Chapitre III

Les écoulements des fluides réels dans les conduites en charge

Cours 1 : Les lois de conservation

Objectifs spécifiques :

Au terme de ce cours l'étudiant doit être capable :

1. D'appliquer le théorème de Bernoulli pour un écoulement permanent d'un fluide réel incompressible avec ou sans échange d'énergie.
2. Une application directe du théorème d'Euler est l'évaluation des forces exercées par les jets d'eau. Et sont exploitées dans divers domaines.

Introduction :

L'écoulement d'un fluide réel est plus complexe que celui d'un fluide idéal. En effet, il existe des forces de frottement, dues à la viscosité du fluide, qui s'exercent entre les particules de fluide et les parois, ainsi qu'entre les particules elles-mêmes. Pour résoudre un problème d'écoulement d'un fluide réel, on fait appel à des résultats expérimentaux, en particulier ceux de l'ingénieur et physicien britannique Osborne Reynolds.

Une méthode simplifiée de calcul des pertes de charge basée sur ces résultats expérimentaux est proposée. Elle est indispensable pour le dimensionnement des diverses installations hydrauliques (de pompage, de turbines, de machines hydrauliques et thermiques dans lesquelles est véhiculé un fluide réel…etc.)

III.1. Fluide Réel :

Pour un fluide en mouvement, il existe des forces de frottement, dues à la viscosité du fluide, qui s'exercent entre les particules de fluide et les parois, ainsi qu'entre les particules elles mêmes. Un fluide réel est un fluide dont le mouvement est soumis à des processus de dissipation d'énergie qui apparaissent avec celui-ci. Ces processus sont à lier aux frottements dus aux mouvements des molécules qui constituent le fluide et qui font perdre de l'énergie à celui –ci sous forme de chaleur.

- ✓ Dans l'hydraulique, on s'intéresse au fluide incompressible, lorsque la divergence de vitesse de l'écoulement est nulle.
- ✓ Dans le modèle réel d'un fluide, on ne néglige pas les forces de viscosité tangentielles qui s'opposent au glissement relatif de deux couches voisines du fluide.

III.2. Profil des vitesses :

Sous l'effet des forces d'interaction entre les molécules de fluide et des forces d'interaction entre les molécules de fluide et celles de la paroi, chaque molécule de fluide ne s'écoule pas à la même vitesse. On dit qu'il existe un profil des vitesses.

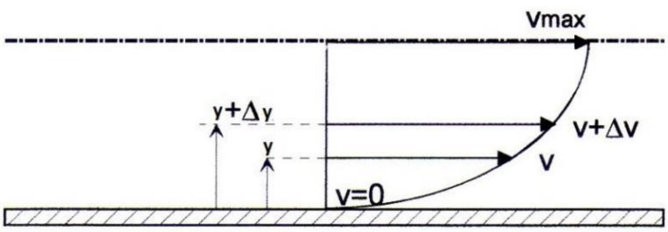


Figure III.1 : *Profile de vitesse*

Si on représente par un vecteur, la vitesse de chaque particule située dans une section droite perpendiculaire à l'écoulement d'ensemble, la courbe, lieu des extrémités de ces vecteurs représente le profil de vitesse. Le mouvement du fluide peut être considéré comme résultant du glissement des couches de fluide les unes sur les autres.

La vitesse de chaque couche est une fonction de la distance y de cette courbe au plan fixe : $v = v(y)$.

III.2.1. La vitesse moyenne :

La vitesse moyenne apparait comme la vitesse uniforme à travers la section S qui assure le même débit que la répartition réelle des vitesses.

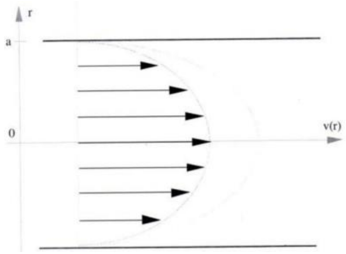


Figure III.2: *Profil de vitesse dans la section transversale d'une conduite.*

III.3. Les lois de conservation

III.3.1. Loi de conservation de matière (Equation de continuité)

Pour un écoulement permanent d'un fluide incompressible circule dans une conduite de section circulaire, il s'agit d'étudier le principe de conservation de la matière en présence des grandeurs moyennes de vitesse et de pression. Considérons un tube de lignes de courant d'un fluide de masse volumique ρ.

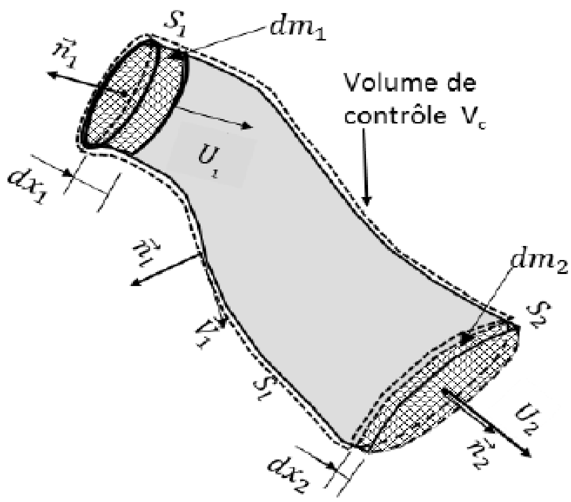


Figure III.3: *Tube de lignes de courant d'un fluide*

Voir la figure ci-dessus, la conservation de la masse d'un fluide incompressible : $dm_1 = dm_2$

Donc $\rho \cdot dV_1 = \rho \cdot dV_2$ ou encore $\rho \cdot S_1 \cdot dx_1 = \rho \cdot S_2 \cdot dx_2$

En divisant par dt :$\frac{\rho \cdot S_1 \cdot dx_1}{dt} = \frac{\rho \cdot S_2 \cdot dx_2}{dt} \Longrightarrow \rho \cdot S_1 \cdot U_1 = \rho \cdot S_2 \cdot U_2$

Nous pouvons aboutir à :

$$S_1 \cdot U_1 = S_2 \cdot U_2 \iff Q_1 = Q_2 \qquad (III.1)$$

III.3.2. Loi de conservation d'énergie (Equation de Bernoulli)

Considérons un écoulement entre deux volumes de contrôle (1) et (2) d'un fluide réel dans une conduite voir la figure ci-dessous, tel que entre les points (1) et (2) il n'y ait pas de machine hydraulique..

