

## **Chapitre IV**

### **Les écoulements des fluides réels dans les conduites en charge**

#### **Cours 2 : Les régimes d'écoulement**

##### Objectifs

Au terme de ce chapitre l'étudiant doit être capable :

- D'évaluer le nombre de Reynolds ;
- D'identifier les différents régimes d'écoulement d'un fluide (laminaire, transitoire et turbulent) ;
- De calculer les pertes de charges singulières et linéaires ;
- D'appliquer le théorème de Bernoulli pour un écoulement permanent d'un fluide réel incompressible.

#### **II.1. Introduction :**

Dans le cours précédent nous avons supposé que le fluide était parfait pour appliquer l'équation de conservation de l'énergie. L'écoulement d'un fluide réel est plus complexe que celui d'un fluide idéal. En effet, il existe des forces de frottement, dues à la viscosité du fluide, qui s'exercent entre les particules de fluide et les parois, ainsi qu'entre les particules elles-mêmes. Ce ci les conséquences sont multiples, la première d'entre elles étant la difficulté de résolution de l'équation fondamentale de la dynamique (équation de Navier-Stokes). Dans cette raison pour résoudre un problème d'écoulement d'un fluide réel, on fait appel à des résultats expérimentaux, en particulier ceux de l'ingénieur et physicien britannique Osborne Reynolds.

Une méthode simplifiée de calcul des pertes de charge basée sur ces résultats expérimentaux est proposée. Elle est indispensable pour le dimensionnement des diverses installations hydrauliques (de pompage, de turbines, de machines hydrauliques et thermiques dans lesquelles est véhiculé un fluide réel...etc.)

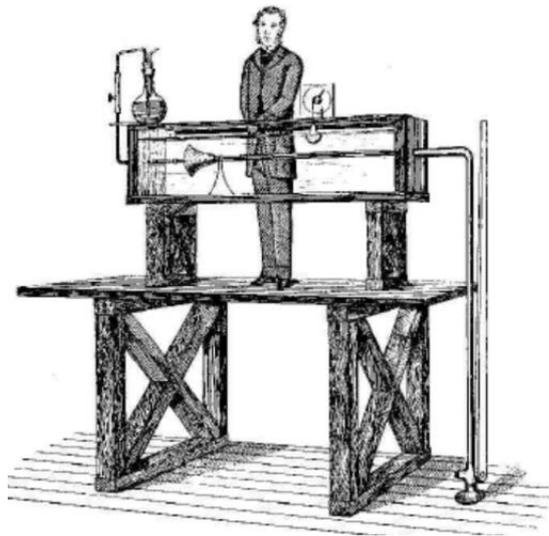
#### **II.2. Les régimes d'écoulement**

##### **II.2.1. Expérience d'Osborne Reynolds (1842-1912) :**



*Photo IV.1 : Osborne Reynolds*

La figure ci-dessous montre le montage expérimental qui comprend un réservoir de liquide s'ouvrant sur une conduite cylindrique. Un tube mince permet l'injection de colorant. Lorsque l'écoulement est laminaire, le filet de colorant reste mince, régulier et parallèle à la paroi du cylindre. En écoulement turbulent, le colorant est rapidement dispersé. Dans cette situation, une mesure de la composante de vitesse axiale montre qu'elle fluctue de manière aléatoire.



**Figure IV.1:** Présentation d'un Montage de l'expérience Reynolds

Reynolds a réalisé une étude systématique du régime d'écoulement en fonction de différents paramètres intervenant dans le régime d'écoulement : vitesse d'écoulement, viscosité, diamètre. Il a mis en évidence deux catégories d'écoulement pour un liquide réel : un régime laminaire et un autre turbulent, avec un régime de transition entre les deux régimes.

Reynolds a constaté à partir de ses travaux sur le liquide réel, qu'il existe deux forces :

- 1- La force d'inertie, qui dépend de la vitesse moyenne du liquide, du diamètre de la conduite et de la masse volumique du liquide.
- 2- La force de viscosité, qui est la viscosité dynamique du liquide.

Donc Reynolds a montré que le paramètre qui permettait de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent est un nombre sans dimension appelé nombre de *Reynolds*  $R_e$ . Il exprime le rapport entre la force d'inertie  $\rho U^2$  et la force visqueuse  $\mu \cdot \left(\frac{U}{D}\right)$ . Il est donné par la relation suivante :

$$R_e = \frac{\text{Force d'inertie}}{\text{Force visqueuse}} = \frac{\rho U^2}{\mu \frac{U}{D}} = \frac{U \cdot D}{\nu} \quad (IV.1)$$

$U$  : Vitesse moyenne d'écoulement en m/s

$D$  : Diamètre de la conduite en m ;

$\mu$  : Viscosité dynamique du fluide en  $Nm^{-2}s$  ;

$\nu$  : Viscosité cinématique du fluide en  $m^2/s$

- ✓ Si  $R_e < 2300$  : le régime d'écoulement est laminaire.
- ✓ Si  $R_e \approx 2300$  jusqu'à 4000 : zone de transitoire.
- ✓ Si  $R_e \gg 2300$  : l'écoulement est turbulent
- ✓ Les expériences classiques de Reynolds ont montré que le point de passage du régime laminaire au régime turbulent correspond à une vitesse caractéristique que Reynolds a appelé vitesse critique :

$$U_{cr} = \frac{R_{e\ cr}\nu}{D} \text{ tell que } R_{e\ cr} \approx 2300 \quad (IV.2)$$

Pour des vitesses  $U < U_{cr}$  le régime d'écoulement est laminaire ;

Pour des vitesses  $U > U_{cr}$  le régime d'écoulement est turbulent ;

Pour des vitesses  $U \approx U_{cr}$  le régime d'écoulement est critique.

- Si l'on mesure la composante de la vitesse selon x, son évolution au cours de temps nous indique que :
- Pour un écoulement laminaire et permanent, la vitesse en un point,  $U$  reste constante avec le temps.
  - Pour un écoulement turbulent, la vitesse en un point,  $U$  « vitesse instantanée », indique des fluctuations aléatoires de hautes fréquences

La figure ci-dessous illustre les différents régimes d'écoulement :

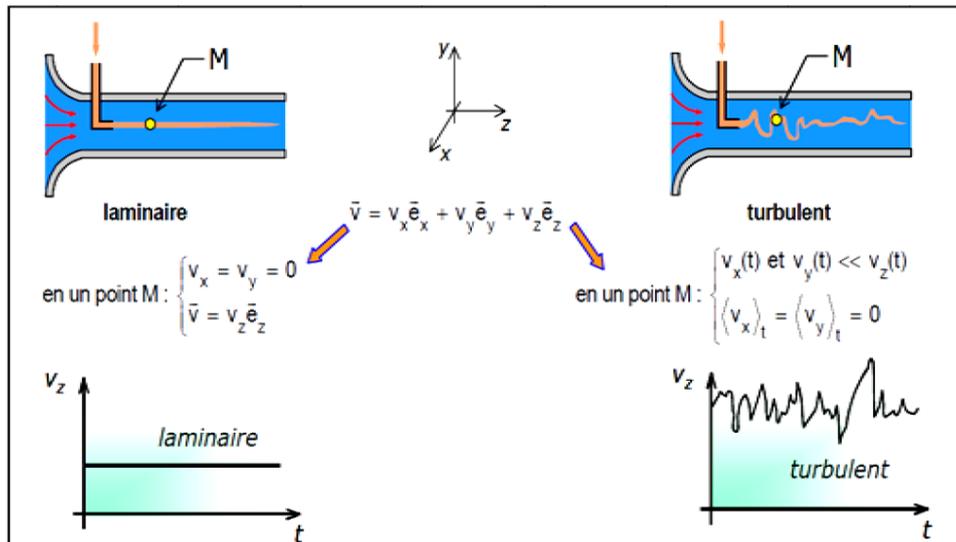


Figure IV.2: Présentation de différents régimes d'écoulement

**Remarque :**

Il faut noter que les valeurs numériques de nombre de Reynolds  $R_e$  correspondent à un écoulement uniforme. Pour un écoulement non uniforme, les conditions changent brusquement et pour un rétrécissement du canal, l'écoulement s'avère plus stable. Les parois convergentes rigides du canal produisent un effet stabilisateur, et le régime laminaire peut être conservé même pour des nombres de Reynolds supérieurs à 2300.

