Les suites réelles :

Table des matières

Objectifs

L'apprenant devient capable d'effectuer des opérations sur les suites et devient capable d'étudier les changements des suites et d'étudier leur convergence.

Introduction

En mathéatiques , une suite est une famille d'éléments indexées par les entiers naturels. Une suite finie est une famille indexée par les entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à un certain entier, ce dernier étant appelé longuerur de la suite.

Lorsque tous les éléments d'une suite appartiennent à un méme ensemble E, cette suite peut être assimilée à une application de N dans E. On note classiquement une suite (u_n).

Si $E \subseteq R$, alors la suite est dite réelle

«

Carte mentale

»

Pré- Test

I

Exercice

- Démontrer que la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{2-x}$ est croissante sur l'intervalle$]2, +\infty[$.
- Démontrer que la fonction g définie par$f(x) = 2 - x$ est négative et strictement décroissante sur cet intervalle$]2, +\infty[$.

Définitions

II

1. Objectif

Je dois être capable de :

- Connaître méthodes de calcul des suites réels.
- Étudier les changements de suites réels

Définition : Généralités

Soit E un ensembe

Soit K un intervalle de N , une suite d'éléments de E indexées par Kest une application

$u : K \to E \ : K \to u_k$

L'ensemble des suites d'élélements de E indexées par $Kest$noté E^k

Dans le cas ou $E = R$, on parle de suites à valeurs réelles ,ou suites réelles. Si $E = C$, on parle alors de suites complexes.

Pour$u = E^k$, l'ensemble des valeurs de la suite est $\{u_k, k \in K\}$

On dit qu'une suite est infinie si elle est indexée par un ensemble infini, $\{u_k, k \in K\}$. On dit qu'une suite est infini si elle est indexée par un ensemble infini. u_k est le terme de range k

2. Opération sur les suites.

Soient

- $u + v$ désigne la suite réelle w définie par$\forall n \in N, w_n = u_n + v_n$
- $u + v$ désigne la suite réelle h définie par$\forall n \in N, h_n = u_n \times v_n$
- désigne la suite réelle g définie par

Exemple

On prend les suites définies par :

$$u_n = \begin{cases} 0, nestpair, \\ 1 \quad , \quad sinon. \end{cases}$$

$$v_n = \begin{cases} 1, nestpair, \\ 0 \quad , \quad sinon. \end{cases}$$

Alors $u \times v = 0_{R^N}, maisu \neq 0_{R^N} etv \neq 0_{R^N}$.

3. Divers modes de définition de suites

- Définition explicite : donnée, pour chaque $n \in N$, de u_n en fonction de n (de façon plus ou moins complexe, avec éventuellement des sommes ou des conditions...)
- Définition récurrente :
  - récurrence "simple" : $(u_n)_{n \in N}$ est telle que :
  $$\begin{cases} u_0 = \ ... \\ \forall n \in N, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} ,$$
  (Problème de définition éventuelle , dépend de f . On peut résoudre ce problème par récurrence
  - récurrence "double" :
  récurrence "double" : $\begin{cases} u_0 = \ ... \\ u_1 = ... \\ \forall n \in N, u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}) \end{cases} ,$
- Définition implicite, par exemple : "pour $n > 2$, u_n est la solution réelle positive de l'équation $x^n = x + 1$”.
  On peut aussi imaginer d'autres modes de définitions de suites, plus complexes...

4. Suite croissante, décroissante

Définition

Soit $(u_n)_{n \in N}$ une suite réelle,

(u_n) est strictement croissante ⇄

(u_n) est strictement décroissante ⇄

5. Exercice :

A) Soit$(u_n)_{n \in N}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = \frac{3}{2}$ et par la relation de récurrence

$u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1.$

1. Montrer que pour tout $n \in N$,$1 < u_n < 2$
2. Montrer queu_n est strictement monotone.

B) On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels dont le terme général est défini par récurrence en posant :

$u_0 = 2, u_{n+1} = (2u_n - 1)^{\frac{1}{2}}$

1. Montrer que, pour tout $n \in N, 1 \leq u_n$.
2. Montrer que la suite$(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

C) On considère la suite $(u_n)_{n\ inN^*}$ de nombres réels définie par

$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} ... \frac{1}{2n}$

1. Montrer que la suite $u_n)_{n\ inN^*}$ est croissante.