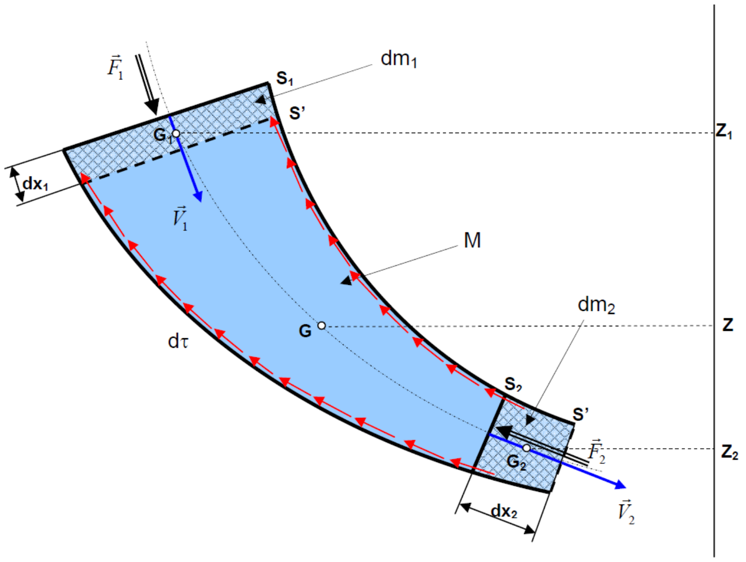


***Figure III.4**: Un écoulement entre deux points (1) et (2) d'un fluide réel dans une conduite*

Dans le cas d'un fluide réel et avec les hypothèses suivantes :

- Le fluide est réel et incompressible : cela suppose l'existence de forces élémentaire de frottement visqueux $d\tau$ qui contribue dans l'équation de bilan d'énergie et donner naissance à des pertes de charges.
- L'écoulement est permanent.
- On considère un écoulement peu perturbé avec une courbure faible des lignes de courant.

On considère un axe $\overrightarrow{Oz}$ vertical dirigé vers le haut. On désigne par, z_1 , z_2 et z respectivement les altitudes des centres de gravité des masses dm_1, dm_2 et M.

On désigne par $\mathbf{F_1}$ et $\mathbf{F_2}$ respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S_1 et S_2.

A l'instant t le fluide de masse (dm_1 + M) est compris entre S_1 et S_2. Son énergie mécanique est :

$$E_{mec} = E_{pot} + E_{cin}$$

$$E_{pot} + E_{cin} = (dm_1 \cdot gz_1 + M \cdot gz) + \frac{1}{2} dm_1 \cdot v_1^2 + \int_{S_1}^{S_2} \frac{dm \cdot v^2}{2}$$

A l'instant $t'=(t+dt)$ le fluide de masse (M+dm_2) est compris entre S'_1 et S'_2. Son énergie mécanique est :

$$E_{pot} + E_{cin} = (M \cdot gz + dm_2 \cdot gz_2) + \int_{S_1}^{S_2} \frac{dm \cdot v^2}{2} + \frac{1}{2} dm_2 \cdot v_2^2$$

On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t' : « La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures ». On prendra en considération cette fois ci le travail des forces de frottement visqueux $\boldsymbol{d\tau}$.

$$\Delta E_{mec} = E'_{mec} - E_{mec} = W_{Forces\ de\ pression} + \sum W_{\boldsymbol{d\tau}} = F_1 \cdot dx_1 - F_2 \cdot dx_2 + \sum W_{\boldsymbol{d\tau}}$$

$$\Leftrightarrow \Delta E_{mec} = P_1 \cdot S_1 \cdot dx_1 - P_2 \cdot S_2 \cdot dx_2 + \sum W_{\boldsymbol{d\tau}} = P_1 \cdot dV_1 - P_2 \cdot dV_2 + \sum W_{\boldsymbol{d\tau}}$$

En simplifiant on obtient :

$$dm_2 \cdot gz_2 + \frac{1}{2}dm_2 \cdot v_2^2 - dm_1 \cdot gz_1 - \frac{1}{2}dm_1 \cdot v_1^2 = P_1 \cdot \frac{dm_1}{\rho_1} - P_2 \cdot \frac{dV_2}{\rho_2} + \sum W_{\boldsymbol{d\tau}}$$

Par conservation de la masse : $dm_1 = dm_2 = dm$

Et puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

On aboutie à l'équation de ***Bernoulli*** (1700-1782):

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) = \frac{\sum W_{\boldsymbol{d\tau}}}{dm} \qquad (III.2)$$

On défini la perte de charge entre les points (1) et (2) par :$J_{1-2} = \frac{\sum W_{d\tau}}{dm}$ qui est la perte d'énergie par frottement visqueux par unité de masse qui passe.

$$(III.2) \Rightarrow \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) = J_{1-2} \quad (III.3)$$

L'unité de chaque terme de la relation (*III.3*) est le joule par kilogramme (J/kg) En divisant par g la relation (*III.3*) devient homogène à des longueurs en mètre :

$$\frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{J_{1-2}}{g} \qquad (III.4)$$

III.3.2.1.Charge hydraulique d'un écoulement

Donc, la charge hydraulique (H) fait référence à la quantité d'énergie cinétique et potentielle de pression et de différence d'altitude dans un écoulement.

$$H = \frac{v^2}{2g} + \frac{P}{\gamma} + z \qquad (III.5)$$

$$H = H_c + H_p$$

Le terme $H_c = \frac{v^2}{2g}$ est la charge cinétique ou la charge dynamique, le terme $H_p = \frac{P}{\gamma} + z$ est la charge statique ou la charge piézométrique.

, H_c , H_p: sont des hauteurs par mètre de colonne de fluide ($mc\ fluide$) [mcf].

D'une façon générale, la charge hydraulique moyenne d'un écoulement dans une conduite est donnée par la formule suivante :

$$H = \frac{1}{S}\iint \left(\frac{v^2}{2g} + \frac{P}{\gamma} + z\right) dS$$

Remarques :

- ✓ La vitesse v : vitesse instantanée en un point de l'écoulement de la section S, en [m/s].
- ✓ Le terme ($\frac{P}{\gamma} + z$) est constant dans la section transversale d'une conduite, la pression P et Z sont estimés au centre de gravité de la section transversale. Par contre le terme $\frac{v^2}{2g}$ varie.
- ✓ On préfère généralement travailler avec la vitesse moyenne U, du fluide à l'échelle de la conduite en hydraulique en charge. On a donc :

$$U^2 = \alpha v_{moy}^2 = \alpha \left(\frac{Q}{S}\right)^2$$

Où

- U : est grandeur pour le calcul hydraulique

- Le coefficient α (Coefficient de Coriolis) tient compte de la forme du profil de vitesse dans la section. Dans beaucoup d'application, ce coefficient est pris égal à 1, afin de simplifier les calculs. Les erreurs commises par le biais de cette approximation sont en réalité compensée par l'estimation de la perte de charge.