**Exemple :**

L'eau à 20 °C, s'écoule dans une conduite de 30 cm de diamètre à une vitesse de 2 m/s. Quel est le régime d'écoulement ?

On donne : à 20 °C :  $\mu = 9,8 \cdot 10^{-4} \text{ kg/ms}$  ,  $\rho = 997,4 \text{ kg/m}^3$

*Solution :*

Utilisant l'expression (IV.1)

$$R_e = \frac{\rho \cdot U \cdot D}{\mu} = \frac{997,4 \cdot 2 \cdot 0,3}{9,8 \cdot 10^{-4}} = 61 \cdot 10^4$$

$R_e = 61 \cdot 10^4 > 2300$  , donc le régime d'écoulement est turbulent.

**II.2.2. Écoulement à l'entrée des conduites :**

L'écoulement à l'entrée de conduite est illustré dans la figure suivante. Nous pouvons constater que l'écoulement est en développement près de la paroi due aux effets de cisaillement et d'accélération du fluide dans la région loin de la paroi. En conséquence le gradient de la distribution de pression dans la région de l'entrée est plus grand par rapport à celui de l'écoulement développé.

Au début de la conduite, la couche limite de liquide se développe et son épaisseur augmente au fur et à mesure jusqu'à complètement envahir la section de l'écoulement à la distance :  $L_e$  (longueur d'entrée)

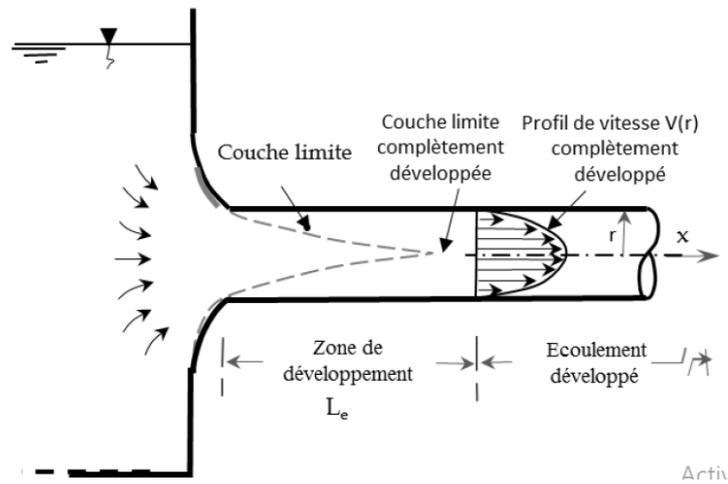


Figure IV.3: Présentation de l'écoulement à l'entrée des conduites

Après cette distance l'écoulement est devenu pleinement développé. Il existe des relations semi-empiriques liant cette distance au nombre de Reynolds de l'écoulement :

- ✓ Pour l'écoulement laminaire : la longueur de la région d'entrée de l'écoulement est donnée :

$$\frac{L_e}{D} \approx 0,0065R_e \quad (\text{Boussinesq Nikuradse})$$

- ✓ Et pour un écoulement turbulent ( $R_e > 4000$ ): la longueur d'établissement de l'écoulement développée :

$$\frac{L_e}{D} \approx 4,4R_e^{1/6} \quad (\text{Latzko})$$

$$\frac{L_e}{D} \approx 25 \text{ à } 40 \quad (\text{Nikuradse})$$

### II.2.3. Ecoulement des liquides visqueux : Ecoulement laminaire dans les conduites cylindriques : (Lois de Poiseuille).

#### Définition et description :

L'écoulement laminaire est également appelé écoulement simplifié ou écoulement visqueux. Dans la dynamique des fluides, l'écoulement laminaire est caractérisé par:

- 1) Les particules se déplacent selon des trajectoires ou des lignes de courant définies et observables ;
- 2) Le fluide s'écoule en couches parallèles sans interruption entre les couches ;
- 3) L'écoulement laminaire a tendance à se produire à des vitesses plus faibles et à une viscosité élevée ;
- 4) Une distribution de vitesse parabolique ;

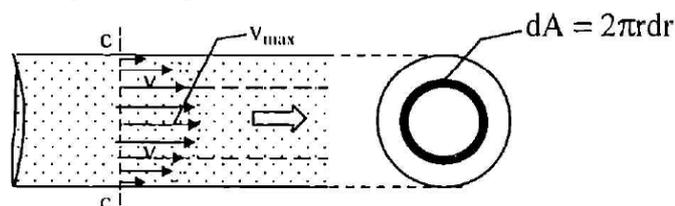
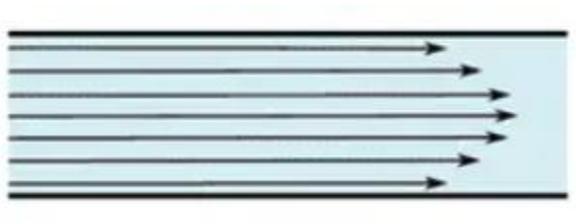


Figure IV.4: Répartition de vitesse le long d'une section droite d'écoulement

Dans une conduite en régime laminaire

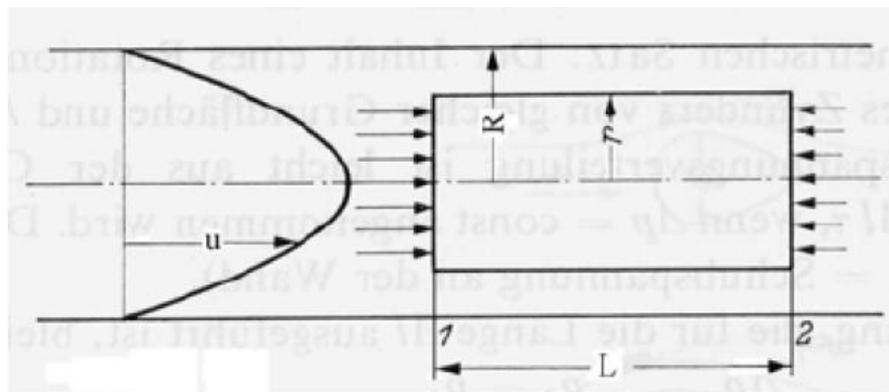
- 5) La vitesse d'écoulement moyenne correspond à environ la moitié de la vitesse maximale ;
- 6) L'écoulement laminaire se produit à n'importe quel nombre de Reynolds près des limites solides, appelée sous-couche laminaire et elle est très importante dans le transfert de chaleur.



**Figure IV.5:** Présentation de l'écoulement laminaire dans une conduite

Pour étudier ce régime on considère un écoulement stationnaire d'un fluide visqueux incompressible dans une conduite de section circulaire et rectiligne de rayon  $R$  et de longueur  $L \gg R$ . La conduite est horizontale, et l'écoulement est assuré grâce à l'existence d'une différence de pression  $\Delta p$  entre l'entrée du conduit et la sortie du conduit. On supposera que l'écoulement est laminaire. L'objet de ce cours est pour déterminer le profil de vitesse, la vitesse moyenne, le débit et la relation de coefficient de friction.

