}{g_k^T PQP g_k} P g_k.$$

2. Nous avons :

$$\begin{aligned}
g_{k+1}^T P g_k = \left\langle Q x^{k+1} - c, P g_k \right\rangle &= \left\langle Q \left[x^k - \frac{g_k^T P g_k}{g_k^T P Q P g_k} P g_k \right] - c, P g_k \right\rangle \\
&= \langle g_k, P g_k \rangle - \frac{g_k^T P g_k}{g_k^T P Q P g_k} \langle Q P g_k, P g_k \rangle \\
&= \langle g_k, P g_k \rangle - g_k^T P g_k = 0.
\end{aligned}$$

3. Nous avons :

$$\left\langle x^{k+2} - x^{k+1}, x^{k+1} - x^k \right\rangle = \alpha_k \alpha_{k+1} \langle P g_{k+1}, P g_k \rangle = \alpha_k \alpha_{k+1} g_{k+1}^T P g_k = 0.$$