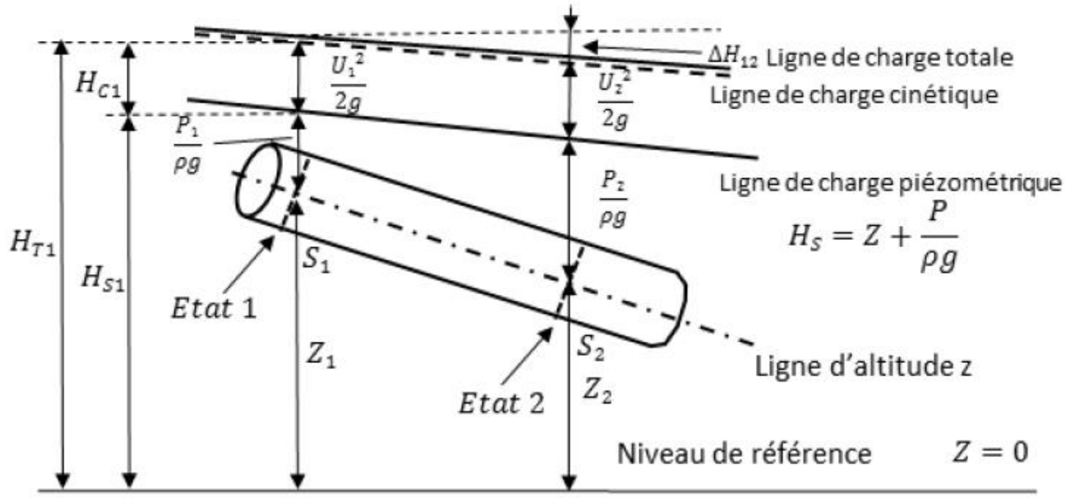


***Figure III.6**: Présentation des lignes de charge piézométrique et cinétique d'un fluide réel dans une conduite inclinée*

III.3.2.2. Théorème de Bernoulli généralisé: Ecoulements avec échange d'énergie :

Cas d'un écoulement avec échange d'énergie :

Lorsqu'un fluide s'écoule dans un système de conduites, il traverse des machines hydrauliques avec lesquelles il peut échanger de l'énergie :

- ✓ Les pompes donneront de la puissance mécanique au fluide ;
- ✓ Les turbines recevront de la part du fluide de l'énergie mécanique.

Si l'on note $\boldsymbol{P}$ la puissance échangée avec le fluide, l'équation de Bernoulli se généralise et on obtient :

$$P_1 + \rho g \cdot z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \frac{\mathrm{P}}{Q_V} = P_2 + \rho g \cdot z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad (III.6)$$

On a : $\boldsymbol{P} > 0$ pour les pompes et $\boldsymbol{P} < 0$ pour les turbines.

III.3.2.3. Application du théorème de Bernoulli :

L'équation de Bernoulli ont un intérêt pratique considérable du moment ou elles permettent de comprendre le principe de fonctionnement de beaucoup d'instruments de mesure de débits tels que le tube de Pitot, le tube de Venturi et le diaphragme…etc.

Réservées aux fluides incompressibles, ces lois et équations peuvent être employées dans certains cas particulier pour les fluides compressibles à faible variation de pression.

1) Formule de Torricelli (1608 - 1647)

Il s'agit d'un écoulement de vidange d'un réservoir à travers un orifice, voir la figure.

Un réservoir plein de section (S_1), la vitesse de vidange à travers un orifice de section (S_2) est très petite devant comparée à celle du réservoir (S_1). Nous appliquons le théorème de Bernoulli sur l'écoulement entre l'état (1) de la surface libre et l'état (2) de la section juste après la sortie du jet.

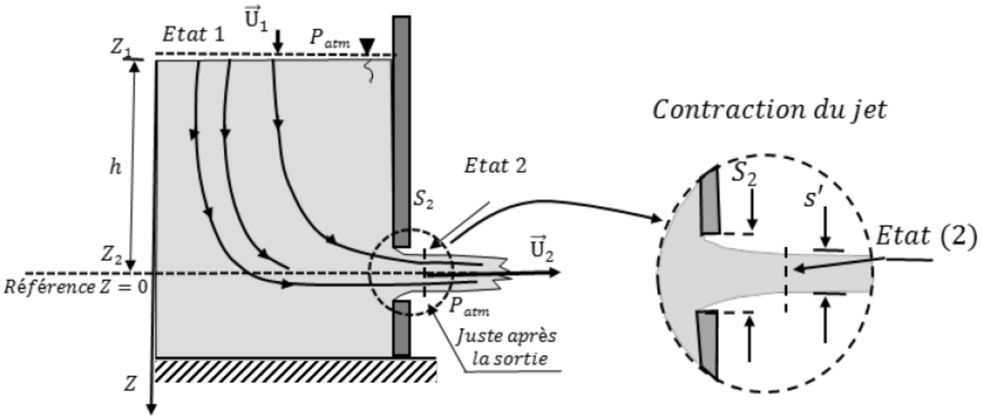


***Figure III.7**: Ecoulement de vidange d'un réservoir à travers un orifice*

Pour un fluide parfait

La relation de Bernoulli entre les sections S_1 et S_2, mène à écrire :

$$H_1 = H_2 + \Delta H_{12} \quad et\ \Delta H_{12} = 0$$

$$P_1 + \rho g \cdot z_1 + \frac{1}{2}\rho U_1^2 = P_2 + \rho g \cdot z_2 + \frac{1}{2}\rho U_2^2$$

La pression juste après la S_2 du jet est égale à la pression atmosphérique, et qui est également celle de la surface libre ($P_1 = P_{atm}$). Par conséquent $P_1 = P_2 = P_{atm}$

Le réservoir étant grand, la vitesse de descente du niveau de la surface libre peut être considérée comme négligeable devant celle du jet ; la surface libre est pratiquement au repos.