Nous allons écrire les forces agissant sur un élément cylindrique comme montré dans la figure ci-après :



**Figure IV.6:** Écoulement de Hagen-Poiseuille

Le fluide compris entre 0 et  $r$  subit sur une longueur  $L$  des forces de pressions à chaque extrémité du tube et la force de frottement sur la paroi latérale de surface  $S = 2\pi rL$  : On a donc à l'équilibre :

$$F = -S_L \cdot \tau(r) = -2\pi rL \cdot \mu \cdot \frac{du(r)}{dr} = (P_1 - P_2)\pi r^2 = \Delta P \pi r^2 \quad (IV.3)$$

Avec  $S_L = 2\pi rL$  (surface latérale) et  $S = \pi r^2$  (surface de base)

Et  $\tau(r)$  : est la contrainte de cisaillement locale

La relation (IV.3) permet à écrire :

$$\frac{du(r)}{dr} = -\frac{1}{2\mu} \left( \frac{\Delta P}{L} \right) r \Rightarrow du(r) = -\frac{1}{2\mu} \left( \frac{\Delta P}{L} \right) r dr$$

Nous pouvons l'intégrer de  $r = 0$  à  $r$  :

$$\Leftrightarrow u(r) = -\frac{1}{4\mu} \left( \frac{\Delta P}{L} \right) r^2 + C$$

Et on détermine la constante d'intégration en utilisant la condition de  $u = 0$  pour  $r = R$  (sur la paroi)

$$\Rightarrow C = \frac{1}{4\mu} \left( \frac{\Delta P}{L} \right) R^2$$

Nous obtenons alors le profil de vitesse :

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \left( \frac{\Delta P}{L} \right) (R^2 - r^2) \quad (IV.4)$$

✓ On obtient un profil de vitesse parabolique, la vitesse est maximale sur l'axe:

$$u_{max}(r = 0) = \frac{1}{4\mu} \left( \frac{\Delta P}{L} \right) R^2 \quad (IV.5)$$

✓ Et elle est nulle sur les parois  $u(r = R) = 0$ .

✓ Ainsi nous pouvons obtenir le profil de vitesse sans dimension :

$$\frac{u(r)}{u_{max}} = 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \quad (IV.6)$$

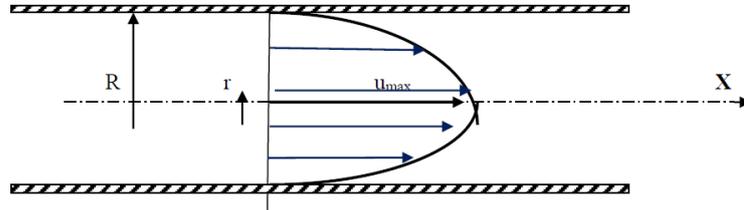


Figure IV.7: Répartition des vitesses à écoulement laminaire dans la conduite

### II.2.3.1. Expression de débit et de la vitesse moyenne :

1) La formule de Poiseuille relie le débit volumique avec la différence de pression imposée :

$$Q = \iint \vec{u} \cdot dS\vec{n} = \int_0^R u(r) 2\pi r dr = \frac{2\pi}{4\mu} \left( \frac{\Delta P}{L} \right) \int_0^R (R^2 - r^2) r dr$$

$$Q = \frac{\pi}{2\mu} \left( \frac{\Delta P}{L} \right) \left[ \frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi}{8\mu} \left( \frac{\Delta P}{L} \right) R^4$$

$$\Rightarrow Q = \frac{\pi}{8\mu} \left( \frac{\Delta P}{L} \right) R^4 \quad (IV.7)$$

2) La vitesse moyenne :

On a l'expression du débit :  $Q = u_{moy} S \Rightarrow u_{moy} = Q/S$  avec  $S = \pi R^2$

$$u_{moy} = \frac{1}{8\mu} \left( \frac{\Delta P}{L} \right) R^2 \quad (IV.8)$$

3) Selon les relations (IV.5) et (IV.8) on déduit le résultat suivant :

$$u_{moy} = \frac{1}{2} u_{max} \quad (IV.9)$$

4) En appliquant le principe de la loi de Poiseuille :

➤ La surpression dans la canalisation est :

$$\Delta P = \frac{8\mu L}{\pi R^4} Q \quad (IV.10)$$

➤ La chute pression par unité de longueur en fonction de la vitesse moyenne :

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{8\mu}{R^2} u_{moy} \quad (IV.11)$$

En posant :  $R_M = \frac{8\mu L}{\pi R^4}$  qui représente la résistance à l'écoulement :

$$\Delta P = R_M Q \quad (IV.12)$$

La signification physique de  $\Delta P$  est la perte de charge entre les extrémités d'une canalisation horizontale, traversée par un fluide visqueux de débit  $Q$ .

## II.2.4. Écoulement turbulent :

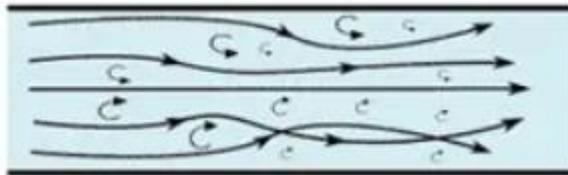
Une connaissance détaillée du comportement du régime d'écoulement turbulent est importante en génie, car la plupart des écoulements industriels, en particulier en hydraulique, sont turbulents.

### Définition et description :

En dynamique des fluides, l'écoulement turbulent est caractérisé par le mouvement irrégulier des particules (on peut dire chaotique) du fluide. Contrairement au flux laminaire, le fluide s'écoule avec des variations de vitesse brusques et aléatoires en chaque point, Il n'y a donc de régime permanent qu'au sens des vitesses moyennes, et non des vitesses instantanées qui sont totalement chaotique et génèrent du bruit.

L'écoulement turbulent est caractérisé par :

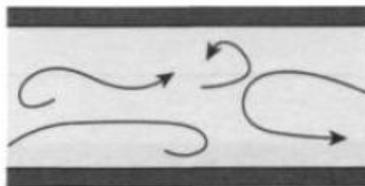
- 1) Un écoulement turbulent a tendance à se produire à des vitesses plus élevées, à une faible viscosité;
- 2) L'écoulement est caractérisé par le mouvement irrégulier des particules du fluide;
- 3) Le mouvement moyen est dans le sens de l'écoulement;
- 4) La vitesse d'écoulement moyenne est approximativement égale à la vitesse au centre du tuyau ;
- 5) Le profil de vitesse d'écoulement pour un écoulement turbulent est assez plat sur la section centrale d'un tuyau et tombe rapidement extrêmement près des parois.



*Figure IV.7: Présentation de l'écoulement turbulent dans une conduite*

### II.2.4.1. Notion de la turbulence :

En dynamique des fluides, la turbulence ou l'écoulement turbulent est un régime d'écoulement caractérisé par des changements chaotiques de pression et de vitesse d'écoulement, présentent des variations rapides et instantanées. Et les particules de fluide ne se déplacent plus sur des lignes de courant régulières, mais courbes instantanées, et forment des tourbillons. La turbulence est causée par l'excès d'énergie cinétique dans certaines parties de l'écoulement du fluide, l'énergie cinétique en excès venant contrecarrer l'effet d'amortissement apporté par la viscosité du fluide. Pour cette raison, les turbulences sont plus faciles à produire au sein de fluides à faible viscosité et inversement.



*Figure IV.8: Courbes instantanées forment des tourbillons dans une conduite*

### II.2.4.1. Profil de vitesse turbulente :

Le profil de vitesse dans un écoulement turbulent est plus plat dans la partie centrale du tuyau (c'est-à-dire dans le noyau turbulent) que dans un écoulement laminaire. La vitesse d'écoulement chute rapidement très près des murs. Ceci est dû à la diffusivité de l'écoulement turbulent.

Généralement, on distingue une zone de forte gradient de vitesse  $\left(\frac{du}{dz}\right)$  au voisinage de la paroi la « Couche limite », et on considère que la vitesse est quasi-uniforme sur la partie intérieure à l'écoulement.

