Exercice 01 (05 pts)
Déduire de la formule de Green les formules suivantes

$$\int_\Omega D\varphi(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} \varphi(x)\cdot n(x)\,ds, \quad \int_\Omega \mathrm{div}\psi(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} \psi(x)\cdot n(x)\,ds$$

puis la formule de Stokes

$$\int_\Omega \mathrm{div}\psi(x)\cdot\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega \psi(x)\cdot D\varphi(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} \psi(x)\cdot n(x)\varphi(x)\,ds$$

où φ est une fonction scalaire de $\mathrm{C}^1(\overline{\Omega})$ et ψ une fonction à valeurs vectorielles de $\mathrm{C}^1(\overline{\Omega})$, à supports bornés dans le fermé $\overline{\Omega}$.

Exercice 02:(05 pts)
A l'aide de l'approche variationnelle démontrer l'existence et l'unicité de la solution de

$$(Pr)_{Dirichlet} \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = f, & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un ouvert quelconque de l'espace $\mathbb{R}^N$, et $f \in L^2(\Omega)$. Montrer en particulier que l'ajout d'un terme d'ordre zéro au Laplacien permet de ne pas avoir besoin de l'hypothèse que Ω est borné.

Exercice 03:(05 pts)
On considère le Laplacien avec condition aux limites de Neumann

$$(Pr)_{Neumann} \qquad \begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Soit u une fonction de $\mathrm{C}^2(\overline{\Omega})$. Montrer que u est une solution du problème aux limites $(Pr)_{Neumann}$ si et seulement si u appartient à $\mathrm{C}^1(\overline{\Omega})$ et vérifie l'égalité

$$\int_\Omega Du(x)\cdot Dv(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\cdot v(x)\,dx, \quad \text{pour toute fonction } v \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})$$

En déduire qu'une condition nécessaire d'existence d'une solution dans $\mathrm{C}^2(\overline{\Omega})$ de $(Pr)_{Neumann}$ est que $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx = 0$.

Exercice 04:(05 pts)
On considère l'équation des plaques

$$(Pr)_{plaques} \qquad \begin{cases} -\Delta(\Delta u) = f, & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On note F l'espace des fonctions v de $\mathrm{C}^2(\overline{\Omega})$ telles que v et $\frac{\partial u}{\partial n}$ s'annulent sur $\partial\Omega$. Soit u une fonction de $\mathrm{C}^4(\overline{\Omega})$. Montrer que u vérifie $(Pr)_{plaques}$ si et seulement si u appartient à F et

$$\int_\Omega \Delta u(x)\cdot\Delta v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\cdot v(x)\,dx, \quad \text{pour toute fonction } v \in F$$