Suivant le principe de conservation de masse $Q_1 = Q_2 \Longrightarrow U_1. S_1 = U_2. S_2$ on a $U_1 \ll U_2$

Par conséquent :

$$\rho g(z_1 - z_2) = \frac{1}{2}\rho U_2^2 \Longrightarrow U_2 = \sqrt{2g(z_1 - z_2)}$$

D'où la formule théorique de Torricelli reliant la vitesse de sortie à la hauteur h de liquide au-dessus de l'orifice est :

$$U_2 = U_{th} = \sqrt{2gh}$$

En réalité à cause des frottements (solide/liquide), la vitesse est plus petite que la vitesse théorique. On écrit : $U_r = C_V U_{th}$:

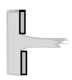
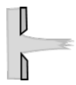
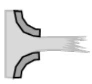
$$U_r = C_V\sqrt{2gh}$$

$$Q = C_C C_V\sqrt{2gh} = C_Q\sqrt{2gh} \qquad (III.7)$$

Avec : $C_C \approx \frac{Section\ juste\ avant\ la\ sortie}{Section\ juste\ aprés\ la\ sortie}$ est le coefficient de contraction, dépend de la géométrie de l'orifice. C_V est le coefficient de correction de vitesse par rapport à l'expérimental.

De manière générale, le coefficient de débit C_Q est déterminé expérimentalement. Dans le tableau III.1, vous trouvez quelques valeurs du coefficient .

Tableau III.1 : Coefficient de débit C_Q en fonction de la forme d'orifice.

Forme	Nomination	Valeur de C_Q
	Paroi mince	0.61
	Paroi mince aiguë	0.61
	Orifice à bords profilés	0.50
	Orifice à bords rentrants	1.00

1.1) Calcul du temps de vidange :

L'objet de cette note est de calculer le temps de vidange d'un réservoir ouvert, communiquant à l'atmosphère. Le fluide s'échappe à l'air libre par un orifice calibré.

A un instant t donné, on a :

$$Q = -\frac{dV}{dt} = C_Q \cdot S\sqrt{2gz}$$

$$dt = -\frac{dV}{C_Q \cdot S\sqrt{2gz}} = -\frac{S_R(z)dz}{C_Q \cdot S\sqrt{2gz}}$$

Si le réservoir est de section constante : $S_R(z) = S_R$ et z : variable de niveau d'eau dans le réservoir tel que : $z \in [H_0\ ,\ h]$ avec H_0 la hauteur initiale de l'eau dans le réservoir et h : la hauteur voulue.

$$\int_0^T \boldsymbol{dt} = -\int_{H_0}^{h} \frac{S_R}{C_Q \cdot S\sqrt{2gz}} dz$$

$$\Leftrightarrow T = 2\frac{S_R}{C_Q \cdot S\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H_0} - \sqrt{h}\right) \qquad (III.8)$$

2) Tube de Pitot (Henry Pitot (1692-1771)

Un tube de Pitot, souvent simplement appelé 'Pitot' est l'appareil le plus couramment utilise pour faire des mesures de vitesse locale dans divers écoulements. Le principe est basé sur la mesure de la pression statique et de la pression dynamique en un point d'un écoulement.

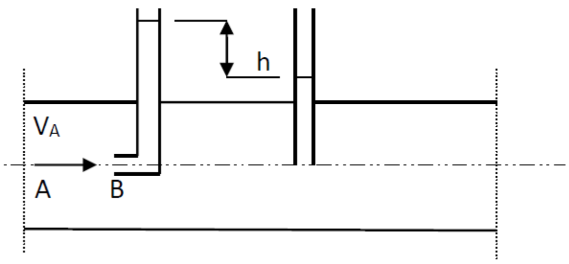


***Figure III.8**: Présentation de tube de Pitot*

On considère un écoulement et on plonge un tube de Pitot de telle sorte qu'il soit parallèle aux lignes de courant. A son embouchure, le fluide peut pénétrer. Une fois qu'il a occupé tout l'espace disponible au sein du tube, il n'ya plus de fluide qui entre et la vitesse au point B, embouchure du tube, est donc nulle. On l'appelle un point d'arrêt de la ligne de courant.

Considérons une ligne de courant A-B.

En point A, on a $P = P_A$ (par exemple une pression hydrostatique), $v = v_A$, et $z = z_A$

En point B, on a $P = P_B$, $v_B = 0$, et $z = z_A = z_B$

Le théorème de Bernoulli donne donc :

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B \Leftrightarrow (P_B - P_A) = \frac{1}{2}\rho v_A^2$$

Donc la vitesse locale du fluide est :

$$v = v_A = \sqrt{2\frac{(P_B - P_A)}{\rho}} \qquad (III.9)$$

De l'hydrostatique, on a : $(P_B - P_A) = \rho g h$, ce qui donne :

$$v = v_A = \sqrt{2gh}$$

3)Venturi-mètre (Venturi 1746-1822)

Le tube de Venturi est un tube horizontal qui présente un étranglement. Lors d'un écoulement stationnaire, la conservation du débit impose une augmentation de la vitesse au niveau de l'étranglement et la relation de Bernoulli impose une dépression au même niveau.

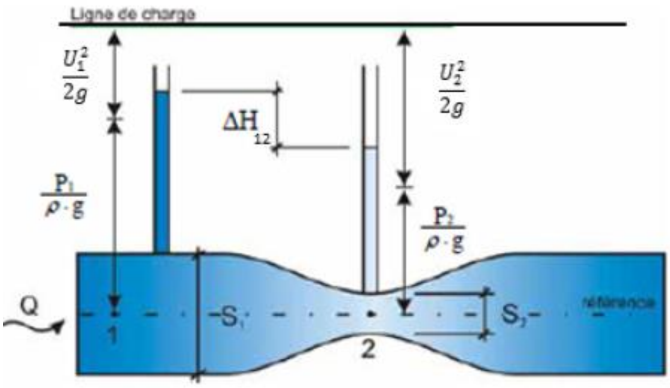


Figure III.9*: Présentation de tube de Venturi*

Entre les deux sections (1) et (2), l'application du théorème de Bernoulli pour un écoulement permanent et fluide parfait donne :

On a : $z_1 = z_2$

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{1}{2}\frac{U_1^2}{g} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{1}{2}\frac{U_2^2}{g} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(U_2^2 - U_1^2) = \frac{(P_1 - P_2)}{\rho} \qquad (III.10)$$

En autre, de l'équation de continuité donne : $U_1 . S_1 = U_2 . S_2 = Q$

En conséquence, $S_1 > S_2$, $\Rightarrow U_1 < U_2$ suivant le principe de conservation de masse et $U_1 < U_2 \Rightarrow P_1 > P_2$.