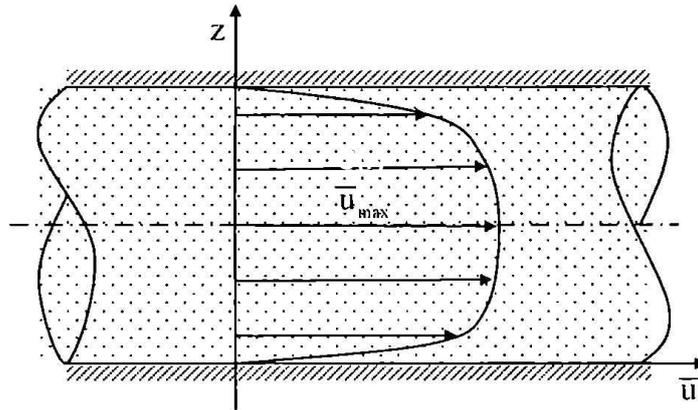


Figure IV.9 : Répartition de vitesse en régime turbulent dans une conduite

En cas d'écoulement turbulent dans la conduite, il existe de nombreux profils de vitesse empiriques. Le plus simple et le plus connu est le profil de vitesse loi de puissance :

$$\frac{\bar{u}}{u_{max}} = \left(\frac{z}{R}\right)^{1/n} \quad \text{ou bien} \quad \frac{\bar{u}}{u_{max}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n} \quad (IV.13)$$

Où l'exposant  $n$  est une constante relié empiriquement à  $f$  par :

$$n = f^{-1/2} \quad (IV.14)$$

La valeur de l'exposant  $n$  pour les conduites lisse sont regroupées dans le tableau suivant :

$R_e$	$4 \cdot 10^3$	$10^5$	$10^6$	$> 2 \cdot 10^6$
$n$	6	7	9	10

Le profil de la loi de puissance ne peut pas être utilisé pour estimer la contrainte de cisaillement de la paroi car il a une pente infinie pour toutes les valeurs de  $n$ . Il n'a pas non plus de pente nulle à l'axe du tuyau, il n'est donc pas valide près du ligne médiane. Il est utilisé pour estimer le flux d'énergie et le flux de quantité de mouvement des écoulements de conduite.

Notons enfin que le facteur de correction de l'énergie cinétique est de 1,03 pour  $n = 7$  ; donc, c'est souvent pris comme unité pour les écoulements turbulents.

#### II.2.4.2. La structure d'un écoulement turbulent :

L'analyse des écoulements turbulents à permis de mètre en évidence trois zones de couches près des parois : une zone interne, une zone de transition et une zone externe.

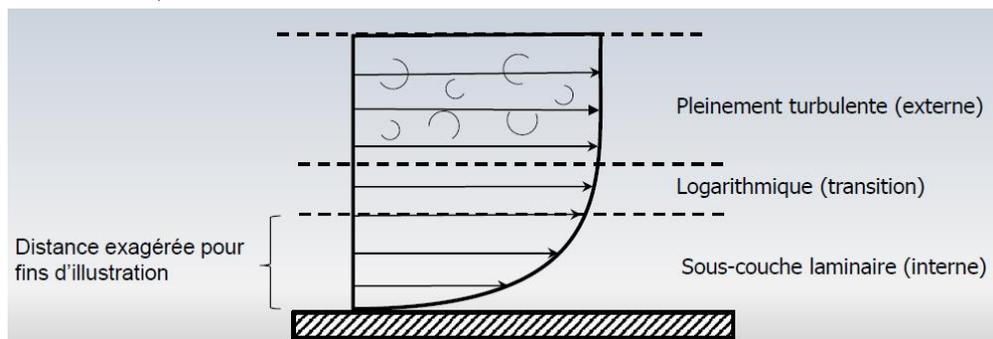
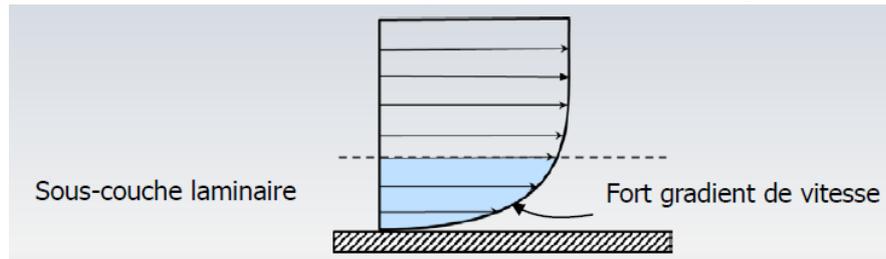
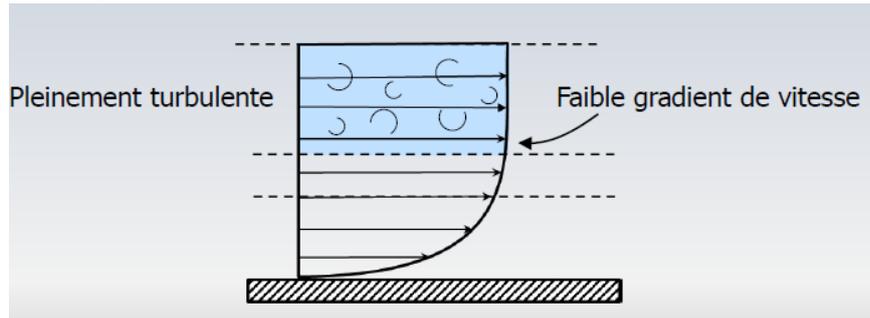


Figure IV.10 : Schéma simplifier de la structure d'écoulement turbulent

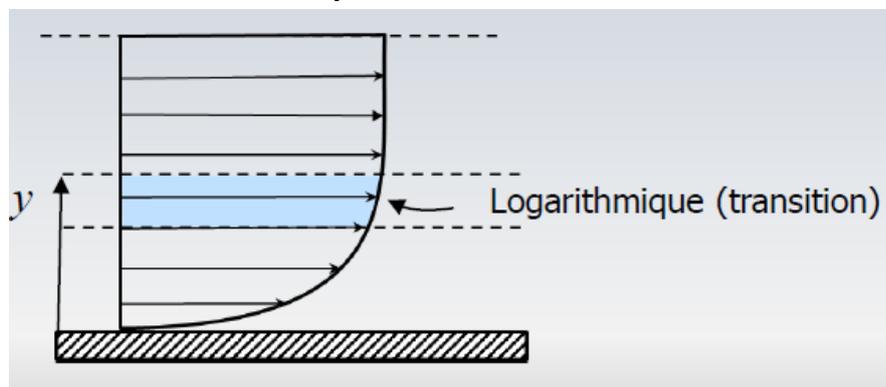
- 1) La couche la plus interne, valable très près de la paroi, est très fine et elle est appelée sous-couche visqueuse, ou sous-couche laminaire. Le profil de vitesse est quasi-linéaire et le gradient est fort. La viscosité moléculaire  $\mu$  est dominante et  $\tau$  est quasi-constant.



- 2) Dans la couche extérieure, appelée "pleinement turbulente", la viscosité turbulente  $\mu_t$ , joue un rôle majeur et le gradient de vitesse est faible.



- 3) La couche connue comme zone *logarithmique*, fait la jonction entre la périphérie et la partie centrale d'un écoulement. Dans cette région la viscosité turbulente  $\mu_t$  prend progressivement le dessus sur la viscosité moléculaire  $\mu$ .



### II.3. Coefficient de Friction (frottement) pour un écoulement Laminaire et Turbulent :

Nous allons définir un coefficient de friction, dit « le coefficient de friction de *Darcy-Weisbach* » pour l'écoulement dans les conduits droits comme :

$$f = \frac{\Delta P}{\frac{L}{2D} \rho U^2} \quad (IV.15)$$

Où  $\Delta P$  est la chute de pression due à la friction seulement. Sa dimension est en  $N/m^2$  ou Pa. Étant donné que  $(L/D)$  est sans dimension et que  $\rho U^2/2$  a la dimension de Pa, on a donc le coefficient de friction  $f$  sans dimension.

Nous pouvons écrire cette équation pour calculer la chute de pression :

$$\Delta P = f \frac{L}{D} \rho U^2 \quad (Pa) \quad (IV.16)$$

ou bien, en utilisant  $\Delta P = \rho g \Delta H$ , nous pouvons l'écrire pour la chute de pression en dimension de  $m$  de colonne de fluide :

$$\Delta H = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} \quad (m) \quad (IV.17)$$

**Note :**

Le coefficient de friction est défini pour l'écoulement laminaire ou turbulent, mais  $f$  doit être déterminé pour le régime de l'écoulement du problème.

