TP 1 : Méthode du gradient projeté à pas fixe pour un problème d'obstacle.

On souhaite résoudre numériquement un problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$\begin{cases} \min J(u), \\ u \in K = \left\{ u \in \mathbb{R}^N : \varphi_1(u) \leq 0, \ldots, \varphi_p(u) \leq 0 \right\}, \end{cases} \tag{1}$$

où J est la fonction objective et $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ sont les fonctions contraintes.

Un problème d'obstacle

Soit f et g deux fonctions continues données sur $[0,1]$. On souhaite résoudre le problème d'obstacle suivant : trouver $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\left.\begin{array}{r} -u''(x) \geq f(x), \\ u(x) \geq g(x), \\ (-u''(x) - f(x))(u(x) - g(x)) = 0, \end{array}\right\} \text{ sur } \left]0,1\right[\text{ et } u(0) = u(1) = 0. \tag{2}$$

- ☞ La première équation traduit une concavité maximale de la fonction u.
- ☞ La deuxième équation représente l'obstacle : on veut que la solution u soit au dessus de g.
- ☞ La troisième équation traduit le fait que l'on a au moins égalité dans une des deux équations précédentes : soit on résout $-u''(x) = f(x)$, soit $u(x) = g(x)$, et on est sur l'obstacle.

Pour discrétiser le problème (2) par différences finies, on introduit une subdivision uniforme $x_i = ih$ de $[0,1]$, où $h = \frac{1}{N+1}$ désigne le pas en espace du maillage où $i = 0, 1, \ldots, N+1$. Alors, on cherche à résoudre le problème suivant :

$$\left.\begin{array}{r} \frac{-u_{i-1}+2u_i-u_{i+1}}{h^2} \geq f(x_i), \\ u_i \geq g(x_i), \\ \left(\frac{-u_{i-1}+2u_i-u_{i+1}}{h^2} - f(x_i)\right)(u_i - g(x_i)) = 0, \end{array}\right\} \text{ pour } i = 1, \ldots, N \text{ et } u_0 = u_{N+1} = 0. \tag{3}$$

On note J_N la fonction définie par :

$$J_N(u) = \frac{1}{2}\langle A_N u, u\rangle - \langle f_N, u\rangle,$$

où A_N et f_N sont donnés par :

$$A_N = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad f_N = h^2 \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix}$$

1. Montrer l'équivalence suivante :

$$\left(\mathbf{u}_N = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \text{ est solution de (3)} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \mathbf{u}_N \text{ minimise } J_N(u) \\ \text{sur } K_N = \{u = (u_i) : u_i \geq g_i, \forall i\} \end{array} \right) \tag{4}$$

2. Préciser alors les quantités : J, K, φ_i, $i = 1, \ldots, p$, et p du problème (1) dans ce cas.

Méthode du gradient projeté à pas fixe

On rappelle l'algorithme du gradient projeté à pas fixe pour minimiser une fonctionnelle $J : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sur un ensemble K, pour un point de départ u^0, un pas ρ et un test d'arrêt ε préalablement définis :

Algorithme 1 (Algorithme du gradient projeté à pas fixe)

1: Initialiser le résidu r^0 à 1 et le compteur k à 0.
2: Tant que le résidu est plus grand que ε et que le compteur n'est pas trop grand :
3: Calculer la descente $d^k = -\nabla J\left(u^k\right)$,
4: Poser $u^{k+1} = P_K\left(u^k + \rho d^k\right)$, où P_K désigne la projection sur K,
5: Calculer le résidu $r^{k+1} = \left\|u^{k+1} - u^k\right\|$,
6: Poser $k := k + 1$ et aller à l'étape 2.

1. Montrer que la projection sur K_N est donnée par :
$$P_{K_N}(u) = \left(\max\left(u_i, g_i\right)\right)_{i=1,\ldots,N}.$$
2. Écrire une fonction **`projK.m`** qui prend en argument un point u et $g_N = \left(g\left(x_i\right)\right)_{i=1,\ldots,N}$, et qui renvoie $P_{K_N}(u)$.
3. Écrire une fonction **`gradient_projete.m`** qui prend en argument A_N, f_N, $g_N = \left(g\left(x_i\right)\right)_{i=1,\ldots,N}$, un point de départ u^0, un pas ρ et un test d'arrêt ε, et qui renvoie le vecteur u_N qui minimise J_N sur K_N ainsi que le nombre d'itérations effectuées. Créer un script **`scriptTP1_fixe.m`**. On prendra $f = 1$, $g(x) = \max\left(1.5 - 20\left(x - 0.6\right)^2, 0\right)$.
4. Pour le cas $N = 2$:
   (a) Tracer sur une même figure les courbes de niveaux de J_2 ainsi que le champ de vecteurs ∇J_2 sur le pavé $[-10, 10] \times [-10, 10]$. On utilisera les fonctions Matlab **`contour`** et **`quiver`**.
   (b) Calculer les itérations $u^k = \left(u_1^k, u_2^k\right)$ données par l'algorithme de gradient projeté à pas fixe.
   (c) Tracer sur la même figure que précédemment la ligne qui relie les u^k. On prendra $u^0 = (8, 4)$, $\rho = 0.1$ et $\varepsilon = 10^{-5}$.
5. Pour le cas N quelconque :
   (a) Pour $N = 2, 5, 20, 50, 100$, afficher à l'aide de la fonction **`fprintf`** le nombre d'itérations ainsi que le temps de calcul pour chaque N.
   (b) Tracer sur une même figure les solutions approchées u_N, ainsi que le graphe de la fonction g. On prendra $\rho = 0.1$ et $\varepsilon = 10^{-5}$.
   (c) Reprendre l'expérience précédente pour $\rho = 0.5$, puis $\rho = 1$. Que constate-t-on ? Peut-on choisir le pas ρ arbitrairement ?
6. Reprendre les questions 4. et 5. avec ρ optimal c'est-à-dire
$$\rho = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_N},$$
où λ_1 et λ_N sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de A_N.
7. Reprendre la question 6. pour $f(x) = \pi^2 \sin(\pi x)$.