On cherche à déterminer l'expression de U_1 :

La conservation de débit s'écrit $U_1 . S_1 = U_2 . S_2 = Q \Longrightarrow \frac{U_1}{U_2} = \frac{S_2}{S_1}$

$$(III.10) \Longrightarrow \frac{U_1^2}{2}\left(\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2 - 1\right) = \frac{(P_1 - P_2)}{\rho} \Leftrightarrow \frac{U_1^2}{2}\left(\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right) = \frac{(P_1 - P_2)}{\rho}$$

Connaissant les caractéristiques du tube Venturi ($_1$ et S_2) , la mesure de la différence de pression$(P_1 - P_2)$ permet de déterminer le débit :

$$U_1 = \sqrt{2\frac{(P_1 - P_2)}{\rho\left(\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right)}} \quad et\ Q = S_1\sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho\left(\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right)}} \qquad (III.11)$$

En réalité, le débit réel sera légèrement différent du débit trouvé à partir de l'équation précédente. En effet, il y a toujours des frottements (dont on n'a pas tenu compte) qui engendrent une différence de pression plus importante.

Par conséquent, il est nécessaire d'étalonner cet appareil.

$$Q_{réel} = C \cdot S_1\sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho\left(\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right)}} \qquad (III.12)$$

C : Coefficient de correction obtenu par étalonnage du venturi.

4) Diaphragmes :

Le diaphragme est utilisé comme instrument de mesure de débit d'un fluide parcourant un circuit hydraulique. Il existe, pour un débit donné, une différence de hauteur dans les tubes avant et après le diaphragme.

L'étude consiste à établir une relation entre le débit d'eau Q traversant le diaphragme et la différence de hauteur d'eau h dans les tubes.

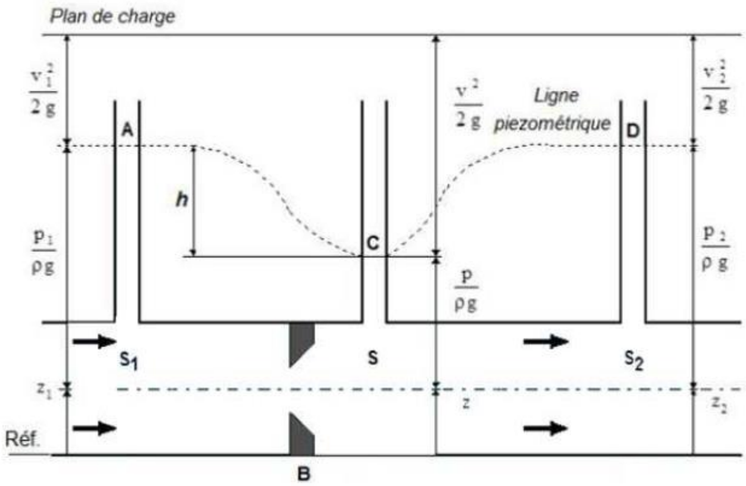


***Figure III.10**: Présentation d'un diaphragme*

De l'équation de continuité pour un fluide parfait incompressible, le débit du fluide est le même à travers toutes les sections des tubes.

On écrit :$Q = v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2 = v \cdot S$

D'où :$v_1 = v \cdot \frac{S}{S_1}$

On applique l'équation de Bernoulli exprimée en hauteur piézométrique entre les points A et C.

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{1}{2g} v_1^2 + z_1 = \frac{P}{\rho g} + \frac{1}{2g} v^2 + z$$

Le tube est horizontal, il vient donc : $z_1 = z_2 = z$

On obtient :$\frac{1}{\rho g}(P_1 - P) = \frac{1}{2g}(v^2 - v_1^2) = h$

Avec, h est la différence de hauteur dans les tubes avant et après le diaphragme.

La synthèse de l'équation de Bernoulli et de l'équation de continuité permet d'exprimer le débit théorique Q_{th} dans le diaphragme : $Q_{th} = v \cdot S$ et l'équation de Bernoulli est : $\frac{1}{2g}(v^2 - v_1^2) = h$

Soit : $(v^2 - v_1^2) = 2gh$

L'équation de continuité permet d'exprimer v_1 en fonction de v : $v_1 = v \cdot \frac{S}{S_1}$

On obtient : $v^2 \left(1 - \left(\frac{S}{S_1}\right)^2\right) = 2gh$

D'où : $v = \sqrt{\frac{2gh}{\left(1 - \left(\frac{S}{S_1}\right)^2\right)}}$

La relation du débit devient :

$$Q_{th} = \frac{S}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{S}{S_1}\right)^2\right)}} \sqrt{2gh}$$

La mesure n'a pas lieu en **B** où il se produit une contraction de la veine fluide, mais en **C**. Pour tenir compte de la section en C, il faut utiliser un coefficient de contraction *C*.

Le débit réel s'écrit finalement :

$$Q_{réel} = C \cdot \frac{S}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{S}{S_1}\right)^2\right)}}\sqrt{2gh} \qquad (III.13)$$

III.3.3. Loi de conservation des quantités de mouvement (Equation d'Euler)

III.3.31.Définition :

On appelle quantité de mouvement d'un point matériel de masse **m** se déplaçant suivant une trajectoire T, le produit $(m \cdot v)$ de la masse par la vitesse de déplacement.

La quantité de mouvement a la même direction que le vecteur dont elle est issue.

III.3.3.2.Théorème de l'impulsion :

Soit F la résultante des forces qui agissent sur un système de points matériels pendant les instants *t* et (*t* + *dt*); le principe fondamental de la dynamique conduit à:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

qui peut s'écrire sous forme d'accroissement:

$$\underbrace{\vec{F} \cdot \Delta t} = \underbrace{m\overrightarrow{\Delta v}}$$

$\underbrace{\vec{F} \cdot \Delta t}$: impulsion

$\underbrace{m\overrightarrow{\Delta v}}$: quantité de mouvement

Le produit de la force estimée constante par la durée du temps pendant lequel se poursuit son action s'appelle impulsion. Alors L'impulsion reçue par un élément matériel est égale au produit de sa masse par la variation de vitesse que subit cet élément pendant le temps Δt.

Le théorème d'Euler résulte de l'application du théorème de quantité de mouvement à l'écoulement d'un fluide :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \rho Q\left(\vec{U}_1 - \vec{U}_2\right) \qquad (III.14)$$

Où :

$\sum \vec{F}_{ext}$ est la résultante des actions mécaniques extérieures exercées sur un fluide isolé (fluide contenu dans l'enveloppe limitée par S_1 et S_2) est égale à la variation de la quantité de mouvement du fluide qui entre en S_1 à une vitesse U_1 et sort par S_2 à une vitesse U_2 .