### II.3.1. Coefficient de Friction pour un écoulement Laminaire :

La forme classique de Poiseuille :

On remplace l'expression de la chute de pression par unité de longueur,  $\left(\frac{\Delta P}{L}\right)$  de la relation (IV.11) dans la relation (IV.15), on obtient :

$$f = \frac{8\mu \cdot U}{R^2} \cdot \frac{4R}{\rho U^2} = \frac{32(\mu/\rho)}{R \cdot U} = \frac{64\nu}{D \cdot U} = \frac{64}{Re}$$

$$\Leftrightarrow f = \frac{64}{Re} \quad (IV.18)$$

#### II.3.1.1. La contrainte à la paroi pour un régime d'écoulement laminaire :

La relation (IV.3) mène à écrire :

$$-2\pi r L \cdot \mu \cdot \tau(r) = \Delta P \pi r^2 \Rightarrow \tau(r) = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\Delta P}{L}\right) r$$

Le signe (-) physiquement est le sens opposé du mouvement de fluide.

$$\tau(r = R) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\Delta P}{L}\right) R \quad (IV.19)$$

### II.4. Taux de Cisaillement pour Écoulement laminaire ou Turbulent :

Pour un écoulement dans une conduite, en utilisant le théorème de quantité de mouvement et la définition du coefficient de friction, nous pouvons déduire la relation entre le taux de cisaillement  $\tau$  et le coefficient de friction  $f$  comme suivant :

$$f = \frac{4\tau}{\frac{1}{2}\rho U^2} \quad (IV.19)$$

**Note :**

Cette relation est valable aussi bien pour l'écoulement laminaire que turbulent, mais le coefficient de friction doit être déterminé selon le régime de l'écoulement. La rugosité de la conduite intervient également.

### II.5. Estimation des pertes de charge :

Introduction : Dans la plupart des calculs hydrauliques, il est indispensable de connaître la variation de la charge hydraulique totale, d'un fluide qui s'écoule entre deux états l'état (1) et l'état (2), par le bilan d'application du théorème de Bernoulli suivant :

$$\frac{U_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + z_1 = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + z_2 + \Delta H_{12}$$

$\Delta H_{12}$  : Pertes de charge entre l'état (1) et l'état (2) en [ $mcfluide$ ].

Les pertes de charge  $\Delta H_{12}$  sont liées aux plusieurs grandeurs hydrauliques et géométriques. Elles dépendent au régime d'écoulement, à la géométrie et à la nature desurface intérieure  $D$ .

### II.5.1. Pertes de charge hydraulique :

Les pertes de charge par frottement sont produites dans la section transversale par l'interaction entre les volumes élémentaires de fluide en déplacement et les parois internes de son contenant (ex. conduite, accessoire, compteurs ...). De façon générale les pertes d'énergie sont causées par :

- 1) Frottement contre les surfaces internes,
- 2) Effet de la turbulence,
- 3) Action des forces de viscosité moléculaire,
- 4) Obstacles induisant un changement prononcé des lignes de courants.

Deux types de perte de charge existent linéaires et singuliers :

#### II.5.1.1. Perte de charge linéaire :

Elle est appelée aussi perte de charge régulière ( $\Delta H_l$ ) : due aux frottements du fluide contre la paroi intérieure d'une conduite rectiligne de longueur  $L$ . On définit la perte de charge linéaire :

$$\Delta H_l = f \frac{L}{D} \cdot \frac{U^2}{2g} \quad (IV.20)$$

$L$  : est la longueur de la conduite en (m) ;

$D$  : est le diamètre de la conduite en (m) ;

$U$  : est la vitesse moyenne de fluide (m/s) ;

$g$  : est l'accélération de la pesanteur ( $m/s^2$ ).

$f$  : est le coefficient de perte de charge linéaire. Il varie selon le régime d'écoulement.

Soit :  $f = F \left( R_e, \frac{\varepsilon}{D} \right)$ . Le coefficient de perte de charge linéaire dépend du nombre de Reynolds et de la rugosité relative de la conduite.

#### II.5.1.2. Pertes de charge singulières :

La présence d'une singularité sur l'écoulement dans une conduite comme un coude, un diaphragme, un élargissement brusque, une contraction ...etc.

Dans la pratique industrielle, cette perte de charge est écrite sous la forme :

$$\Delta H_{sing} = k \frac{U^2}{2g} \quad (IV.21)$$

Où  $U$  est la vitesse moyenne prise avant ou après la singularité,  $k$  est le coefficient de perte de charge singulière, et qui dépend de la géométrie et du nombre de Reynolds.

#### Remarque :

Quelques singularités typiques sont données aux étudiants au cours des travaux dirigés (TD).

### II.5.2. Notion de la rugosité :

La rugosité absolue représente l'épaisseur moyenne des aspérités de la surface du matériau constituant la conduite. On la note  $\varepsilon$  et on l'exprime en général en millimètres.



Figure IV.11 : Les aspérités de la surface intérieur d'une conduite

On définit la rugosité relative d'une conduite de diamètre D par le rapport  $\varepsilon/D$ . Pour calculer ce rapport, il faut veiller à exprimer les deux termes dans la même unité.

La rugosité ne joue aucun rôle dans les pertes des charges en écoulement Laminaire, mais décisive pour une certaine classe d'écoulement turbulents.

Généralement la rugosité est prise en compte de manière simplifiée, en considérant une valeur standard correspondant à un matériau et un état de surface.

**Exemple :**

Tuyau en acier laminé Neuf :  $\varepsilon = 0,05$  mm

Tuyau en acier soudé Neuf :  $(0,03 < \varepsilon < 0,1)$  mm

Tuyau en ciment Brut :  $(1 < \varepsilon < 3)$  mm

**Note :**

Lorsque que la taille des aspérités est inférieure à la hauteur de couche limite laminaire, elles n'ont plus d'effet sur le frottement, on dit alors que le tuyau est **lisse**. Dans le cas contraire, on a affaire à un tuyau **rugueux**.

On résume le calcul des pertes de charges par l'organigramme ci-dessous :

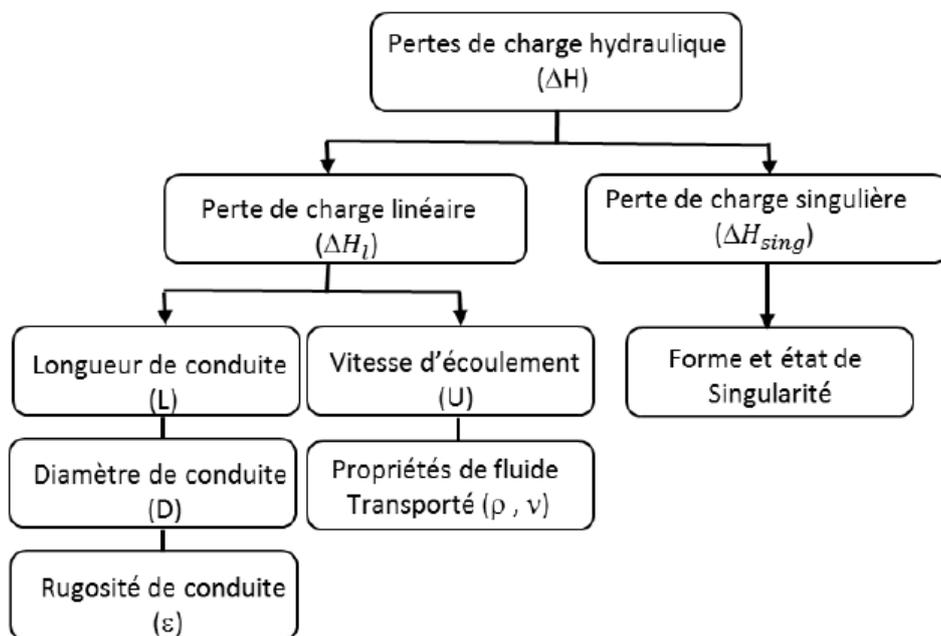


Figure IV.12 : L'organigramme de calcul des pertes de charges

**II.5.3. Détermination du coefficient de perte de charge linéaire (f) :**

Suivant l'importance de la rugosité et la turbulence de l'écoulement, on distingue deux comportements différents et on définit deux types de rugosité : lisse et rugueuse. Physiquement, cela peut être relié à l'épaisseur de la couche limite (voir partie II.6). Donc pour faire l'analyse de l'écoulement turbulent dans les conduits rectilignes avec section circulaire, des méthodes empirique et semi-empirique sont disponibles pour déterminer le coefficient de frottement f :

