Aucun document n'est autorisé pendant l'examen.

Exercice 01: Question de cours (04 pts)

1. Qu'est-ce qu'une équation aux dérivées partielles ?
2. Quelle est la différence entre un problème de Dirichlet et un problème de Neumann ?
3. Enoncer l'inégalité de Cauchy Schwartz, l'inégalité de Poincaré, et la formule de Green ?
4. Enoncer le théorème de Lax-Milgram ?

Exercice 02:(02 pts)
Soit $u \in H^1(\Omega)$. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes:

1. $u \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^\perp$ (Orthogonal de l'espace $H_0^1(\Omega)$)
2. $-\Delta u + u = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega)$

Exercice 03:(07 pts)
On considère le problème de Dirichlet suivant:

$$(Pr)_{Dirichlet} \qquad \begin{cases} -\Delta u + V \cdot \nabla u = f, & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in L^2(\Omega)$ et V est une fonction régulière à valeurs vectorielles telle que $\operatorname{div}(V) = 0$ dans Ω.

1. Donner la formulation variationnelle du problème $(Pr)_{Dirichlet}$?
2. Montrer l'existence de la solution faible u (Solution de la formulation variationnelle)?
3. Si la solution faible $u \in H^2(\Omega)$, montrer qu'elle vérifier le problème $(Pr)_{Dirichlet}$ dans un sens à préciser ?

Exercice 04:(07 pts)
Soit Ω un ouvert borné connexe régulier de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^N$. On considère le problème de Neumann suivant:

$$(Pr)_{Neumann} \qquad \begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in (H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))'$.

1. Donner la formulation variationnelle du problème $(Pr)_{Neumann}$?
2. Montrer l'existence de la solution faible u (Solution de la formulation variationnelle)?
3. Si la solution faible $u \in H^2(\Omega)$, montrer qu'elle vérifier le problème $(Pr)_{Neumann}$ dans un sens à préciser ?