Une application directe du théorème d'Euler est l'évaluation des forces exercées par les jets d'eau. Celles-ci sont exploitées dans divers domaines : production de l'énergie électrique à partir de l'énergie hydraulique grâce aux turbines, coupe des matériaux, etc.

Travaux Dirigés (N° 3)

Exercice 1 :
Un tuyau d'arrosage a un diamètre de 15 mm. II débite 0.5 ℓ d'eau par seconde à travers un orifice terminal de 0,5 cm^2 de surface.
Calculer la suppression de l'eau du robinet par rapport à la pression atmosphérique (l'eau est considérée ici comme un fluide parfait).

Solution
Considérons deux points A et B, à l'entrée et à la sortie du tuyau : soit l'équation de Bernoulli :

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B$$

Les points A et B ont le même niveau : $z_A = z_B \Longrightarrow P_A - P_B = \frac{\rho}{2}(v_B^2 - v_A^2)$

Soit l'équation de la conservation du volume :$Q = S_A v_A = S_B v_B \Longrightarrow v_A = \frac{Q}{S_A} \quad et \quad v_B = \frac{Q}{S_B}$

$$v_A = \frac{Q}{S_A} = \frac{0,5}{1,767 \cdot 10^{-1}} = 2,83 m/s \quad et \quad v_B = \frac{Q}{S_B} = \frac{0,5}{0,5 \cdot 10^{-1}} = 10 m/s$$

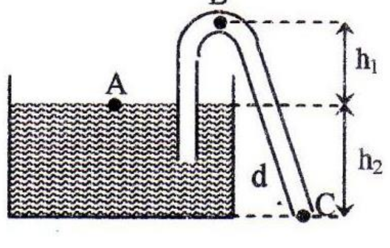
La suppression de l'eau du robinet par rapport à la pression atmosphérique :

$$\Delta P = P_A - P_B = P_A - P_{atm} = \frac{\rho}{2}(v_B^2 - v_A^2)$$

Donc :

$$\Delta P = \frac{10^3}{2}(10^2 - 2,83^2) = 4,6 \cdot 10^4 \ Pa$$

Exercice 2 :
Un réservoir muni d'un siphon de diamètre (*D* =60 mm). Si h_1 = 2 m et h_2 = 3.5 m. Déterminer la vitesse du liquide (eau) à la sortie du siphon, le débit et la pression absolue au point B.
En négligeant tous sorte de pertes de charge.



Solution
1) En appliquant le théorème de Bernoulli entre les points A et C :

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A = P_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2 + \rho g z_C$$

On a : $P_A = P_C = P_{atm}$ et $\frac{1}{2}\rho v_A^2 \approx 0 \Longrightarrow \frac{1}{2}\rho v_C^2 = \rho g (z_A - z_C)$

Donc : $v_C = \sqrt{2g(z_A - z_C)} = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 3,5} = 8,28 \ m/s$

$$v_C = 8,28 \ m/s$$

2) Le débit à la sortie du siphon : $Q = v_C \cdot S_C = 8{,}28\ \frac{\pi}{4} 0{,}06^2 = 23{,}41\ l/s$

3) La pression absolue au point B :

On a aussi l'équation de Bernoulli entre les points A et B :

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B$$

On a aussi : $v_B = v_C$ et $P_A = P_C = P_{atm}$

Alors : $P_B = P_A - \frac{1}{2}\rho v_C^2 - \rho g(z_B - z_A) = 1.0123 \cdot 10^5 - \frac{1}{2}10^3 \cdot 8{,}28^{\ 2} - 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 2$

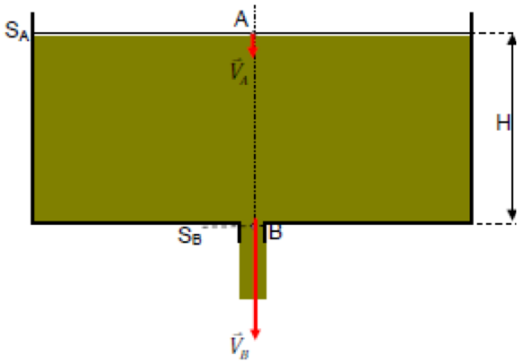
$$P_B = 4{,}73 \cdot 10^4\ Pa$$

<u>Exercice 3</u> :

Le réservoir cylindrique représenté ci-dessous, ouvert à l'air libre, a une section S_A de diamètre D_A=2 m. Il est muni, à sa base, d'un orifice de vidange de section S_B et de diamètre D_B =14 mm. Le réservoir est plein jusqu'à une hauteur H=2,5 m d'un liquide considéré comme fluide parfait, de masse volumique ρ =817 kg/m^3.

On donne : La pression atmosphérique P_{atm}= 1 bar = 10^5 Pa.

L'accélération de la pesanteur g = 9,81 m/s^2. On note α = (S_B / S_A).



On procède à la vidange du réservoir. Le liquide a une vitesse moyenne d'écoulement au point A notée v_A, et sa vitesse d'écoulement au niveau de l'orifice est notée v_B, .

1) Ecrire l'équation de continuité. En déduire v_A en fonction de v_B et α.

2) En appliquant le théorème de Bernoulli, établir l'expression littérale de la vitesse v_B en fonction de g, H et α.

3) Calculer la valeur de α.

4) Calculer v_B en considérant que le niveau de liquide varie lentement.

5) Déterminer le débit volumique Q du fluide qui s'écoule à travers l'orifice. (En litres par seconde)

6) Quelle serait la durée T de vidange si ce débit restait constant ?

Solution

1) L'équation de la quantique : $Q = v_A \cdot S_A = v_B \cdot S_B \Longrightarrow v_A = v_B (\frac{S_B}{S_A}) = \alpha \cdot v_B$

2) En appliquant le théorème de Bernoulli entre les sections A et B.