**1) Régime turbulent lisse :**

Le régime turbulent lisse est défini empiriquement par :

$$Re > 4000 \quad \text{et} \quad \frac{\varepsilon}{D} Re \sqrt{f} \leq 1$$

Dans cette zone, la turbulence est encore modérée. L'épaisseur de la sous-couche limite est suffisante pour englober toutes les aspérités de la conduite qui se comporte dès lors comme un tuyau lisse. Deux expressions empiriques sont souvent utilisées :

1.1) Formule de Blasius (1911):

$$f = (100R_e)^{-0.25} \quad \text{pour } R_e < 10^5 \quad (IV.22)$$

1.2) Formule ( implicite ) de Von Karman (1930) :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left( \frac{R_e \sqrt{f}}{2,51} \right) \quad \text{pour } R_e > 10^5 \text{ à } 10^6 \quad (IV.23)$$

## 2) Régime turbulent rugueux :

Le régime turbulent rugueux est défini empiriquement par :

$$R_e > 4000 \quad \text{et} \quad \frac{\varepsilon}{D} R_e \sqrt{f} \geq 200$$

La turbulence devient très importante et le coefficient de perte de charge ne dépend plus que de la rugosité. On utilise alors la formule de Nikuradse (1933) :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon}{3,71D} \right) \quad \text{pour } R_e > 10^5 \quad (IV.24)$$

## 3) Régime turbulent généralisé :

### 3.1) Formule de Colebrook-White (1939) :

C'est une formule généralisée empirique pour estimer le coefficient  $f$  dans les régimes turbulent (hydrauliquement lisse et rugueux) et transitoire :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon}{3,71D} + \frac{2,51}{R_e \sqrt{f}} \right) \quad (IV.25)$$

C'est une relation implicite qui représente assez bien les résultats expérimentaux obtenus par plusieurs chercheurs de Von Karman et Nikuradse, en utilisant différents fluides. Cette formule est considérée exacte sur l'ensemble des écoulements courants, pour les parois lisses et totalement rugueuses, pour  $10^4 < R_e < 10^8$ .

L'inconvénient de cette relation est le procédé itératif. Généralement on obtient la convergence après 3 ou 4 boucles.

A partir des années 1970, des nouvelles formules ont été proposées pour obtenir le coefficient de frottement . L'une des premières utilisés avec succès à été introduite par (Swamee-Jain, 1976), suivi par celle de (Haaland, 1983).

### 3.2) Formule de Swamee-Jain (1976) :

$$f = \left( -2 \log \left( \frac{\varepsilon}{3,71D} + \frac{5,74}{R_e^{0,9}} \right) \right)^{-2} \quad (IV.26)$$

Valable pour :  $5 \cdot 10^3 < R_e < 10^8$  et  $10^{-6} < \left( \frac{\varepsilon}{D} \right) < 0,05$

### 3.3) Formule de Haaland (1983) :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1,8 \log \left( \frac{6,9}{R_e} + \left( \frac{\varepsilon}{3,71D} \right)^{1,11n} \right) \quad (IV.27)$$

Cette relation pour  $n = 1$ , conduit à la formule de Colebrook-White avec une erreur maximale de l'ordre de 2%. Avec  $n=3$ , la formule donnerait selon certains auteurs, de meilleurs résultats que celle de Colebrook-White pour des conduites quasi-lisses de grands diamètres, c'est-à-dire pour des conduites dont la rugosité relative  $\left( \frac{\varepsilon}{D} \right)$  très faibles (Gazoduc par exemple).

### 3.4 Diagramme de Moody et Stanton (1944)

Le diagramme de *Moody* permet d'évaluer graphiquement le facteur de frottement  $f$  en fonction de la vitesse d'écoulement moyenne  $U$ , du diamètre  $D$  et de la rugosité  $\epsilon$  de la conduite et de la viscosité du fluide  $\nu$ . Ces quatre variables sont regroupées en deux nombres adimensionnels :

- La rugosité relative :  $\frac{\epsilon}{D}$
- Le nombre de Reynolds :  $Re = UD/\nu$

On détermine alors le régime d'écoulement. Si le régime est laminaire alors :  $f = 64/Re$

Si le régime est turbulent, on choisit le point d'intersection de la courbe correspondant au  $\frac{\epsilon}{D}$  de la conduite et au nombre de Reynolds. On projette ensuite ce point sur l'ordonnée de gauche du diagramme pour estimer  $f$ .

#### Exemple d'utilisation du diagramme :

le mode d'utilisation est indiqué sur l'abaque avec un exemple explicatif de ( $Re = 4 \cdot 10^4$ ,  $\epsilon/D = 0,01$ ) qui donne la valeur de  $f = 0,0387$

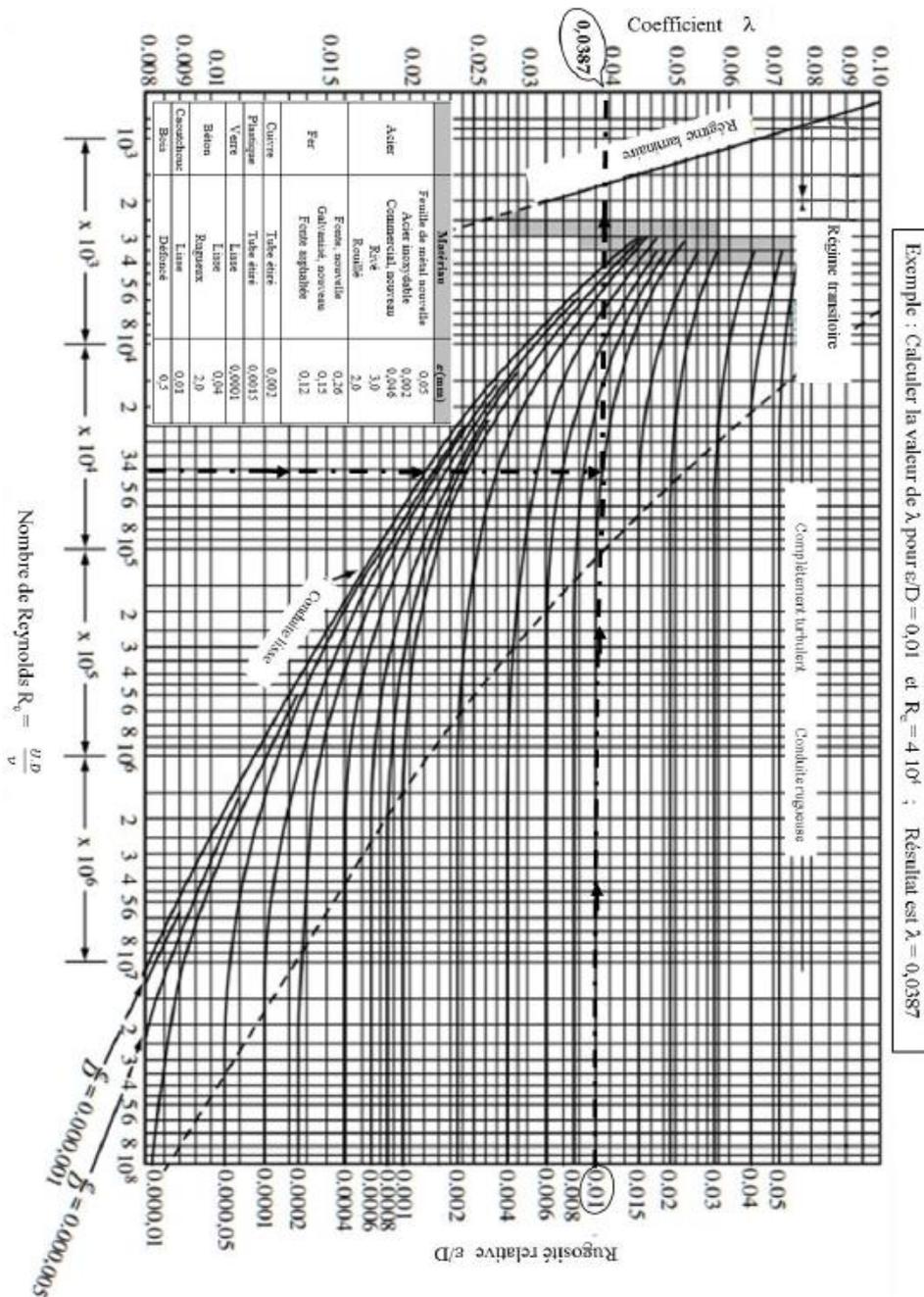


Figure IV.13 : Diagramme de Moody

### II.5.4. Perte de charge par frottement pour une conduite de section quelconque :

En basant sur la définition du rayon hydraulique  $R_h$  comme étant le rapport de l'aire de la section d'écoulement  $S$  sur le périmètre mouillé  $P$  :