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B$$

On a $P_A = P_B = P_{atm}$ donc :

$$\frac{1}{2}\rho v_B^2 = \frac{1}{2}\rho \alpha^2 v_B^2 + \rho g(z_A - z_B) \Longrightarrow \frac{1}{2}(1-\alpha^2)v_B^2 = g(z_A - z_B)$$

Donc :

$$v_B = \sqrt{\frac{2gH}{(1-\alpha^2)}}$$

3) $\alpha = \left(\frac{S_B}{S_A}\right) = \left(\frac{D_B}{D_A}\right)^2 = \left(\frac{14}{2000}\right)^2 = 49 \cdot 10^{-6}$

4) En considérant que le niveau de liquide varie lentement : $v_A = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$

Donc :

$$v_B = \sqrt{\frac{2gH}{(1-0)}} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}5} = 7\ m/s$$

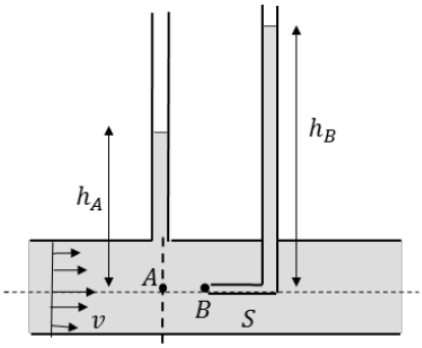
5) $Q = v_B \cdot S_B = 7 \cdot \frac{\pi}{4} 0{,}014^2 = 1{,}07\ \ell/s$

6) Le débit reste constant : $Q = \frac{V}{T} \Longrightarrow T = \frac{V}{Q} = \frac{S_A \cdot H}{Q} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 2{,}5}{4 \cdot 1{,}07 \cdot 10^{-3}} = 2h\ 2min$

<u>Exercice 4</u> :

On utilise un tube de Pitot pour mesurer la vitesse de l'eau au centre de la section transversale d'une conduite. La hauteur de pression au point d'arrêt (B) est de 5,58 m et la pression statique au point (A) est de 4,65 m. Quelle est la vitesse de l'eau ?

On néglige les pertes de charge entre les deux points A et B. Et l'écoulement permanent et uniforme.



Solution

Considérons une ligne de courant entre les points A et B.

Suivant l'équation de Bernoulli entre les points A et B, on a :

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B$$

$v_B = 0$ (point d'arrêt, section d'entrée du tube en équilibre statique)

$z_A = z_B \Longrightarrow P_B - P_A = \frac{\rho}{2}(v_A^2)$

D'où la vitesse instantanée est :$v_A = \sqrt{\frac{2}{\rho}(P_B - P_A)}$

Suivant la loi hydrostatique : $P_A = \rho g h_A$ et $P_B = \rho g h_B$

Donc : $v_A = \sqrt{2g(h_B - h_A)}$

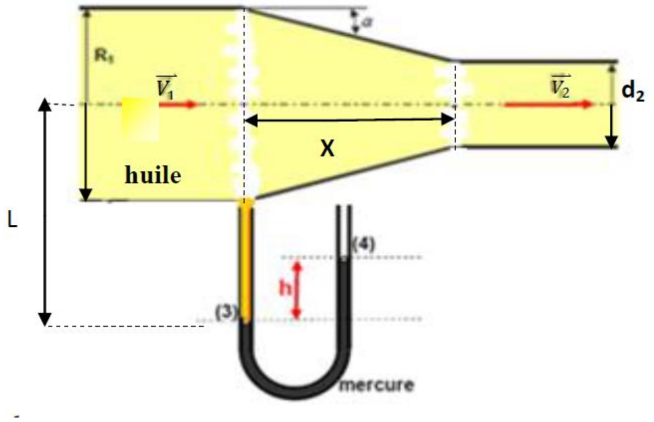
<u>Exercice 5</u> :

De l'huile supposée comme fluide parfait est accélérée à travers une buse horizontale en forme de cône convergent. La buse est équipée d'un manomètre en U qui contient du mercure.

A) <u>Etude de la buse</u> :

Un débit volumique Q= 0,4 ℓ/s, l'huile traverse la section S_1 de diamètre d_1= 10 mm à une vitesse d'écoulement v_1 et une pression P_1, sort vers l'atmosphère par la section S_2 de diamètre d_2 à une vitesse d'écoulement v_2 = 4. v_1 et une pression P_2 .

On donne la masse volumique de l'huile : ρ huile = 800 kg/m^3



1) Calculer la vitesse d'écoulement v_1. En déduire le diamètre d_2.
2) Calculer la longueur X. si l'angle de convergence α = 15°.
3) En appliquant le Théorème de Bernoulli, déterminer la pression P_1 .
B) <u>Etude du manomètre (tube en U)</u>
Le manomètre, tube en U, contient du mercure de masse volumique ρ Hg=13600 kg/m3.
On donne : L= 1274 mm, l'accélération de la pesanteur : g = 9,81 m/s^2.
Déterminer la dénivellation h du mercure.

Solution

A) Etude de la buse :

1) La vitesse : $v_1 = \frac{Q}{S_1} = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = \frac{4 \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-3}}{\pi 10^2 10^{-6}} = 5{,}09\ m/s$

On a : $v_2 = 4.\ v_1 \Leftrightarrow \frac{Q}{d_2^2} = 4\frac{Q}{d_1^2} \Leftrightarrow d_2^2 = \frac{1}{4}d_1^2 \Rightarrow d_2 = \frac{d_1}{2} = \frac{10}{2} = 5\ mm$

2) La longueur X : $\tan\alpha = \frac{1}{2}\frac{d_1 - d_2}{X} \Rightarrow X = \frac{d_1 - d_2}{2 \cdot \tan\alpha} = \frac{10-5}{2 \cdot \tan 15^0} = 9{,}33\ mm$

3) Appliquons l'équation de Bernoulli entre l'entrée et la sortie du buse :

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

On a $P_2 = P_{atm}$ et $z_1 = z_2$ donc :

$P_1 = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_1^2(16-1) = P_{atm} + \frac{15}{32}\rho v_2^2 = 10^5 + \frac{15}{2} \cdot 800(5{,}09)^2$

$$P_1 = 2{,}55 \cdot 10^5\ Pa$$

B) Etude du manomètre :

En appliquant la relation fondamentale de l'hydrostatique entre 1 et 3:

$$P_3 - P_1 = \rho_{huil} g L \Rightarrow P_3 = \rho_{huil} g L + P_1 = 800 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}274 + 2{,}55 \cdot 10^5$$
$$P_3 = 2{,}65 \cdot 10^5 Pa$$

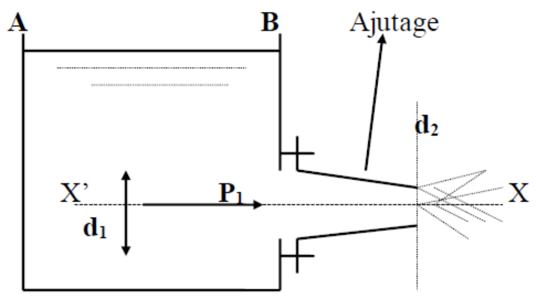
En appliquant la relation fondamentale de l'hydrostatique entre 3 et 4:

$$P_3 - P_4 = \rho_{Hg} g h \Rightarrow h = \frac{P_3 - P_4}{\rho_{Hg} g} = \frac{(2{,}65-1)10^5}{13600 \cdot 9{,}81} = 1236\ mm$$
$$h = 1236\ mm$$

<u>Exercice 6</u> :

Calculer la force qui agit sur la colonne de rivet sachant: la masse volumique du liquide ρ = 600 kg/m^3, d_1 = 100 mm, P_1 = 3 bars, d_2 = 20 mm, le coefficient de contraction C_C = 0,8, ΔH_T =0.