$$R_h = \frac{S}{P}$$

Dans le cas d'une conduite circulaire :  $R_h = \frac{\pi D^2}{4} / \pi D = \frac{D}{4}$ , d'où  $D = 4R_h$ . En introduisant  $D$  dans l'expression (IV.20), on obtient une expression applicable à une conduite de section quelconque :

$$\Delta H_l = f \frac{L}{4R_h} \frac{U^2}{2g} = \frac{fL}{8gR_h} U^2 \quad (IV.28)$$

Ou encore en fonction du débit :

$$\Delta H_l = \frac{fL}{128\pi^2 g R_h^5} Q^2 \quad (IV.29)$$

### II.6. La notion de couche limite :

**Introduction :** En général, lorsqu'un fluide s'écoule sur une surface fixe, par exemple la plaque plate, le lit d'une rivière ou la paroi d'un tuyau, le fluide en contact avec la surface est amené à reposer par la contrainte de cisaillement sur la paroi. La région dans laquelle l'écoulement s'ajuste d'une vitesse nulle au mur à un maximum dans le flux principal de l'écoulement est appelée **couche limite**. Le concept de couche limite est important dans toute la dynamique des fluides visqueux.

#### II.6.1. Le concept de couche limite :

Le concept de couche limite a été introduit pour la première fois par un ingénieur allemand, Prandtl, en 1904. Selon la théorie de Prandtl, lorsqu'un fluide réel s'écoule sur une paroi solide fixe, l'écoulement est divisé en deux régions :

- i) Une couche mince au voisinage de la paroi solide où les forces visqueuses et la rotation ne peuvent être négligées.
- ii) Une région externe où les forces visqueuses sont très petites et peuvent être négligées.

Le comportement de l'écoulement est similaire à l'écoulement libre en amont.

Considérons un écoulement sur une plaque plane, comme illustré à la figure IV.14.

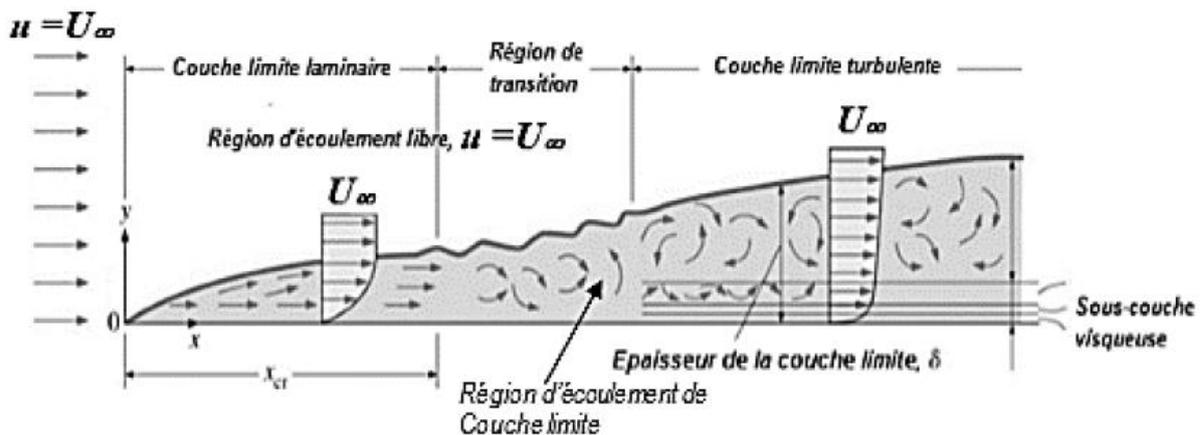


Figure IV.14 : Schéma d'écoulement de couche limite sur une plaque plane

La figure ci-dessous présente, les caractéristiques de base de toutes les couches limites laminaires et turbulentes sont présentées dans le flux en développement sur une plaque plate.

**Note :**

Les couches limites peuvent être laminaires ou turbulentes en fonction de la valeur du nombre de Reynolds.

La figure IV.14 montre que :

✓ *Pour les nombres de Reynolds faibles :*

La couche limite est laminaire et la vitesse dans le flux change uniformément à mesure que l'on s'éloigne du mur, comme indiqué à gauche de la figure.

✓ *Pour les nombres de Reynolds grands :*

À mesure que le nombre de Reynolds augmente (avec  $x$ ), l'écoulement devient instable, et la couche limite est turbulente et la vitesse en aval est caractérisée par des écoulements tourbillonnants instables (changeant dans le temps) à l'intérieur de la couche limite.

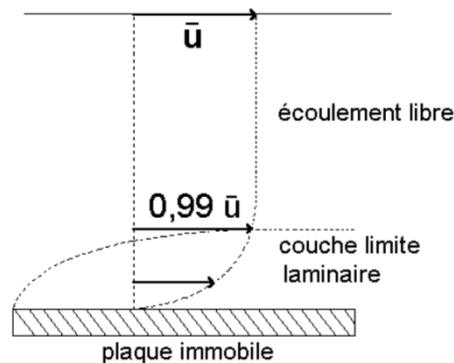
✓ *La transition de la couche limite laminaire à la couche turbulente :*

se produit lorsque le nombre de Reynolds à  $x$  dépasse  $Re_x \sim 500\,000$ . La transition peut se produire plus tôt, mais cela dépend surtout de la rugosité de la surface. La couche limite turbulente s'épaissit plus rapidement que la couche limite laminaire en raison de la contrainte de cisaillement accrue à la surface du corps.

✓ *La couche limite peut se détacher ou se «séparer» du corps :* créer une forme efficace très différente de la forme physique. Cela se produit car le flux dans la limite a une énergie très faible (par rapport au flux libre) et est plus facilement entraîné par les changements de pression.

### II.6.2. Épaisseur de la couche limite :

l'épaisseur de la couche limite est définie comme la distance entre le mur et le point où la vitesse est de 99% de la vitesse du «flux libre».



**Pour les couches limites laminaires :** sur une plaque plate, la solution de Blasius des équations régissant l'écoulement donne:

$$\delta \approx \frac{5,0}{\sqrt{Re_x}} x \quad (IV.30)$$

**Pour les couches limites turbulentes :**

$$\delta \approx \frac{0,37}{Re_x^{1/5}} x \quad (IV.31)$$

L'équation (IV.31), a été dérivée avec plusieurs hypothèses. La formule d'épaisseur de la couche limite turbulente suppose que l'écoulement est turbulent dès le début de la couche limite.

## Travaux Dirigés ( N° 4 )

### Exercice 1 :

L'huile de viscosité cinématique  $\nu = 6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$  s'écoule dans une conduite de 15 cm avec un débit volumique de 20  $\ell/\text{s}$ .

Quel est le régime d'écoulement ?

*Solution :*

Utilisant l'expression (IV.1)

$$R_e = \frac{U \cdot D}{\nu} = \frac{4Q D}{\pi D^2 \nu} = \frac{4Q}{\pi D \nu} = \frac{4 \cdot 0,02}{\pi \cdot 0,15 \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = 283$$

$R_e \ll 2300$ , donc le régime d'écoulement est laminaire.

### Exercice 2:

Déterminer la vitesse critique  $U_{cr}$  :

a) pour du fuel moyen à 15°C circulant dans une conduite de 15 cm de diamètre ;

b) pour de l'eau à 15°C circulant dans la même conduite.

La viscosité cinématique à 15°C est :  $\nu_{fuel} = 4,47 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  et  $\nu_{eau} = 1,142 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

*Solution :*

Pour l'écoulement laminaire, la valeur maximale du nombre de Reynolds est 2300.

a) pour du fuel à 15°C

$$2300 = R_e = \frac{U_{cr} D}{\nu_{fuel}} = U_{cr} \frac{0,15}{4,47 \cdot 10^{-6}}$$

D'où

$$U_{cr} = \frac{2300 \cdot 4,47 \cdot 10^{-6}}{0,15} = 0,068 \text{ m/s}$$

a) pour de l'eau à 15°C

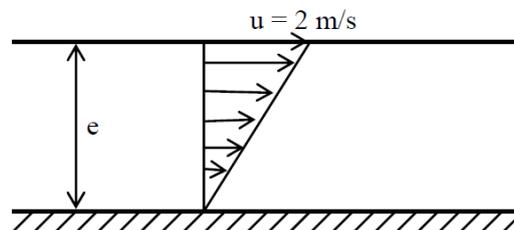
$$2300 = R_e = \frac{U_{cr} D}{\nu_{eau}} = U_{cr} \frac{0,15}{1,142 \cdot 10^{-6}}$$

D'où

$$U_{cr} = \frac{2300 \cdot 1,142 \cdot 10^{-6}}{0,15} = 0,0175 \text{ m/s}$$

### Exercice 3:

Un écoulement d'un liquide de viscosité dynamique  $\mu = 2 \cdot 10^{-2} \text{ N.s/m}^2$ , sur une plaque plane fixe, est caractérisé par le profil donné par le schéma ci-dessous :



Si l'épaisseur de l'écoulement est  $e = 5 \text{ cm}$ , déterminer la valeur de la contrainte de cisaillement :

- 1) à la paroi ?
- 2) à une distance de 2 cm de la paroi ?
- 3) à une distance  $e$  de la paroi ?

### Exercice 4:

Le profil de vitesse pour un écoulement plan d'un liquide, est donné par :  $V(y) = 3y^3 + 2y^2$

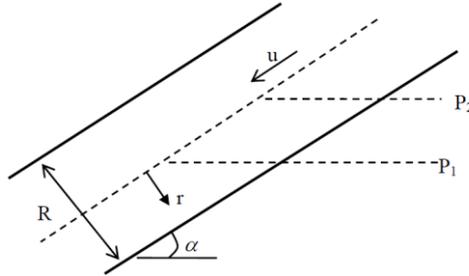
Si la viscosité dynamique du liquide est  $\mu = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ N.s/m}^2$ . Calculer la valeur de la tension de cisaillement à la paroi et à 30 cm de celle-ci ?

### Exercice 5:

Un écoulement de Poiseuille (régime laminaire) :

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \left( \frac{\Delta P}{\Delta L} \right) (R^2 - r^2),$$

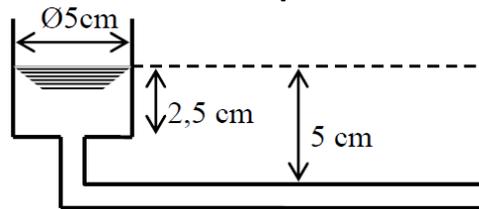
D'une huile dans un tube de 12 mm de diamètre, de longueur  $L$ , incliné d'un angle  $\alpha$  dont  $\sin \alpha = 0,0445$ . Si la répartition de la pression à l'intérieure est hydrostatique tout le long du tube, et le débit mesuré égal à 20 l/h, déterminer la viscosité cinématique de cette huile ?



### Exercice 6 :

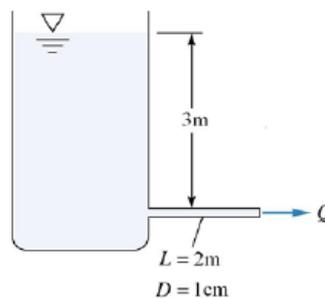
Un récipient cylindrique de 5 cm de diamètre, laisse écouler un liquide visqueux qu'il contient par un tube horizontal de diamètre 1 mm et de longueur 40 cm. Sachant qu'il a fallu 75 minutes pour que la charge en amont du tube passe de 5 à 2,5 cm, déterminer la viscosité cinématique du liquide (on négligera les effets dus aux extrémités du tube ; l'écoulement dans le tube est permanent de type Poiseuille :

$$Q_v = \frac{\pi}{128} \left( \frac{\Delta P}{\Delta L} \right) \frac{D^4}{\mu}$$



### Exercice 7 :

Nous avons un réservoir très grand que nous voulons vidanger par gravité. Calculez le débit pour le cas (1) le fluide incompressible, (2) l'écoulement est permanent, (3) le diamètre du réservoir est beaucoup plus grand que celui de la conduite (on négligera les effets dus aux extrémités du conduit).  $d = 0.9$  (densité) et  $\mu = 0.0328$  kg.m<sup>-1</sup>.s<sup>-1</sup>.



### Exercice 8 :

Déterminez la chute de pression dans une conduite horizontale de 300 m long et de 0.20 m de diamètre. La vitesse moyenne de l'eau est de 1.7 m/s, la densité de l'eau est de 999 kg/m<sup>3</sup>, sa viscosité cinématique est de 1.12E-6 m<sup>2</sup>/s et la rugosité absolue est de 0.26E-3 m.

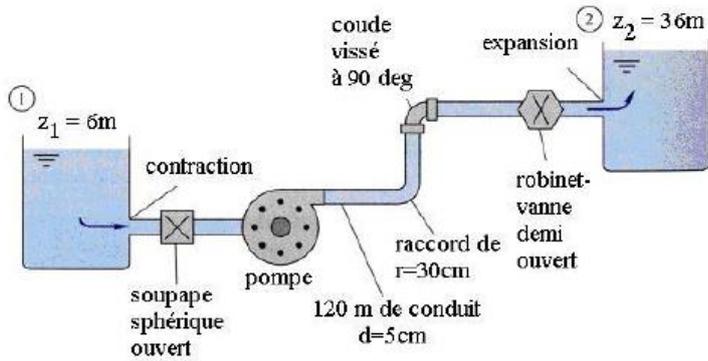
### Exercice 9 :

Une perte de charge de 500 kPa est mesurée sur 200 m d'une conduite horizontale en fonte de 8 cm de diamètre transportant de l'eau à 20 °C. Estimer le débit en utilisant :

(a) le diagramme de Moody ; (b) une autre relation.

**Exercice 10 :**

L'eau ( $\gamma = 9790 \text{ N/m}^3$ ,  $\nu = 1.005\text{E-}6 \text{ m}^2/\text{s}$ ) est pompée du réservoir 1 au réservoir 2 en utilisant un conduit de diamètre de 5cm et de longueur de 120 m comme montré sur la figure ci-dessous. Le débit est de  $0.006 \text{ m}^3/\text{s}$ . La rugosité relative est de  $\epsilon/D = 0.001$ . Calculez la puissance théorique de la pompe.



Nous pouvons à présent lister les coefficients de pertes mineures /singulières comme dans le tableau ci-dessous :

Accessoire	K
Contraction à l'entrée	0.5
Soupape sphérique ouverte	6.9
Raccord de r = 30 cm	0.15
Coude de 90°	0.95
Robinet-vanne demi-ouvert	2.7
Expansion à la sortie	1.0
<b>Total</b>	<b>12.2</b>

**Exercice 11 :**

L'écoulement dans le système montré à la figure suivante est achevé par l'air comprimé. Déterminez la pression manométrique  $P_1$  pour avoir un débit de  $Q = 60 \text{ m}^3/\text{s}$ . Les données :  $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu = 0.001 \text{ kg/m.s}$ ,  $K_E = 0.5$ ,  $K_S = 1$ ,  $K_{\text{COUDE}} = 0.15$