Solution



Le théorème de quantité de mouvement permet de déterminer quel va être l'effort exercé sur la colonne de rivet. On a:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \rho \cdot \alpha \cdot Q(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \qquad (1)$$

Avec : ρ masse volumique du fluide (kg/m3),

α Coefficient de quantité de mouvement pris égal à 1,

$\vec{V}_2$ vitesse finale du fluide (m/s),

$\vec{V}_1$ vitesse initiale du fluide (m/s),

Q: débit d'écoulement (m^3/s),

Si on projette l'équation (1) selon l'axe XX', confondu avec l'axe de l'ajutage on obtient:

$$\sum F_X = \rho \cdot Q(V_2 - V_1) \qquad (2)$$

Les forces qui agissent sur les parois sont transmises aux fixations :

$$\sum F_X = F_{P_1} - R_X = \rho \cdot Q(V_2 - V_1) \qquad (3)$$

Détermination de V_1, V_2 et Q :

Appliquons l'équation de Bernoulli entre les sections 1-1 et 2-2 :

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g z_2 + \Delta H_T$$

On a $P_2(relative) = 0, \Delta H_T = 0$ et $z_1 = z_2$ donc :

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = \frac{1}{2}\rho V_2^2 \qquad (4)$$

De l'équation de continuité: $Q = C^{ste}$

$Q = V_1 \cdot S_1 = V_2 \cdot S_C$ avec : $S_C = C_C \cdot S_2 \Longrightarrow V_1 = C_C \frac{S_2}{S_1} V_2$

L'équation (4) devient :

$$V_2^2 \frac{1}{2}\rho\left(1 - \left(C_C\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2\right)^2\right) = P_1$$

Donc la vitesse V_2 :

$$V_2 = \sqrt{\frac{2P_1}{\rho\left(1 - \left(C_C\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2\right)^2\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3 \cdot 10^5}{600\left(1 - \left(0{,}8\left(\frac{20}{100}\right)^2\right)^2\right)}} = 31{,}64\ m/s$$

Et la vitesse V_1 : $V_1 = C_C \frac{S_2}{S_1} V_2$

$$V_1 = C_C \frac{S_2}{S_1} V_2 = 0{,}8\left(\frac{20}{100}\right)^2 31{,}64 = 1{,}01\ m/s$$

Le débit $Q = V_1 \cdot S_1 = 1{,}01(\pi 0{,}1^2/4) = 7{,}93\ell/s$

Détermination de R_X :

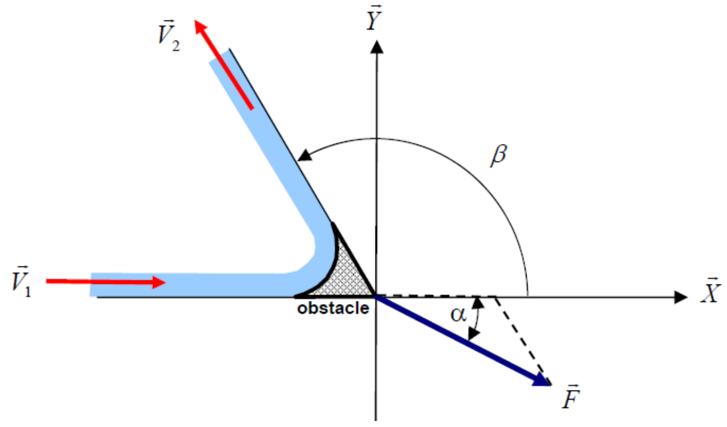
De l'équation (3) :

$$R_X = P_1 \cdot S_1 - \rho \cdot Q(V_2 - V_1) = 3 \cdot 10^5(\pi 0{,}1^2/4) - 600 \cdot 7{,}93 \cdot 10^{-3}(31{,}64 - 1{,}01) =$$

$$R_X = 2210{,}456N$$

<u>Exercice 7</u> :

La figure ci-dessous représente un jet d'eau horizontal qui frappe un obstacle à un débit massique Q_m=2 kg/s. L'obstacle provoque une déflexion du jet d'un angle β=120°.



On désigne par $\overrightarrow{V_1}$ la vitesse d'écoulement de l'eau en entrée de l'obstacle. Elle est portée par l'axe $\vec{X}$, $\overrightarrow{V_2}$ désigne la vitesse d'écoulement de l'eau en sortie de l'obstacle. Elle est portée par une direction inclinée de l'angle β =120° par rapport à l'axe $\vec{X}$. On admettra que: $V_1 = V_2 = 3\ m/s$

1) En appliquant le théorème d'Euler, donner l'expression vectorielle de la force F exercée par le liquide sur l'obstacle en fonction de Q_m, V_1 et V_2 ensuite calculer ses composantes F_x *et* F_y
2) Quel est son angle d'inclinaison α ?

Solution

1) L'expression vectorielle de la force F exercée par le liquide sur l'obstacle :

$$\vec{F} = Q_m(\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2}) = Q_m\|\overrightarrow{V_1}\| \cdot \left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix}\right]$$

$$\Rightarrow F_x = Q_m\|\overrightarrow{V_1}\|(1 - \cos\beta)$$

$$\Rightarrow F_y = Q_m\|\overrightarrow{V_1}\|(-\sin\beta)$$

A.N :

$$F_x = 2 \cdot 3\big(1 - (-0{,}5)\big) = 9N$$

$$F_y = 2 \cdot 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -5{,}19N$$

2) Angle d'inclinaison α :

$$\tan\alpha = \frac{F_y}{F_x} = \frac{5{,}19}{9} = -0{,}5773 \Rightarrow \alpha = 30^0$$

<u>Exercice 8</u> :